

что соответствует приложению к боковой поверхности оболочки давления, распределенного по области  $D = \left\{ (\alpha, z) : -\frac{\beta}{2} \leq \alpha \leq \frac{\beta}{2}, -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \right\}$  и изменяющегося во времени по закону  $P(\tau)H(\tau)$ .  $H(\tau)$  – функция Хэвисайда.

Нестационарный нормальный прогиб цилиндрической оболочки представляется в виде тройной свертки функции влияния  $G_w$  с поверхностным давлением  $p(\alpha, z, \tau)$ . Интегралы свертки берутся при помощи квадратурных формул методом прямоугольников:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^s \frac{\beta}{n} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{\tau}{s} \cdot G_{wijk}(\alpha, z, \tau) p\left(\frac{\tau}{s}k\right),$$

$$G_{wijk}(\alpha, z, \tau) = G_w\left(\alpha - \frac{\beta}{n}i + \frac{\beta}{2}, z - \frac{b}{m}j + \frac{b}{2}, \tau - \frac{\tau}{s}k\right). \quad (2)$$

Соотношение (2) позволяет исследовать пространственно-временные распространения нестационарных колебаний в неограниченной оболочке Кирхгофа – Лява при воздействии распределенной по боковой области в виде полосы нестационарной нагрузки.

Представленный подход к построению нестационарной функции прогиба при переходе к размерным величинам открывает возможности для анализа нестационарного напряженно-деформированного состояния протяженных цилиндрических оболочек с учетом различных вариантов анизотропии материала и закона распределения нестационарной нагрузки как по координатам, так и по времени.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00968 А).*

#### Список литературы

- 1 Горшков, А. Г. Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
- 2 **Tarlovskii, D. V.** Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D. V. Tarlovskii, G. V. Fedotenkov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50, no. 2. – P. 208–2017. – DOI: 10.3103/S0025654415020107.
- 3 **Локтева, Н. А.** Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / Н. А. Локтева, Д. О. Сердюк, П. Д. Скопинцев // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2.* – М. : ООО «ТРП», 2020.
- 4 **Сердюк, А. О.** Нестационарная динамика тонких ортотропных упругих пластин / А. О. Сердюк, Д. О. Сердюк, Г. В. Федотенков // *Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы : тезисы докладов VII Междунар. науч. семинара.* – М. : ООО ТР-Принт, 2018. – С. 108–109.
- 5 **Сердюк, А. О.** Нестационарные функции влияния для анизотропной пластины типа Кирхгофа – Лява / А. О. Сердюк // *Ломоносовские чтения : тезисы докладов.* – М. : Изд-во Московского университета. – 2019. – С. 204–205.

УДК 539.37

## О ДЕФОРМИРОВАНИИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ СУПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

*И. В. ЛУЦКАЯ, В. А. МАКСИМЮК*

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев*

Тороидальные оболочки благодаря своей компактности часто используются на транспорте как сосуды высокого давления. Стремление увеличить компактность привело к оболочкам некругового поперечного сечения. Расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) таких оболочек численными сеточными методами усложняется из-за так называемого явления мембранного запираания (locking). Оно проявляется в замедленной, но устойчивой, сходимости классических численных методов вследствие значительных изгибов при небольших растяжениях. Особенно замедляется сходимость в случаях значительной эллиптичности поперечного сечения оболочек [1] вследствие больших изгибов близи полюсов эллипса. Очевидно, в случае суперэллиптического [2] сечения цилиндрических, тороидальных и других оболочек расчеты НДС еще больше усложняются.

Суперэллипс (superellipse, кривая Ламе) представляет собой плоскую кривую, задаваемую в декартовых координатах уравнением

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1, \quad n > 2. \quad (1)$$

При  $a = b = R$  кривая (1) становится суперокружностью (supercircle, squircle). С увеличением  $n$  суперэллипс будет приближаться к прямоугольнику с закругленными краями со сторонами  $a$  и  $b$ , а суперокружность – к квадрату со стороной  $R$ . Следует ожидать, что запираание в расчетах НДС таких оболочек проявится еще в большей степени.

Пусть срединная поверхность замкнутой тороидальной оболочки образована вращениями вокруг оси  $Oy$  суперэллипса (рисунок 1)

$$F(x, y) = \left| \frac{x-c}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n - 1 = 0, \quad (2)$$

где  $c$  – расстояние от центра поперечного сечения до оси вращения.

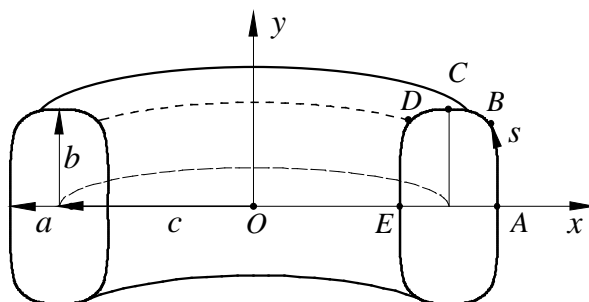


Рисунок 1 – Поперечное сечение замкнутой тороидальной оболочки

Срединная поверхность тонкой ортотропной оболочки отнесена [1] к криволинейной системе координат  $(s, \theta, \gamma)$ , в которой длина дуги суперокружности  $s$  отсчитывается от удаленной от оси вращения точки  $A$  ( $x = c + a, y = 0$ ) до ближайшей к ней точке  $E$  ( $x = c - a, y = 0$ ). Геометрические параметры оболочки толщиной  $h$  следующие:  $a/h = 100$ ,  $b/h = 110$ ,  $c/h = 200$ ,  $n = 4$ , длина половины дуги суперокружности  $s_k/h = 369$ . Оси ортотропии материала с характеристиками  $E_s = 15$  ГПа;  $E_\theta = 12$  ГПа;  $\nu_s = 0,12$  совпадают с координатными линиями принятой системы координат. Нагрузка – внутреннее давление  $p = 0,1$  МПа. В точках  $A$  и  $E$  задавались условия симметрии.

Осесимметричное НДС оболочки рассчитано методом конечных разностей. При проведении вычислений половина дуги суперэллипса разбивалась на ряд узловых точек с равномерным шагом при помощи алгоритма [3] численной дискретизации плоской кривой (1). В таблице 1 для характерных точек тора  $\tilde{s} = s/s_k$  приведены касательные перемещения  $\tilde{u} = u/h$  и прогибы  $\tilde{w} = w/h$  срединной поверхности, а также отнесенные к давлению  $p$  меридиональные ( $\sigma_s^+$ ,  $\sigma_s^-$ ) и окружные ( $\sigma_\theta^+$ ,  $\sigma_\theta^-$ ) напряжения на внешней (+) и внутренней (-) поверхностях оболочки.

Таблица 1 – Перемещения и напряжения в характерных точках тора, сечение – суперэллипс

Точка	$\tilde{s}$	$\tilde{u}$	$\tilde{w}$	$\sigma_s^+$	$\sigma_s^-$	$\sigma_\theta^+$	$\sigma_\theta^-$
$A$	0	0	0,728	101	64	300	298
$B$	0,35	1,719	1,762	-1393	1860	-680	-555
$C$	0,5	0,071	28,05	2869	-2235	221	-246
$D$	0,65	-1,126	-0,130	-1783	2528	640	1297
$E$	1,0	0	0,095	157	149	-100	-99

Для достижения точности до трех значащих цифр в максимальных величинах необходимо было разбить половину дуги суперэллипса ( $n = 4$ ) на 2000 узловых точек, тогда как в случае окружности ( $n = 2$ ) достаточно было 200 точек [3], что является проявлением мембранного запираания. Вблизи «диагональных» точек  $B$  и  $D$  суперэллипса ( $\tilde{s} = 0,35; 0,65$ ) и в «диаметральных» точках  $C$  ( $\tilde{s} = 0,5$ ) возникают значительные моменты. Максимальными являются меридиональные напряжения ( $\sigma_s^+$ ) на

внешней поверхности вблизи точки *C*. Там же имеет место максимальный изгиб. Вблизи «диагональных» точек *B* и *D*, в которых моменты достигают локальных максимумов, сечение разгибается.

Для сравнения в таблице 2 приведены аналогичные результаты для тора, поперечным сечением которого является суперокружность с параметрами:  $R/h = 100$ ,  $c/h = 200$ ,  $n = 4$ ,  $s_k/h = 351$ .

Таблица 2 – Перемещения и напряжения в характерных точках тора, сечение – суперокружность

Точка	$\tilde{s}$	$\tilde{y}$	$\tilde{w}$	$\sigma_s^+$	$\sigma_s^-$	$\sigma_\theta^+$	$\sigma_\theta^-$
<i>A</i>	0	0	0,727	106	58	300	297
<i>B</i>	0,35	1,731	-2,02	-1318	1674	-1152	-916
<i>C</i>	0,5	0,807	30,64	2997	-2332	227	-260
<i>D</i>	0,65	-1,174	1,370	-1803	2617	432	1202
<i>E</i>	1,0	0	0,095	159	148	-99	-99

Сравнительно небольшая ( $b/a = 1,1$ ) эллиптичность поперечного сечения ( $n = 4$ ) оболочки приводит (таблица 1) к незначительному перераспределению моментов вблизи «диагональных» точек. А максимальные напряжения (точка *C*) несколько уменьшаются, в отличие от случая простого ( $n = 4$ ) кругового и эллиптического сечений при прочих равных параметрах [3].

Данная осесимметричная задача может дополнить ряд так называемых патологических тестов.

#### Список литературы

- 1 **Lutskaya, I. V.** Modeling the Deformation of Orthotropic Toroidal Shells with Elliptical Cross-Section Based on Mixed Functionals / I. V. Lutskaya, V. A. Maksimiyuk, I. S. Chernyshenko // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – Vol. 54, no. 6. – P. 660–665.
- 2 **Akgün, G.** Geometrically nonlinear transient analysis of laminated composite super-elliptic shell structures with generalized differential quadrature method / G. Akgün, H. Kurtaran // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2018. – Vol. 105. – P. 221–241.
- 3 **Chernyshenko, I. S.** On the Stress-Strain State of Toroidal Shells of Elliptical Cross Section Formed from Nonlinear Elastic Orthotropic Materials / I. S. Chernyshenko, V. A. Maksimiyuk // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 36, no. 1. – P. 90–97.

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА С ВНУТРЕННИМИ ПОВРЕЖДЕНИЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

*М. И. МАРТИРОСОВ, Д. В. ДЕДОВА*

*Московский авиационный институт (НИИ), Российская Федерация*

*А. В. ХОМЧЕНКО*

*ПАО «Корпорация «Иркут», г. Москва, Российская Федерация*

Механика разрушения полимерных композиционных материалов (ПКМ) достаточно сложна в силу анизотропии свойств монослоев, взаимного влияния напряжённо-деформированного состояния монослоев друг на друга, а также ввиду наличия повреждений.

Под повреждением будем понимать отклонение изделия от нормы, вызванное производством или эксплуатацией. Повреждение – нарушение исправного состояния изделия при сохранении его работоспособности. В авиации выделено пять категорий повреждений изделий из ПКМ в зависимости от требуемого уровня сохранения остаточной прочности, контролепригодности, интервала между осмотрами, условий появления повреждения, а также является или нет очевидным событием, вызывающее повреждение.

Категория 1: Допустимое повреждение (порог контролепригодности в условиях эксплуатации и производства) менее того, которое может быть обнаружено с вероятностью не менее 95 % в процессе эксплуатации и на стадии производства. Обоснование допустимости повреждения Категории 1 включает демонстрацию сохранения уровня прочности не ниже расчётной в течение всего жизненного цикла изделия.

Категория 2: Повреждение, которое можно обнаружить при плановых или целевых осмотрах (с вероятностью не менее 95 %), проводимых через установленные в эксплуатационной документации интервалы (при визуальном и инструментальном контроле). Обоснование допустимости повреждения Ка-