стемы на дельта функцию уменьшилось в 1,35–1,52 раза: запас устойчивости системы по амплитуде и фазе увеличился в 0,75–2,1 раза: система обладает высокой робастностью - в реальной ситуации вывести систему с эталонной моделью на границу устойчивости практически невозможно).

Список литературы

1 **Маслолюбов, Ю. П.** Введение в Neural Network Toolbox [Электронный ресурс] / Ю. П. Маслолюбов. – Режим доступа : http://matlab.exponenta.ru/neuralnetwork/book1/index.php. – Дата доступа: 26.05.2017.

2 **Терещенко, К. В.** Применение среды MATLAB/SIMULINK для оценки влияния характера нагрузки на характеристики синхронного генератора / К. В. Терещенко // Перші кроки в науку : матеріали II Міжнар. наук.-практ. конф. студентів та молодих вчених. – Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2017. – С. 35–40.

3 **Васильев, Д.** Системы автоматического управления / Д. Васильев, В. Чуич. – Рига : Академическое издание Палмарий, 2012. – 200 с.

4 **Терещенко, К. В.** Исследование ПИД-регуляторов с использованием высокоуровневого интерпретируемого языка программирования Matlab R2016b / К. В. Терещенко // Научные разработки: перспективы XXI века : материалы V Междунар. науч.-практ. конф. студентов и молодых ученых, Краматорск, 19 апреля 2017 г. – Винница : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2017. – С. 7–11.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

В. Г. КАРНАУХОВ, В. И. КОЗЛОВ, Л. П. ЗИНЧУК
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Разнообразные конструктивные элементы из композитных пьезоэлектрических материалов широко используются в различных отраслях науки и техники. В процессе эксплуатации они могут находиться под действием продольных динамических нагрузок, что и обусловливает значительный интерес к проблемам параметрических колебаний таких элементов.

При изучении параметрических колебаний элементов конструкций основными вопросами являются построение областей динамической неустойчивости и исследования колебательных процессов в этих областях. Для решения первого вопроса используется линеаризованная теория, а для решения второго нужно исследовать теорию колебаний с учетом геометрической нелинейности.

В данной работе использована теория колебаний пространственных вязкоупругих пьезоэлектрических тел с учетом геометрической нелинейности. Эта теория является основой для построения линеаризованных моделей параметрических колебаний пространственных пьезоэлектрических тел. Такие модели используются для расчета областей динамической неустойчивости.

Рассматриваются параметрические колебания слоистых трехмерных тел из пьезоэлектрического вязкоупругого материала при воздействии на них гармонических во времени механической и электрической нагрузок. При этом основное внимание сосредоточено на исследовании главной области динамической неустойчивости, которая имеет наибольшее практическое значение.

Для расчета области динамической неустойчивости при параметрических колебаниях трехмерного тела сначала решалась задача электровязкоупругости, и вычислялись компоненты тензора начальных напряжений σ_{ij}^0. Затем решалась обобщенная задача на собственные значения (вычислялись собственные частоты и формы колебаний) и задача устойчивости рассматриваемого тела с начальными напряжениями σ_{ij}^0 для определения критической нагрузки. Зная минимальную собственную частоту колебаний тела, критическое усилие и параметры возбуждающей нагрузки, можно построить главную область динамической неустойчивости. Эти задачи решаются с использованием метода конечных элементов [3]. Для этого с применением уравнений Лагранжа приведена вариационная формулировка задач электромеханики для трехмерных пьезоэлектрических тел с учетом предварительного деформирования.

Задача решается в декартовой системе координат, при этом ось oz выбирается в направлении силовых линий электрического поля предварительной поляризации. Линеаризованное вариационное уравнение можно представить в виде

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}_L + \delta\mathbf{E}_{NL} = 0\,, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{2}\int_V \Bigg[c_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + 2c_{13}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + c_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2c_{13}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} + c_{33}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + c_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+ c_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_{44}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - 2e_{13}E_z\frac{\partial u}{\partial x} - 2e_{13}E_z\frac{\partial v}{\partial y} - 2e_{33}E_z\frac{\partial w}{\partial z} - 2e_{15}E_x\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) -$$

$$-2e_{15}E_y\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu_{11}\left(E_x\right)^2 - \mu_{11}\left(E_y\right)^2 - \mu_{33}\left(E_z\right)^2 + 2\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w\right) +$$

$$+ 2\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial t}u + \frac{\partial v}{\partial t}v + \frac{\partial w}{\partial t}w\right)\Bigg] dxdydz - \int_\Sigma \left(P_{nx}u + P_{ny}v + P_{nz}w\right) d\Sigma\,,$$

$$\mathbf{E}_{NL} = \frac{1}{2}\int_V \Bigg\{ \sigma_x^0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \sigma_y^0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+\sigma_z^0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + 2\tau_{xy}^0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) +$$

$$+ 2\tau_{xz}^0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\tau_{yz}^0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\} dxdydz\,.$$

В уравнении (1) используются стандартные обозначения [2, 3]. Для вычисления стационарных значений функционала $\mathbf{E}$ применяется метод конечных элементов с квадратичной аппроксимацией компонент вектора перемещений и электрического потенциала в пределах четырехугольного изопараметрического элемента. Из условия стационарности функционала (1) в случае действия на рассматриваемое тело гармонических возмущающих сил $P(t) = P_0 + P_1\cos\Omega t$ получим матричное уравнение относительно вектора обобщенных перемещений $\mathbf{u}$ вида

$$[\mathbf{M}]\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} + [\mathbf{C}]\frac{d\mathbf{u}}{dt} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} - P_0[\mathbf{G}]\mathbf{u} - P_1\cos\Omega t[\mathbf{G}]\mathbf{u} = 0\,. \tag{2}$$

Здесь введены традиционные для метода конечных элементов обозначения: $[\mathbf{M}]$– матрица масс, $[\mathbf{K}]$– матрица жесткости, $[\mathbf{C}]$– матрица потерь, $[\mathbf{G}]$– матрица устойчивости, а $P_0, P_1 = \mathrm{const}$, Ω – частота внешней периодической нагрузки.

Используя разложение $\mathbf{u}$ по собственным функциям, рассматриваемая задача сводится в конечном итоге к решению уравнения Матье – Хилла

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + \omega_{n*}{}^2(1 - 2\mu_{n*}\cos\Omega t) f_n(t) = 0\,,\ n = 1, 2, \ldots\,, \tag{3}$$

где $\omega_{n*}{}^2 = \omega_n{}^2(1 - \zeta_n{}^2/\omega_n{}^2)$, $\mu_{n*} = \mu_n\,\omega_n{}^2/(\omega_n{}^2 - \zeta_n{}^2)$, $\mu_n = P_1/[2(P_{n*} - P_0)]$, ω_n – n-я собственная частота свободных колебаний, ζ_n – коэффициент демпфирования и P_{n*} – критическая нагрузка для n-й моды колебаний. Для решения дифференциального уравнения (3) применяется метод гармонической линеаризации. Главные области динамической неустойчивости определяются согласно методике, изложенной в [1].

С использованием разработанного подхода при различных граничных условиях решены задачи для сплошной пластины из пьезоэлектрического вязкоупругого материала и трехслойной пластины, средний слой которой металлический, а внешние слои изготовлены из пьезоэлектрического вязкоупругого материала.

Проведено сравнение результатов расчетов главной области динамической неустойчивости с использованием предложенной методики и с применением классической теории Кирхгофа – Лява для тонкостенных элементов. Путем анализа числовых результатов исследовано влияние геометрических параметров, структурной неоднородности, механических и электрических граничных условий на главные области динамической неустойчивости.

Список литературы

1 **Болотин, В. В.** Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – М. : Гостехиздат, 1956. – 600 с.

2 **Гринченко, В. Т.** Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев : Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т.; т. 5).

3 Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев тел вращения из вязкоупругого пьезоэлектрического материала / В. Г. Карнаухов [и др.] // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 12–22.

УДК 539.3

ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ КРУГОВАЯ ТРЕХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА, СВОБОДНО ОПЕРТАЯ НА ОСНОВАНИЕ ПАСТЕРНАКА

А. Г. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

А. С. ОКОНЕЧНИКОВ

Московский авиационный институт, Российская Федерация

За последние десятилетия значительно возрос интерес к применению тонкостенных конструкций, в том числе слоистых, во многих отраслях промышленности. В современном машиностроении и приборостроении не могут обойтись без применения композиционных материалов, обладающих значительным рядом преимуществ: сверхтвердость, сверхпрочность, стойкость при высоких температурах, сравнительно малый удельный вес по сравнению с традиционными конструкционными материалами (сталь, чугун, латунь, алюминий и т.п.). Отдельные задачи, связанные с пластинами и балками типа Тимошенко решены в работах [1–4]. Деформирование трехслойных элементов конструкций при учете температурного воздействия исследовалось в статьях [5–7], сжимаемости заполнителя – в статьях [8–10]. Деформирование упругих круговых трехслойных пластин на основании Пастернака рассматривалось в работе [12, 13]. Влияние физической нелинейности материалов слоев пластины на перемещения при жесткой заделке контура пластины исследовано в статьях [14, 15]. Здесь рассмотрена деформация подобной пластины при свободном опирании контура.

Для трехслойного пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. Во внешних несущих слоях несимметричной по толщине ($h_1 \neq h_2$) трехслойной круговой пластины приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком, достаточно толстом ($h_3 = 2c$) заполнителе справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая поворачивается относительно срединной поверхности на дополнительный угол $\psi(r)$. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою. На верхний слой действует осесимметричная поперечная поверхностная нагрузка $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R, действующей на нижнюю поверхность пластины, и прогиба принимается соответствующей модели Пастернака:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w,$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига, Δ – оператор Лапласа.

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака была получена с помощью принципа Лагранжа в [12]. Поэтому ее можно применить и здесь как исходную.

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях линейные и нелинейные составляющие и подставляя их выраженными через перемещения в уравнения равновесия, имеем: