где t – время; u_r – компоненты вектора механических перемещений; r^* – радиальная координата; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации вещества; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и текущая концентрации q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – компоненты тензора диффузионных постоянных, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – компоненты тензора самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура сплошной среды; F_i – удельная плотность объёмных сил, $F^{(q)}$ – объемная плотность источников массопереноса; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков.

Решение задачи представлено в интегральной форме, представляющей собой свертки функций влияния данной задачи с функциями, задающими объемные возмущения:

$$u(r,\tau)=\sum_{m=1}^{N+1}\int_0^{\tau}\int_0^{c_{12}} \tilde{G}_{1m}(r,\xi,t)F^{(m)}(\xi,\tau-t)\,dt\,d\xi, \quad \eta_q(r,\tau)=\sum_{m=1}^{N+1}\int_0^{\tau}\int_0^{c_{12}} \tilde{G}_{q+1,m}(r,\xi,t)F^{(m)}(\xi,\tau-t)\,dt\,d\xi. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{G}_{km}(r,\tau)$ $\left(k,m=\overline{0,N+1}\right)$ – функции Грина, являющиеся решениями краевых задач вида

$$\left(\tilde{G}''_{1m}+\frac{1}{r}\tilde{G}'_{1m}-\frac{1}{r^2}\tilde{G}_{1m}\right)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\tilde{G}'_{j+1,m}+\delta_{1m}\delta(r-\xi)\delta(\tau)=\ddot{\tilde{G}}_{1m};$$

$$-\Lambda_{11}^{(q)}\left(\tilde{G}'''_{1m}+\frac{2}{r}\tilde{G}''_{1m}-\frac{\tilde{G}'_{1m}}{r^2}+\frac{\tilde{G}_{1m}}{r^3}\right)+D_1^{(q)}\left(\tilde{G}''_{q+1,m}+\frac{\tilde{G}'_{q+1,m}}{r}\right)+\delta_{q+1,m}\delta(r-\xi)\delta(\tau)=\frac{\partial\tilde{G}_{q+1,m}}{\partial\tau}+\tau_q\frac{\partial^2\tilde{G}_{q+1,m}}{\partial\tau^2}; \tag{4}$$

$$\left.\left(\tilde{G}'_{1m}+\frac{\lambda}{r}\tilde{G}_{1m}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\tilde{G}_{j+1,m}\right)\right|_{r=1}=0, \quad \left.\tilde{G}_{q+1,m}\right|_{r=1}=0, \quad \left.\tilde{G}_{1m}\right|_{\tau=0}=\left.\dot{\tilde{G}}_{1m}\right|_{\tau=0}=\left.\tilde{G}_{q+1,m}\right|_{\tau=0}=0.$$

Для этих функций используются разложение в ряды по функциям Бесселя, а также интегральное преобразование Лапласа по времени [3–5].

Оригиналы функций влияния определяются с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Список литературы

1 **Deswal, S.** Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction / S. Deswal, K. K. Kalkal, S. S. Sheoran // Physica B: Condensed Matter. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.

2 **Aouadi, M.** A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion / M. Aouadi // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 5711–5722.

3 **Зверев, Н. А.** Полярно-симметричная стационарная задача механодиффузии для изотропного полого цилиндра / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М. : ООО «ТР-принт», 2017. – С. 128–132.

4 **Зверев Н. А.** Сплошной ортотропный цилиндр под действием поверхностных полярно-симметричных стационарных возмущений / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А. Г. Горшкова : материалы XXIII Междунар. симпозиума. Т. 2. – М. : ООО «ТР-принт», 2017. – С. 132–137.

5 **Земсков, А. В.** Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – № 80 (1). – С. 5–14.

УДК 539.3

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. С. ЗЕЛЕНАЯ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

История появления трехслойных конструкций в строительстве связана, в первую очередь, с необходимостью создания конструкций, позволяющих удешевлять строительство и сокращать расходы в период эксплуатации. Трехслойные конструкции созданы из материалов различной прочности и жесткости, где несущие слои предназначены для восприятия основной части нагрузки, а заполнитель гарантирует равномерное распределение усилий между слоями. Такое сочетание материалов способствует надежной работе трехслойных элементов при различных внешних воздействиях.

В [3–4] рассмотрено деформирование трехслойных круговых пластин, связанных с основанием Пастернака. Колебания трехслойных стержней и пластин исследовано в [5–6]. Деформирование трехслойных круговых пластин, в том числе при температурном воздействии, рассмотрено в работах [7–9]. Статьи [10–11] посвящены исследованию изгиба трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем.

Постановка задачи рассмотрена в [1]. За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$, и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев ($k = 1, 2$). С помощью вариационного принципа Лагранжа была получена система уравнений равновесия рассматриваемой трехслойной пластины в усилиях [2].

Чтобы получить систему дифференциальных уравнений, описывающих перемещения в упругой трехслойной прямоугольной пластине со сжимаемым заполнителем, воспользуемся соотношениями закона Гука. Система примет вид

$$\begin{gathered}
a_1u_{1x} - a_1u_{2x} - a_4u_{1x},_{xx} - a_5u_{2x},_{xx} - a_{19}u_{1x},_{yy} - a_{18}u_{2x},_{yy} - a_{21}u_{1y},_{xy} - a_{23}u_{2y},_{xy} + \\
+a_2w_1,_x + a_3w_2,_x - 2a_{24}w_1,_{xyy} + a_{25}w_2,_{xyy} - 2a_6w_1,_{xxx} + a_7w_2,_{xxx} = p_x, \\
-a_1u_{1x} + a_1u_{2x} - a_5u_{1x},_{xx} - a_9u_{2x},_{xx} - a_{18}u_{1x},_{yy} - a_{20}u_{2x},_{yy} - a_{23}u_{1y},_{xy} - a_{22}u_{2y},_{xy} - \\
-a_{10}w_1,_x - a_{17}w_2,_x - a_{24}w_1,_{xyy} + 2a_{25}w_2,_{xyy} - a_6w_1,_{xxx} + 2a_7w_2,_{xxx} = 0, \\
a_1u_{1y} - a_1u_{2y} - a_4u_{1y},_{yy} - a_5u_{2y},_{yy} - a_{19}u_{1y},_{xx} - a_{18}u_{2y},_{xx} - a_{21}u_{1x},_{xy} - a_{23}u_{2x},_{xy} + \\
+a_2w_1,_y + a_3w_2,_y - 2a_{24}w_1,_{xxy} + a_{25}w_2,_{xxy} - 2a_6w_1,_{yyy} + a_7w_2,_{yyy} = p_y, \\
-a_1u_{1y} + a_1u_{2y} - a_5u_{1y},_{yy} - a_9u_{2y},_{yy} - a_{18}u_{1y},_{xx} - a_{20}u_{2y},_{xx} - a_{23}u_{1x},_{xy} - a_{22}u_{2x},_{xy} - \\
-a_{10}w_1,_y - a_{17}w_2,_y - a_{24}w_1,_{xxy} + 2a_{25}w_2,_{xxy} - a_6w_1,_{yyy} + 2a_7w_2,_{yyy} = 0, \\
-a_2u_{1x},_x - a_2u_{1y},_y + a_{10}u_{2x},_x + a_{10}u_{2y},_y + 2a_6u_{1x},_{xxx} + a_6u_{2x},_{xxx} + 2a_6u_{1y},_{yyy} + \\
+a_6u_{2y},_{yyy} + 2a_{24}u_{1x},_{xyy} + a_{24}u_{2x},_{xyy} + 2a_{24}u_{1y},_{xxy} + a_{24}u_{2y},_{xxy} + a_{11}w_1,_{xx} + \\
+a_{11}w_1,_{yy} - a_{12}w_2,_{xx} - a_{12}w_2,_{yy} + a_{15}w_1,_{xxxx} + a_{15}w_1,_{yyyy} - a_{16}w_2,_{xxxx} - \\
-a_{16}w_2,_{yyyy} + a_{26}w_1,_{xxyy} - a_{28}w_2,_{xxyy} + a_8w_1 - a_8w_2 = q + 0,5p_x,_x h_1 + 0,5p_y,_y h_1, \\
-a_3u_{1y},_y - a_3u_{1x},_x + a_{17}u_{2y},_y + a_{17}u_{2x},_x - a_7u_{1y},_{yyy} - a_7u_{1x},_{xxx} - 2a_7u_{2y},_{yyy} - \\
-2a_7u_{2x},_{xxx} - 2a_{27}u_{2y},_{xxy} - a_{25}u_{1y},_{xxy} - 2a_{25}u_{2x},_{xyy} - a_{25}u_{1x},_{xyy} - a_{12}w_1,_{xx} - \\
-a_{12}w_1,_{yy} + a_{14}w_2,_{xx} + a_{14}w_2,_{yy} - a_{16}w_1,_{xxxx} - a_{16}w_1,_{yyyy} + a_{13}w_2,_{xxxx} + \\
+a_{13}w_2,_{yyyy} - a_{28}w_1,_{xxyy} + a_{27}w_2,_{xxyy} - a_8w_1 + a_8w_2 = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Так как система дифференциальных уравнений (1) линейная, то решение будем искать методом Бубнова – Галеркина. Для этого необходимо искомые перемещения и внешние нагрузки разложить в ряды по системам базисных функций:

$$u_{kx} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kxpm}\psi_{xpm}(x, y), \quad u_{ky} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kypm}\psi_{ypm}(x, y), \quad w_k = \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{kpm}\psi_{zpm}(x, y),$$

$$p_x = \sum_{p,m=0}^{\infty} p_{xpm}\psi_{1pm}(x, y), \quad p_y = \sum_{p,m=0}^{\infty} p_{ypm}\psi_{2pm}(x, y), \quad q = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm}\psi_{3pm}(x, y),$$

где $\psi_{xpm}, \psi_{ypm}, \psi_{zpm}, \psi_{lpm}$ – системы базисных ортогональных функций (l =1, 2, 3); U_{1xpm}, U_{2xpm}, U_{1ypm}, U_{2ypm}, W_{1pm}, W_{2pm} – искомые амплитуды перемещений прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, м; p_{ypm}, p_{xpm}, q_{pm} – амплитуды нагрузок, Па.

Путем выбора базисных функций $\psi_{xpm}, \psi_{ypm}, \psi_{xpm}, \psi_{lpm}$ должны удовлетворяться кинематические граничные условия.

Список литературы

1 **Зеленая, А. С.** Постановка задачи об изгибе прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докладов V Междунар. науч. семинара, Москва, 17–19 октября 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – М., 2016. – С. 79–80.

2 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

3 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

4 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации : Междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

5 **Леоненко, Д. В.** Собственные колебания трехслойной круговой пластины, скрепленной с инерционным основанием / Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика : Междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. − Вып. 34.– С. 143–149.

6 **Леоненко, Д. В.** Импульсные колебания трехслойных стержней на упругом инерционном основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации : Междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т транспорта. – Гомель, 2019. – Вып. 12. – С. 140–145.

7 **Нестерович, А. В.** Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

8 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

9 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругопластической трехслойной круговой пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2019. – Т. 55. – № 4. – С. 727–740.

10 **Старовойтов, Э. И.** Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 3 (48). – С. 26–33.

11 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.

УДК 539.3, 539.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГОДИФФУЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА – ЛЯВА

А. В. ЗЕМСКОВ[1,2], Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ[2,1]

[1]Московский авиационный институт (НИУ),

[2]НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины Кирхгофа – Лява, находящейся в поле совместного действия механического и диффузионного полей (рисунок 1).

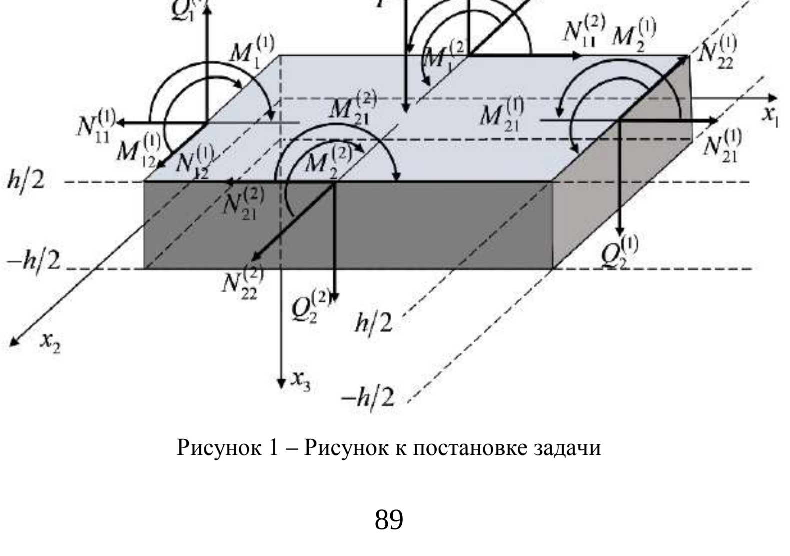

Рисунок 1 – Рисунок к постановке задачи