УДК 539.37

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНОДИФФУЗИЯ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОБЪЕМНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ

Н. А. ЗВЕРЕВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

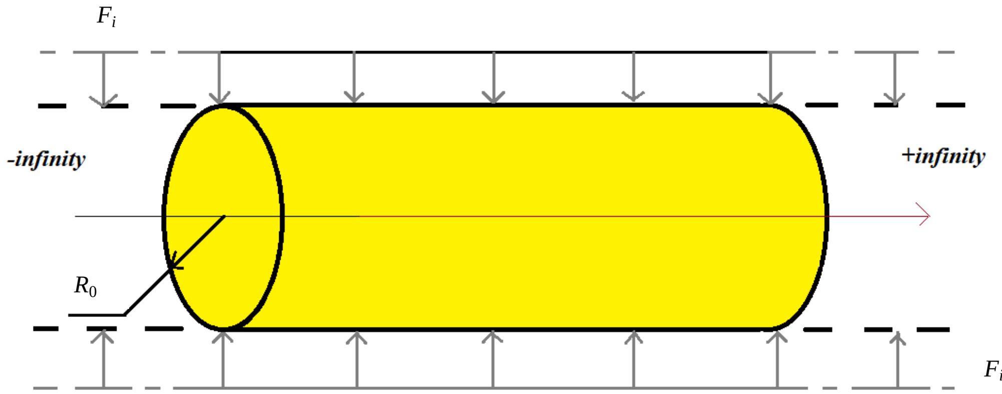
А. В. ЗЕМСКОВ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

В данной работе рассматривается одномерная полярно-симметричная связанная задача с учетом релаксации диффузионных потоков, целью которой является исследование напряженно-деформированного состояния ортотропного многокомпонентного однородного бесконечного цилиндра, находящегося под действием нестационарных объемных упругодиффузионных возмущений.

Математическая постановка задачи (рисунок 1) включает в себя уравнения движения сплошной среды и N уравнений массопереноса [1–5].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-F^i,\quad i=\overline{1,2},$$
$$-\Lambda_{11}^{(q)}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r^3}\right)+D_1^{(q)}\left(\frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r}\right)+F^{(q)}=\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial \tau}+\tau_q\frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Начальные условия принимаются равными нулю.



F_i – упругодиффузные поверхностные возмущения,
R_0 – радиус бесконечного цилиндра

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Замыкают постановку краевые условия, задаваемые по всей поверхности сплошного цилиндра

$$u\big|_{r=c_{12}}=0,\quad \left[\Lambda_{11}^{(q)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)-D_1^{(q)}\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=c_{12}}=0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}+c_{12}\frac{u}{r}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)}\right)\Bigg|_{r=c_{12}}=0,\quad \eta^{(q)}\big|_{r=c_{12}}=0. \quad (2)$$

Все величины в выражениях (1), (2) являются безразмерными. Их связь с размерными дается равенствами

$$r=\frac{r^*}{L},\quad u=\frac{u_r}{L},\quad \tau=\frac{Ct}{L},\quad C^2=\frac{C_{1111}}{\rho},\quad c_{12}=\frac{C_{1122}}{C_{1111}},$$
$$\tau_q=\frac{C\tau^{(q)}}{L},\quad \alpha_1^{(q)}=\frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}},\quad D_1^{(q)}=\frac{D_{11}^{(q)}}{CL},\quad \Lambda_{11}^{(q)}=\frac{m^{(q)}\alpha_{11}^{(q)}D_{11}^{(q)}n_0^{(q)}}{\rho CLRT_0},$$

где t – время; u_r – компоненты вектора механических перемещений; r^* – радиальная координата; $\eta^{(q)}=n^{(q)}-n_0^{(q)}$ – приращение концентрации вещества; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и текущая концентрации q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – компоненты тензора диффузионных постоянных, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – компоненты тензора самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура сплошной среды; F_i – удельная плотность объёмных сил, $F^{(q)}$ – объемная плотность источников массопереноса; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков.

Решение задачи представлено в интегральной форме, представляющей собой свертки функций влияния данной задачи с функциями, задающими объемные возмущения:

$$u(r,\tau)=\sum_{m=1}^{N+1}\int_0^{\tau}\int_0^{c_{12}}\tilde{G}_{1m}(r,\xi,t)F^{(m)}(\xi,\tau-t)\,dtd\xi,\quad \eta_q(r,\tau)=\sum_{m=1}^{N+1}\int_0^{\tau}\int_0^{c_{12}}\tilde{G}_{q+1,m}(r,\xi,t)F^{(m)}(\xi,\tau-t)\,dtd\xi. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{G}_{km}(r,\tau)$ $\left(k,m=\overline{0,N+1}\right)$ – функции Грина, являющиеся решениями краевых задач вида

$$\begin{gathered}\left(\tilde{G}''_{1m}+\frac{1}{r}\tilde{G}'_{1m}-\frac{1}{r^2}\tilde{G}_{1m}\right)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\tilde{G}'_{j+1,m}+\delta_{1m}\delta(r-\xi)\delta(\tau)=\ddot{\tilde{G}}_{1m};\\ -\Lambda_{11}^{(q)}\left(\tilde{G}'''_{1m}+\frac{2}{r}\tilde{G}''_{1m}-\frac{\tilde{G}'_{1m}}{r^2}+\frac{\tilde{G}_{1m}}{r^3}\right)+D_1^{(q)}\left(\tilde{G}''_{q+1,m}+\frac{\tilde{G}'_{q+1,m}}{r}\right)+\delta_{q+1,m}\delta(r-\xi)\delta(\tau)=\frac{\partial\tilde{G}_{q+1,m}}{\partial\tau}+\tau_q\frac{\partial^2\tilde{G}_{q+1,m}}{\partial\tau^2};\\ \left.\left(\tilde{G}'_{1m}+\frac{\lambda}{r}\tilde{G}_{1m}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\tilde{G}_{j+1,m}\right)\right|_{r=1}=0,\quad \left.\tilde{G}_{q+1,m}\right|_{r=1}=0,\quad \left.\tilde{G}_{1m}\right|_{\tau=0}=\left.\dot{\tilde{G}}_{1m}\right|_{\tau=0}=\left.\tilde{G}_{q+1,m}\right|_{\tau=0}=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Для этих функций используются разложение в ряды по функциям Бесселя, а также интегральное преобразование Лапласа по времени [3–5].

Оригиналы функций влияния определяются с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Список литературы

1 **Deswal, S.** Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction / S. Deswal, K. K. Kalkal, S. S. Sheoran // Physica B: Condensed Matter. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.

2 **Aouadi, M.** A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion / M. Aouadi // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 5711–5722.

3 **Зверев, Н. А.** Полярно-симметричная стационарная задача механодиффузии для изотропного полого цилиндра / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М. : ООО «ТР-принт», 2017. – С. 128–132.

4 **Зверев Н. А.** Сплошной ортотропный цилиндр под действием поверхностных полярно-симметричных стационарных возмущений / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А. Г. Горшкова : материалы XXIII Междунар. симпозиума. Т. 2. – М. : ООО «ТР-принт», 2017. – С. 132–137.

5 **Земсков, А. В.** Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – № 80 (1). – С. 5–14.

УДК 539.3

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. С. ЗЕЛЕНАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

История появления трехслойных конструкций в строительстве связана, в первую очередь, с необходимостью создания конструкций, позволяющих удешевлять строительство и сокращать расходы в период эксплуатации. Трехслойные конструкции созданы из материалов различной прочно-