УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТЕЛ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

С. Ю. БАБИЧ, Ю. П. ГЛУХОВ
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

В. Ф. ЛАЗАР
Мукачевский государственный университет, Украина

Как доказано в [3], представления напряжений и перемещений через комплексные потенциалы для сжимаемых и несжимаемых тел имеют одинаковую структуру. Отличаются лишь формулы для определения коэффициентов $\gamma_{nm}^{(j)}$ и $\gamma_k^{(j)}$ [2]. Таким образом, можно сформулировать следующий метод исследования (получения точных решений) динамических задач для тел с начальными напряжениями, соответствующих статических задач [3] для тел начальными напряжениями. В комплексные потенциалы [3] следует ввести комплексные параметры μ_j, комплексные переменные z_j, коэффициенты $\gamma_{nm}^{(j)}$ и $\gamma_k^{(j)}$ (за исключением $\gamma_{12}^{(1)}$ и $\gamma_{12}^{(2)}$) работы [4]. Полученные таким образом комплексные потенциалы будут давать точные решения соответствующих динамических задач в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел.

В качестве одного из примеров применения вышеизложенного аппарата рассмотрим задачу о распространении поверхностных волн Рэлея в полуплоскости $y_2 < 0$ с начальными напряжениями. Напомним, что под поверхностными гармоническими волнами в упругих телах с начальными напряжениями будем понимать гармонические волны, которые удовлетворяют следующим двум условиям: во-первых, волны распространяются вдоль свободной или несвободной поверхности и их амплитудные величины затухают при удалении от свободной поверхности (это условие тождественно условиям линейной классической теории упругости); во-вторых, при стремлении начальных напряжений к нулю рассматриваемые поверхностные волны переходят в поверхностные волны классической линейной теории упругости. Скорость поверхностной волны v будем считать неизвестной и для ее определения получим соответствующие уравнения. Исследования выполним отдельно для равных и неравных корней. Уравнение для определения скорости построим из условия существования отличных от нуля в полуплоскости комплексных потенциалов, обеспечивающих выполнение нулевых значений напряжений на границе полуплоскости при $y_2 = 0$.

Числовой пример рассмотрим для потенциала Трелоара (тело неогуковского типа). В этом случае комплексные параметры имеют вид

$$\mu_1 = i; \quad \mu_2 = i\lambda_1\lambda_2^{-1}\sqrt{1-\varepsilon_2^2\lambda_1^{-2}} \equiv i\lambda_1\lambda_2^{-1}\sqrt{1-v^2c_{sy_2}^{-2}};$$
$$\mu_1 \neq \mu_2; \quad \mu_3 = i\lambda_1\lambda_2^{-1}\sqrt{1-\varepsilon_2^2\lambda_1^{-2}}, \tag{1}$$

где v – скорость поверхностной волны; c_{sy_2} – скорость волны сдвига, поляризованной в плоскости $y_1 0 y_2$ и распространяющейся вдоль оси $0y_1$ в теле с начальными напряжениями.

При $v < c_{sy_2}$ получаем случай нервных корней, следовательно, уравнение для определения скорости волн Рэлея имеет вид

$$\mu_2\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1\gamma_{21}^{(1)} = 0. \tag{2}$$

Примем, что для полуплоскости выполняется условие $S_{22}^0 \equiv \sigma_{22}^{*0} = 0$, то есть граница полуплоскости не загружена. Согласно [5] в случае неравных корней характеристического уравнения комплексные потенциалы имеют вид

$$\tilde{Q}_{22} = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right];$$
$$\tilde{Q}_{21} = -2\operatorname{Re}\left[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];$$

$$\tilde{Q}_{12} = -2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\gamma_{12}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2\gamma_{12}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];$$

$$\tilde{Q}_{11} = 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\gamma_{11}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\gamma_{11}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];$$

$$u_k = 2\,\mathrm{Re}\left[\gamma_k^{(1)}\Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)}\Phi_2(z_2)\right]. \qquad (3)$$

Из (2) и [3] получим

$$\mu_1\gamma_{21}^{(1)} - \mu_2\gamma_{21}^{(2)} \equiv -\frac{i}{2}\frac{(x^3 + x^2 + 3x - 1)}{x(1 + x^2)} = 0;$$

$$x = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2^2}{\lambda_1^2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c_{sy_2}^2}}\,. \qquad (4)$$

В (4) введены обозначения [3].

В дальнейшем, как отмечалось в [3], будем рассматривать достаточно медленные движения. В данном случае ограничимся рассмотрением дозвуковых движений, в связи с чем будем считать, что $v < c_{sy_2}$.

Из (2) и (4) получим одно уравнение:

$$x^3 + x^2 + 3x - 1 = 0\,. \qquad (5)$$

Уравнение (5) совпадает с соответствующим уравнением работы [1]. Обозначим через x_* положительный действительный корень уравнения (5), тогда из второго выражения (4) получим

$$\nu_*^2 \equiv c_R^2 = c_{sy_2}^2(1 - x_*^2\lambda_2^2\lambda_1^{-2}) = \lambda_1^2 c_s^{0^2}(1 - x_*^2\lambda_2^2\lambda_1^{-2})\,. \qquad (6)$$

Выражение определяет скорость волн Рэлея в неогуковском теле с начальными напряжениями.

Если начальное состояние определяется также в рамках плоской деформации, т. е. $\lambda_3 = 1$, то из (6) с учетом $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ находим

$$\nu_*^2 = c_R^2 = c_{sy_2}^2(1 - x_*^2\lambda_1^{-4})\,. \qquad (7)$$

Результаты (5)–(7) совпадают с известными результатами, полученными другим методом [3], а также методами, приведенными в [5].

Список литературы

1 **Галин, Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 303 с.

2 **Гузь, А. Н.** Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницький. – Київ : Вища школа. – 1999. – 304 с.

3 **Гузь, А. Н.** Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов. – Кременчуг : Press-line, 2007. – 795 с.

4 **Гузь, А. Н.** Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов. – Saarbrücken : LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 468 с.

5 **Babich, S. Yu.** Contact problems for elastic bodies with initial stresses (rigid punches) / S. Yu. Babich, A. N. Guz, V. B. Rudnitskii // Int. Appl. Mech. – 1989. – Vol. 25, is. 8. – P. 735–748. – doi: https://doi.org/10.1007/BF00887636.

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А. М. БАГНО, Г. И. ЩУРУК
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

В теории разрушения установлено, что потеря поверхностной устойчивости упругого тела может стать начальным стартовым этапом разрушения конструкции, поэтому определению величины параметра критического укорочения, при котором возникает указанное явление, уделяется особое внимание.