

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, И. П. ШАБАЛИНА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

*Одобрено методической комиссией
электротехнического факультета*

Гомель 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, И. П. ШАБАЛИНА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.161
Щ66

Р е ц е н з е н т – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии
В. В. Подгорная (УО «ГГУ им. Ф. Скорины»).

Щербо, А. М.

Щ66 Производная и ее приложения : учеб.-метод. пособие / А. М. Щербо, И. П. Шабалина, А. И. Прокопенко ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 80 с.
ISBN 978-985-468-768-1

Кратко изложены основные теоретические сведения о производной и ее приложениях. Излагаемый материал сопровождается большим количеством примеров с подробными пояснениями, что существенно облегчает усвоение основных положений теории. Приведены задачи для аудиторных и домашних работ. Для проверки полученных знаний даны самостоятельные и контрольная работы.

Предназначено для студентов всех специальностей и составлено в соответствии с действующей программой по высшей математике.

УДК 517. 33(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 978-985-468-768-1 © Щербо А. М., Шабалина И. П., Прокопенко А. И., 2010
© Оформление. УО «БелГУТ», 2010

1 ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению независимого переменного при условии, что это последнее стремится к нулю произвольным образом:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Нахождение производной y' называют дифференцированием функции. Производная $y' = f'(x)$ представляет собой скорость изменения функции в точке x .

Пример 1.1. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = 3x^2 - 2x$.

Решение. Найдем приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 3x^2 + 2x = \\ &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - 3x^2 + 2x = 6x\Delta x - 2\Delta x + 3\Delta x^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x - 2\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x - 2 + 3\Delta x) = 6x - 2.$$

Имеют место следующие основные правила дифференцирования (здесь c – постоянная, а u и v – функции от x , имеющие производные):

$$(c)' = 0; \quad (1.2) \quad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (1.5)$$

$$(x)' = 1; \quad (1.3) \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad (1.6)$$

$$(cu)' = cu'; \quad (1.4) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (1.7)$$

Пользуясь приведенным определением производной, можно получить таблицу формул дифференцирования основных функций:

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \quad (1.8) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (1.14)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (1.9) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad (1.15)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (1.10) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (1.16)$$

$$(e^x)' = e^x; \quad (1.11) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (1.17)$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (1.12) \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (1.18)$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \quad (1.13) \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (1.19)$$

Пример 1.2. Найти производную функции $y = 4x^3 - 4x + \frac{5}{x}$.

Решение. Основываясь на формуле (1.5), получаем

$$y' = (4x^3)' - (4x)' + \left(\frac{5}{x}\right)'$$

Далее, применяя формулу (1.4), имеем

$$y' = 4(x^3)' - 4(x)' + 5\left(\frac{1}{x}\right)'.$$

Применяя формулы (1.8), (1.3) и (1.5), получаем

$$y' = 4 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 12x^2 - 4 - \frac{5}{x^2}.$$

Естественно, при некотором навыке подобные промежуточные выкладки опускают.

Пример 1.3. Найти y' , если $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

Решение. Применяя формулы (1.7), (1.8) и (1.18), получим

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 - \operatorname{arctg} x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^3(1+x^2)}.$$

Если это целесообразно, т. е. ведет к упрощению дифференцирования, то функцию можно предварительно тождественно преобразовать, а потом уже находить производную.

Пример 1.4. Найти y' , если $y = \frac{2x - x^2 + \sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{2x - x^2 + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{7}{6}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y' &= 2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}} = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{7}{6\sqrt[6]{x^{13}}}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельной работы

Используя правила дифференцирования и таблицу производных основных функций, найти производные:

- 1.1 $y = 3x^5 - 2x^3 + 0,4.$
- 1.2 $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{2}.$
- 1.3 $y = 5x^{-3} + x^{-1} + 0,1x.$
- 1.4 $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}.$
- 1.5 $y = \frac{4x^3 - 2x}{5 - x^2}.$
- 1.6 $y = \frac{\sin x + 5x^3}{4x}.$
- 1.7 $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1).$
- 1.8 $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1).$
- 1.9 $y = \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x - 3).$
- 1.10 $y = (\sin x + 3\cos x)\sqrt[3]{x}.$
- 1.11 $y = (\operatorname{tg} x - 1)\arcsin x.$
- 1.12 $y = \left(\sqrt[5]{x^3} - 1\right)\operatorname{arctg} x.$
- 1.13 $s = \frac{t^2 + 2\cos t}{\sin t}.$
- 1.14 $y = \frac{2\cos x - \sin x}{3\sin x + \cos x}.$
- 1.15 $y = \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt[4]{x} + 1}.$
- 1.16 $y = \frac{\arcsin x}{x + 1} - \frac{2}{x^2}.$
- 1.17 $y = e^x \cdot \operatorname{ctg} x.$
- 1.18 $y = 7^x \cdot \operatorname{arctg} x.$
- 1.19 $y = 3\operatorname{ctg} x + \frac{4}{x^3}.$
- 1.20 $y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \ln x}{5^x}.$
- 1.21 $y = \frac{10^x \cdot \ln x}{\operatorname{ctg} x}.$
- 1.22 $y = \frac{e^x \cdot \cos x}{1 + \ln x}.$
- 1.23 $y = \frac{\log_5 x}{5^x}.$
- 1.24 $y = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{2^x}{x}.$
- 1.25 $y = \frac{7^x + 1}{x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}.$
- 1.26 $s = (\ln t - \log_2 t)\sqrt[5]{t^2}.$
- 1.27 $y = -8\sqrt[4]{x} \cdot \operatorname{arctg} x.$
- 1.28 $y = 0,2\sqrt[4]{x} - x^3 + \frac{1}{5x^2}.$
- 1.29 $y = x^{-4} - 3x^{-3} - 0,7x^{-2}.$
- 1.30 $y = \frac{6x^4 - 7x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^3}.$
- 1.31 $y = \frac{1}{e^x + 1}.$
- 1.32 $y = \sqrt{x} \cdot \arccos x.$

1.33 $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2).$

1.34 $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$

1.35 $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$

1.36 $y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}.$

1.37 $y = (\sqrt[3]{x} + 2x)\left(1 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^2}\right).$

1.38 $y = 3\arcsin x - 4\sqrt{x}.$

1.39 $y = \frac{\arccos x}{x - \arcsin x}.$

1.40 $y = 4^x \cdot \arccos x - \frac{e^x}{x}.$

1.41 $\tau = \frac{\cos \varphi + \varphi^2}{e^\varphi}.$

1.42 $y = 2\ln x - \frac{3}{x^2}.$

1.43 $y = 8\sqrt[4]{x^3} - 3\log_9 x.$

1.44 $y = \frac{x^5 + 2^x}{e^x}.$

1.45 $y = (\cos x - 2^x)(4^x + 3\sin x).$

1.46 $y = \frac{(\sqrt{x} + 2) \cdot 6^x}{\operatorname{arctg} x}.$

1.47 $y = \frac{x^3}{4^x}.$

1.48 $y = 5^x(x^5 - 10x).$

1.49 $y = \pi x^2 - \arccos x.$

1.50 $y = \sin x \cdot \arccos x.$

2 ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ есть также дифференцируемая функция, причем

$$y' = f'_u(u) \cdot u'_x, \quad (2.1)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (2.1')$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, можно получить таблицу более общих формул дифференцирования основных элементарных функций, где $u = \varphi(x)$:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'; \quad (2.2) \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'. \quad (2.12)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \quad (2.3) \quad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'; \quad (2.4) \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \quad (2.14)$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad (2.5) \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \quad (2.15)$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'; \quad (2.6) \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \quad (2.16)$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'. \quad (2.7) \quad (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'. \quad (2.17)$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'. \quad (2.8) \quad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'. \quad (2.18)$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'. \quad (2.9) \quad (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'. \quad (2.19)$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \quad (2.10) \quad (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'. \quad (2.20)$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. \quad (2.11) \quad (u^v)' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'. \quad (2.21)$$

Пример 2.1. Найти y' , если $y = (2x^3 - 2x + 5)^7$.

Решение. Полагая $y = u^7$, где $u = 2x^3 - 2x + 5$, согласно (2.2) будем иметь

$$y' = 7u^6 \cdot (6x^2 - 2) = 7(2x^3 - 2x + 5)^6 \cdot (6x^2 - 2).$$

Пример 2.2. Найти y' , если $y = \cos^4 3x$.

Решение. Полагая $y = u^4$, где $u = \cos v$, $v = 3x$, находим

$$y' = 4u^3 \cdot (-\sin v) \cdot 3 = -12 \cos^3 3x \cdot \sin 3x.$$

При дифференцировании сложных функций обычно обходятся без введения промежуточных аргументов u, v, \dots , их только подразумевают. Например, последовательность нахождения

производной функции, рассмотренной в данном примере, можно записать так:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \cos^3 3x \cdot (\cos 3x)' = 4 \cos^3 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' = \\ &= 4 \cos^3 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -12 \cos^3 3x \cdot \sin 3x. \end{aligned}$$

Кроме того, нет необходимости последовательно записывать, что сначала взята производная степенной функции с основанием $\cos 3x$, а затем производная косинуса и на последнем этапе производная его аргумента. Результат можно записать сразу:

$$y' = 4 \cos^3 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3.$$

В последующих примерах так и будем поступать.

Последовательность нахождения сложной производной можно задавать с помощью скобок. Для функции данного примера

$$y = (\cos(3x))^4.$$

Чтобы не путаться в сложных случаях при дифференцировании, можно рекомендовать придерживаться следующего правила: если подлежащая дифференцированию функция является результатом целого ряда действий над аргументом x , то за промежуточный аргумент u следует принять результат всех этих действий, кроме последнего. Например, если $y = \operatorname{tg}^4 \sqrt[3]{\cos 2x}$, то $u = \operatorname{tg} \sqrt[3]{\cos 2x}$, так как при вычислении последним действием является возведение в четвертую степень. Тогда производная

$$\begin{aligned} y' &= 4 \operatorname{tg}^3 \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{\cos 2x}} \cdot \frac{1}{3} (\cos 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = \\ &= \frac{-8 \operatorname{tg}^3 \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x}{3 \cos^2 \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos^2 2x}}. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Найти производную функции

$$y = \cos \left(1 + t^2 - 2t + \sqrt{2t - t^3} \right)^5.$$

Решение.

$$y' = -\sin \left(1 + t^2 - 2t + \sqrt{2t - t^3} \right)^5 \cdot 5 \left(1 + t^2 - 2t + \sqrt{2t - t^3} \right)^4 \times$$

$$\times \left(2t - 2 + \frac{1}{2\sqrt{2t - t^3}} (2 - 3t^2) \right).$$

Пример 2.4. Найти производную функции $y = 5^{x^2 - \ln 3x}$.

Решение. $y' = 5^{x^2 - \ln 3x} \cdot \ln 5 \cdot \left(2x - \frac{1}{3x} \cdot 3 \right).$

Пример 2.5. Найти производную функции $y = \ln^2 \arccos 2x$.

Решение.

$$y' = 2 \ln \arccos 2x \cdot \frac{1}{\arccos 2x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 = \frac{-4 \ln \arccos 2x}{\sqrt{1 - 4x^2} \cdot \arccos 2x}.$$

Пример 2.6. Найти производную $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \operatorname{ctg}^3 x^4$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) \cdot \operatorname{ctg}^3 x^4 + \sqrt{1 - x^2} \cdot 3 \operatorname{ctg}^2 x^4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x^4} \cdot 4x^3 = \\ &= \frac{-x \operatorname{ctg}^3 x^4}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{12x^3 \operatorname{ctg}^2 x^4}{\sin^2 x^4}. \end{aligned}$$

Пример 2.7. Вычислить $f'(1)$, если $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$.

Решение. Находим производную заданной функции:

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 2.$$

Подставляем в выражение производной вместо x единицу:

$$f'(1) = 12 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 = 6.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти производную функций:

2.1 $y = \arcsin \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right).$

2.2 $y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{3x}}.$

2.3 $y = \sqrt[3]{\arctg \frac{1}{x}}.$

2.4 $y = \log_3 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}.$

2.5 $y = \ln \left(5x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$

2.6 $y = \arcsin \frac{2x^2}{1 + x^4}.$

- 2.7 $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\ln 3t}$.
- 2.8 $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}$.
- 2.9 $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{2e^x}$.
- 2.10 $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$.
- 2.11 $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$.
- 2.12 $y = \ln \left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1} \right)$.
- 2.13 $y = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\operatorname{arctg} e^{4x} \right)^3}$.
- 2.14 $y = \operatorname{arctg} \sqrt[5]{\frac{1-2x}{1+2x}}$.
- 2.15 $y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.
- 2.16 $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.
- 2.17 $y = -\frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2}}$.
- 2.18 $y = \operatorname{tg} \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.
- 2.19 $y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \sin 5x}}{4}$.
- 2.20 $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1 + \ln(2x+3)}}$.
- 2.21 $y = \log_2 \sin^2 3t$.
- 2.22 $y = 5^{\ln 3x \cdot \cos^3(1-x)}$.
- 2.23 $y = x^{\arcsin x}$.
- 2.24 $y = \arccos \left(2x \sqrt{1-x^2} \right)$.
- 2.25 $y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.
- 2.26 $y = \log_{e^2} \left(x^n + \sqrt{x^{2n} + 1} \right)$.
- 2.27 $y = \frac{x^x}{e^x} (x \ln x - x - 1)$.
- 2.28 $y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$.
- 2.29 $y = 5^{x^3 - 3x^2 + 2x}$.
- 2.30 $y = \sqrt[3]{\cos 3x} \cdot e^{-\arcsin 2x}$.
- 2.31 $y = \sqrt{(x+5)^3} \cdot \arccos^4 x$.
- 2.32 $y = \log_5 (x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3$.
- 2.33 $y = \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2 - x + 4}}$.
- 2.34 $y = \frac{\log_3 (4x+5)}{2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}}$.
- 2.35 $y = \operatorname{ch}^3 9x \cdot \operatorname{arctg} (5x-1)$.
- 2.36 $y = \sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}} \cdot \operatorname{tg} (3x^2 - 4x + 1)$.
- 2.37 $y = (\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x+1)}$.
- 2.38 $y = (\operatorname{arctg} (3x-3))^{\sin 4x}$.

$$\begin{array}{ll}
2.39 & y = \frac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}. \\
2.41 & y = 3^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 2x^5. \\
2.43 & y = \frac{(x+2)^7 \cdot (x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}. \\
2.45 & y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}. \\
2.47 & y = \ln \sin \sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x}}. \\
2.40 & y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3. \\
2.42 & y = \ln \ln^3 \ln^2 x. \\
2.44 & y = \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4 \cdot (x-3)^5}. \\
2.46 & y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}. \\
2.48 & y = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}.
\end{array}$$

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции $y = f(x)$ при значении аргумента $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 :

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.1)$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.2)$$

Уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярной касательной, записывается в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.3)$$

Производная функции $y = f(x)$, вычисленная при $x = x_0$, т. е. $f'(x_0)$, представляет собой скорость изменения функции относительно независимой переменной x в точке $x = x_0$. Если зависимость

между пройденным путем s и временем t при прямолинейном движении выражается формулой $s = s(t)$, то скорость v в любой момент времени t есть производная

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt}, \quad (3.4)$$

а ускорение (т. е. скорость изменения скорости движения)

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (3.5)$$

Пример 3.1. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 4x$ в точке $A(1, 2)$.

Решение. Находим производную и ее значение при $x_0 = 1$:
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $f'(1) = 3 - 6 + 4 = 1$.

Воспользовавшись формулами (3.2) и (3.3), составим уравнение касательной: $y - 2 = 1(x - 1)$, $y = x + 1$ и уравнение нормали: $y - 2 = -1(x - 1)$, $y = -x + 3$.

Пример 3.2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 3x - 5$, параллельной прямой $7x - y + 3 = 0$.

Решение. Чтобы составить уравнение касательной, нужно найти координаты точки касания $M_0(x_0, y_0)$. Для этого найдем угловой коэффициент прямой $k_{пр} = 7$ и на основании условия параллельности $k_{пр} = k_{кас}$ получим $k_{кас} = (f'(x))_{M_0} = 2x_0 + 3$; $2x_0 + 3 = 7$; $x_0 = 2$. Тогда $y_0 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = 5$.

Уравнение касательной будет иметь вид

$$y - 5 = 7(x - 2), \quad y = 7x - 9.$$

Пример 3.3. Тело движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ (s выражается в метрах, t – в секундах). Найти скорость и ускорение движения через 1 с после начала движения.

Решение. Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени: $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$.

Тогда $v(1) = 3 - 18 + 24 = 9$ (м/с).

Ускорение прямолинейного движения равно производной скорости по времени: $a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$, и, следовательно, $a(1) = -12$ (м/с²).

Пример 3.4. Вращающееся колесо вагона задерживается тормозом. Угол φ , на который колесо поворачивается в течение t с, определяется равенством $\varphi = 1 + 2t - 5t^2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение движения через 0,1 с после включения тормоза. Определить, в какой момент времени колесо остановится.

Решение. Угловая скорость движения колеса

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2 - 10t, \quad \omega(0,1) = 2 - 1 = 1 \text{ (1/с)}.$$

Угловое ускорение

$$a = \frac{d\omega}{dt} = -10 \text{ (1/с}^2\text{)}, \text{ т. е. ускорение постоянное.}$$

Колесо остановится, когда скорость $\omega = 0$; $2 - 10t = 0$; $t = 0,2$ (с).

Пример 3.5. Радиус основания цилиндра увеличивается со скоростью 3 м/с, а высота его уменьшается со скоростью 2 м/с. Какова скорость изменения объема цилиндра?

Решение. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, где r – радиус основания, h – высота цилиндра. Продифференцируем обе части этого равенства по времени t , учитывая, что V , r и h зависят от t :

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(2r \frac{dr}{dt} h + r^2 \frac{dh}{dt} \right).$$

По условию $\frac{dr}{dt} = 3$ м/с, $\frac{dh}{dt} = 2$ м/с.

Тогда скорость изменения объема цилиндра

$$\frac{dV}{dt} = \pi (6rh - 2r^2).$$

Пример 3.6. На кривой $y = x^2 - 4x + 1$ найти точку, в которой ордината возрастает в два раза быстрее, чем абсцисса.

Решение. Находим производную

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x - 4.$$

Так как производная характеризует скорость возрастания ординаты функции по сравнению с возрастанием абсциссы, то определим абсциссу точки из условия $2x-4=2$, $x=3$, а ордината точки $y=3^2-4\cdot 3+1=-2$. Получили точку $M(3; -2)$.

Пример 3.7. Под каким углом пересекаются линии $y=e^x$ и $y=e^{3x}$?

Решение. Под углом между двумя пересекающимися кривыми понимают угол между касательными к этим кривым, проведенным в точке их пересечения.

Найдем точку пересечения кривых, для чего совместно решим систему $\begin{cases} y=e^x, \\ y=e^{3x}. \end{cases}$

$e^x=e^{3x}$, $x=3x$, $2x=0$, $x=0$. $y=e^0=1$. Получили точку $A(0; 1)$.

Найдем угловые коэффициенты касательных $y'=e^x$, $k_1=e^0=1$; $y'=e^{3x}$, $k_2=3e^0=3$.

Угол между касательными найдем по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3 - 1}{1 + 1 \cdot 3} = 0,5$; $\varphi = \operatorname{arctg} 0,5$.

Пример 3.8. Составить уравнение касательной к кривой $y=x^2-4x+5$, перпендикулярной к прямой $x+2y-8=0$.

Решение. Найдем координаты точки касания $M_0(x_0, y_0)$.

Угловой коэффициент прямой $k_{\text{пр}} = -\frac{1}{2}$. Так как касательная перпендикулярна прямой, то $k_{\text{кас}} = -1/k_{\text{пр}}$ и $k_{\text{кас}} = 2$. Получаем

$$k_{\text{кас}} = (f'(x))_{M_0} = 2x_0 - 4; \quad 2x_0 - 4 = 2; \quad x_0 = 3.$$

Тогда $y_0 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 2$.

Уравнение касательной будет иметь вид $y - 2 = 2(x - 3)$, $y = 2x - 4$.

Задачи для самостоятельной работы

3.1 Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке $M_0(1, -1)$.

3.2 Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 4x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

3.3 Составить уравнения касательных к кривой $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

3.4 Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

3.5 Найти угол между параболой $y = 8 - x^2$, $y = x^2$.

3.6 К кривой $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ провести касательные, параллельные к прямой $3x - y + 1 = 0$.

3.7 Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2 + y^2 = 32$ перпендикулярно прямой $x + y + 4 = 0$.

3.8 Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$.

3.9 Точка движется по прямой так, что ее расстояние s от начального пункта через t секунд равно $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. В какой момент точка была в начальном пункте?

3.10 В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?

3.11 Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi t}{8}$. Определить скорость движения в конце второй секунды.

3.12 По параболе $y = x(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1; 7)$?

3.13 Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $s = \ln(1+t^2)$. Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 2 с после начала движения.

3.14 Радиус основания конуса увеличивается со скоростью 6 м/с, а высота его уменьшается со скоростью 3 м/с. Какова скорость изменения объема конуса?

3.15 Составить уравнение касательной, проведенной из точки $A(0; -0,5)$ к ветви гиперболы $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

3.16 Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$, проведенная в точке $M(2; 3)$? Написать уравнение этой касательной.

3.17 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведенные в точке $M(-9; -8)$.

3.18 Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

3.19 Найти угол между кривыми $y = x^3$ и $y = \frac{1}{x^2}$.

3.20 Найти угол между линиями $y = 1 + \sin x$, $y = 1$.

3.21 В какой точке касательная к линии $y = x^3$ параллельна прямой $12x - y + 5 = 0$?

3.22 В какой точке касательная к линии $y = x^2 - 4x + 5$ перпендикулярна к прямой $x + 2y - 8 = 0$?

3.23 Под каким углом пересекаются линии $x^2 + y^2 = 2$ и $y = x^2$?

3.24 Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

3.25 Тело движется вдоль прямой Ox по закону $x = t - \sin t$. Найти скорость и ускорение движения при $t = \frac{\pi}{2}$.

3.26 Вращающееся колесо задерживается тормозом. Угол φ , на который колесо поворачивается в течение t секунд, определяется

равенством $\varphi = 4 + 12t - 1,5t^2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение движения через 3 с после включения тормоза. Определить, в какой момент времени колесо остановится.

3.27 Радиус круга изменяется со скоростью 5 см/с. С какой скоростью изменится длина окружности?

3.28 Точка движется по оси абсцисс по закону $s = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t)$ (s – в метрах, t – секундах). В какой момент времени точка остановится?

4 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Под дифференциалом dy функции $y = f(x)$ понимается главная часть ее приращения Δy , пропорциональная приращению Δx независимой переменной x .

Дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению $dx = \Delta x$.

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = f'(x)dx. \quad (4.1)$$

Из формулы (4.1) вытекает представление производной в виде частного двух дифференциалов

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Если Δx достаточно мало по модулю, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем Δx , имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ или

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \quad (4.2)$$

Соотношение (4.2) используют в приближенных вычислениях.

Пример 4.1. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg}^2 3x$.

Решение.

$$dy = (\operatorname{arctg}^2 3x)' dx = 2 \operatorname{arctg} 3x \cdot \frac{1}{1+9x^2} \cdot 3dx = \frac{6 \operatorname{arctg} 3x dx}{1+9x^2}.$$

Пример 4.2. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - 3x$ при $x = 4$ и $\Delta x = 0,01$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (4 + 0,01)^2 - 3(4 + 0,01) - (4^2 - 3 \cdot 4) = 0,0501.$$

$$dy = f'(x)\Delta x = (2x - 3)\Delta x = (2 \cdot 4 - 3) \cdot 0,01 = 0,05.$$

Абсолютная погрешность

$$|dy - \Delta y| = |0,05 - 0,0501| = 0,0001.$$

Относительная погрешность

$$\left| \frac{dy - \Delta y}{\Delta y} \right| = \frac{0,0001}{0,0501} \approx 0,002 = 0,2 \%$$

Пример 4.3. При измерении стороны квадрата допущена ошибка в 2 %. По полученному значению стороны вычислена площадь квадрата. Какая при этом допущена погрешность?

Решение. Если x – точное значение стороны квадрата, а $x + \Delta x$ – полученное в результате измерения ее значение, то ошибка измерения $dx = \Delta x = \pm 0,02x$. Ошибка ΔS , сделанная при измерении площади S квадрата, приближенно равна

$$\Delta S \approx dS = d(x^2) = 2x dx = 2x(\pm 0,02x) = \pm 0,04x^2 = \pm 0,04S,$$

т. е. погрешность составляет 4 % площади.

Пример 4.4. Вычислить приближенно $\sqrt{16,1}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ и положим $x = 16$, $\Delta x = 0,1$. Тогда, воспользовавшись формулой (4.2), найдем:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\sqrt{16,1} = f(16 + 0,1) \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,1 = 4 + \frac{0,1}{8} = 4,0125.$$

Значение $\sqrt{16,1} = 4,0124805$ с точностью 10^{-7} .

5 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее первой производной:

$$y'' = (f'(x))'.$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной:

$$y''' = (f''(x))' \text{ и т. д.}$$

Производная n -го порядка (n -я производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее $(n-1)$ -й производной:

$$y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Пример 5.1. Найти третью производную от функции $y = x^2 - \cos 2x + e^{\frac{x}{2}}$.

Решение. $y' = 2x + 2\sin 2x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, \quad y'' = 2 + 4\cos 2x + \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}},$

$$y''' = -8\sin 2x + \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}.$$

Пример 5.2. Найти производную n -го порядка от функции $y = 5^x$.

Решение.

$$y' = 5^x \ln 5, \quad y'' = 5^x \ln^2 5, \quad y''' = 5^x \ln^3 5, \dots$$

Тогда $y^{(n)} = 5^x \ln^n 5$.

Задачи для самостоятельной работы

Для данных функций найти производные указанного порядка.

5.1 $y = x^5 - 7x^3 + 2; \quad y''' - ?$

5.2 $S = \operatorname{arctg} 2x; \quad S''(-1) - ?$

5.3 $y = e^{-\varphi} \sin \varphi$. Показать, что эта функция удовлетворяет уравнению $y'' + 2y' + 2y = 0$.

5.4 $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x$. Показать, что функция удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

5.5 Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

5.6 Показать, что функция $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

$$5.7 \quad y = \frac{x}{6(x+1)}; \quad y''' - ?$$

$$5.8 \quad y = \operatorname{sh}^2 x; \quad y''' - ? \quad \text{Указание } \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

$$5.9 \quad y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3); \quad y'' - ?$$

$$5.10 \quad y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{9}{27} \cos 3x; \quad y'' - ?$$

$$5.11 \quad y = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x; \quad y'' - ?$$

Найти производные n -го порядка функций:

$$5.12 \quad y = x^n \sqrt{x}.$$

$$5.13 \quad y = \frac{1}{2x+1}.$$

5.14 Тело движется прямолинейно по закону $S = t^4 - 2t^2 + 1$. Найти закон изменения скорости и ускорения для данного тела.

5.15 Тело движется прямолинейно по закону $S = 4t - \sin t$. Определить скорость и ускорение при $t = \frac{\pi}{2}$.

6 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, не разрешимым относительно y , то для нахождения производной y' надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x , и затем разрешить полученное уравнение относительно y' .

Пример 6.1. Найти производную неявной функции $x^3 - 2x^2 y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Решение.

$$3x^2 - 2\left((x^2)' \cdot y^2 + x^2 \cdot (y^2)'\right) + 5 + y' = 0,$$

$$3x^2 - 2(2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y') + 5 + y' = 0,$$

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2y \cdot y' + 5 + y' = 0,$$

$$y' - 4x^2y \cdot y' = 4xy^2 - 3x^2 - 5,$$

$$y'(1 - 4x^2y) = 4xy^2 - 3x^2 - 5,$$

$$y' = \frac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2y}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти производную неявных функций:

6.1 $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$.

6.2 $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$.

6.3 $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

6.4 $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$. Вычислить y' в точке $(2; -1)$.

6.5 $e^y + xy = e$. Вычислить y' в точке $(0; 1)$.

6.6 $ye^y - xe^x = y(x-1)$. Вычислить y' в точке $(1; 1)$.

6.7 $e^{xy} + x^2 + y^2 = 2$. Вычислить y' в точке $(1; 0)$.

6.8 $y^3 - \sin 3x = 0$.

6.9 $y = \operatorname{tg}(x + y)$.

6.10 $\sin(2x + 3y) - 2y = 0$. Вычислить y' в точке $(0; 0)$.

6.11 $\ln y + \frac{y}{x} = 0$.

6.12 $x^2 + y^2 = 1$. Найти y'' .

6.13 $x^3 + y^3 - 3y = 0$. Найти y'' .

6.14 $y = 2x + \arctg y$. Найти y'' .

6.15 $y^3 - 3y + 3x = 1$. Найти y'' .

7 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Пример 7.1. Найти y'_x функции $\begin{cases} x = a \cos^2 2t, \\ y = a \sin^2 2t. \end{cases}$

Решение. $\frac{dy}{dx} = \frac{a \cdot 3 \sin^2 2t \cdot \cos 2t \cdot 2}{-a \cdot 2 \cos 2t \cdot \sin 2t \cdot 2} = -\frac{3}{2} \sin 2t.$

Пример 7.2. Найти y''_{xx} функции $\begin{cases} x = t^4 + 2, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Решение. $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 1}{4t^3},$

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{3t^2 - 1}{4t^3}\right)'_t}{(t^4 + 2)'_t} = \frac{6t \cdot 4t^3 - 12t^2(3t^2 - 1)}{16t^6} = \frac{6t \cdot 4t^3 - 12t^2(3t^2 - 1)}{16t^6} =$$

$$= \frac{24t^4 - 36t^4 + 12t^2}{16t^9} = \frac{3(1 - t^2)}{16t^7}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти указанные производные от функций, заданных параметрически:

$$7.1 \begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = t^3 + t. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.2 \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t. \end{cases} \text{ Найти } y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}.$$

$$7.3 \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arccot} t. \end{cases} \text{ Найти } y'_x \Big|_{t=-\frac{1}{6}}.$$

$$7.4 \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases} \text{ Найти } y'_x \Big|_{t=0}.$$

$$7.5 \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases} \text{ Найти } y'_x, y''_{xx}.$$

$$7.6 \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2. \end{cases} \text{ Найти } y'_x \Big|_{t=1}, y''_{xx} \Big|_{t=1}.$$

$$7.7 \begin{cases} x = e^{-\varphi}, \\ y = e^{3\varphi}. \end{cases} \text{ Найти } y''_{xx} \Big|_{\varphi=0}.$$

$$7.8 \begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t). \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.9 \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.10 \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin \frac{t^3}{3+t}. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.11 \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.12 \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.13 \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln \operatorname{tg} e^t. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.14 \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.15 \begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

$$7.16 \begin{cases} x = \ln(1 + \sqrt{1 - t^2}), \\ y = \ln \frac{1 - t}{1 + t}. \end{cases} \text{ Найти } y'_x.$$

7.17 Составить уравнение касательной к кривой $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$ в

точке $M(2; 3)$.

7.18 Найти уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

7.19 Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

7.20 Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{2}$.

7.21 Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \text{ точке, для которой } t = \frac{\pi}{4}.$$

8 ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

При нахождении предела функции часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Нахождение предела функции в таких случаях называют раскрытием неопределенности. Эффективным средством для раскрытия неопределенностей является **правило Лопиталья: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных (если последний предел существует или равен бесконечности)**.

С помощью правила Лопиталья непосредственно раскрываются два вида неопределенных выражений: $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Нужно помнить, что предел отношения двух функций может существовать в то время, когда отношения производных предела не имеют. В некоторых случаях правило Лопиталья полезно комбинировать с нахождением пределов элементарными средствами.

Пример 8.1. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - x - 6)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 1}{2x} = \frac{7}{4}.$$

Пример 8.2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.\end{aligned}$$

Пример 8.3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{2 \cos 2x} = 1.$$

Пример 8.4. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$. Предел отношения производных не существует. Вместе с тем предел отношения функций существует:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Функция $\sin x$ является ограниченной, поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Иногда ошибочно считают, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$, а ведь $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Пример 8.5. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{4e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{8e^{2x}} = 0.$$

В данном примере правило Лопиталья было применено три раза последовательно.

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ с помощью алгебраических преобразований приводятся к неопределенностям

вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 8.6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} x = 0. \end{aligned}$$

Пример 8.7. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 2x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 8.8. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

Неопределенности вида 0^0 , ∞^0 , 1^∞ сводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$ путем логарифмирования функции, и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

Пример 8.9. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\frac{4}{1+2\ln x}}$.

Решение. Здесь неопределенность вида 0^0 . Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем выражение:

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\frac{4}{1+2\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x^{\frac{4}{1+2\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{4}{1+2\ln x} \cdot \ln x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{4\ln x}{1+2\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}} = 2. \end{aligned}$$

Итак, $\ln a = 2$, $a = e^2$.

Пример 8.10. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь неопределенность вида ∞^0 . Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем выражение:

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0; \\ a &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Пример 8.11. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Здесь неопределенность вида 1^∞ . Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем выражение:

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \ln(1+2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\ln(1+2x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 6; \quad a = e^6. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы, используя правило Лопиталья:

8.1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$.

8.2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$.

$$8.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}.$$

$$8.5 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$$

$$8.7 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$8.9 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{x/2}}{x + e^x}.$$

$$8.11 \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}.$$

$$8.13 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

$$8.15 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$8.17 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}.$$

$$8.19 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{3}{e^x - 1}}.$$

$$8.21 \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$8.23 \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} \pi x).$$

$$8.25 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$8.27 \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

$$8.29 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos 2x}{x + \sin 2x}.$$

$$8.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}.$$

$$8.6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}.$$

$$8.8 \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x).$$

$$8.10 \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x.$$

$$8.12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2x}.$$

$$8.14 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

$$8.16 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}.$$

$$8.18 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cdot \cos x}.$$

$$8.20 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}.$$

$$8.22 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

$$8.24 \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$8.26 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$8.28 \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.30 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}}.$$

9 АСИМПТОТЫ

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если, по крайней мере, один из односторонних пределов в точке $x = a$ равен бесконечности, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Прямая $y = k_1x + b_1$ является наклонной асимптотой при $x \rightarrow +\infty$, если существуют оба предела

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1x).$$

Аналогично, если существуют пределы

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2x),$$

то прямая $y = k_2x + b_2$ является наклонной асимптотой при $x \rightarrow -\infty$.

Если $k = 0$ и существует $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, то получаем горизонтальную асимптоту $y = b$ как частный случай наклонной.

Если вертикальных асимптот может быть любое число, то наклонных асимптот не может быть более двух.

Пример 9.1. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-2} = 2.$$

При $x \rightarrow -\infty$ получим те же значения k_1 и b_1 . Следовательно, кривая имеет одну и ту же наклонную асимптоту $y = x + 2$ как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$.

Пример 9.2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{3x^2}{x^2 - 1}$.

Решение. Кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = -1$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2 - 1} = 0, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = 3.$$

Итак, кривая имеет одну горизонтальную асимптоту $y = 3$.

Пример 9.3. Найти асимптоты кривой $y = 2x - \sqrt{1 + x^2}$.

Решение. Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как данная функция непрерывна на всей числовой оси. Будем искать наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{1 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{1} = 1;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{1 + x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{1 + x^2}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{1 + x^2})(x + \sqrt{1 + x^2})}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = 0.$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = x$.

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{1 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{1} = 3; \\ b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{1 + x^2} - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{1 + x^2}) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2}) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})(x - \sqrt{1 + x^2})}{x - \sqrt{1 + x^2}} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1 + x^2}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1 + x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Итак, при $x \rightarrow -\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = 3x$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти уравнения асимптот кривых:

$$9.1 \quad y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 3}.$$

$$9.2 \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}.$$

$$9.3 \quad y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$9.4 \quad y = \frac{x^2}{(x + 3)^2}.$$

$$9.5 \quad y = 2x + \frac{2}{x - 1}.$$

$$9.6 \quad y = \frac{x^2 + x}{x - 1}.$$

$$9.7 \quad y = \frac{x^2 - 4x + 9}{x}.$$

$$9.8 \quad y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$9.9 \quad y = \frac{x^4}{x^3 + 1}.$$

$$9.10 \quad y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$9.11 \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

$$9.12 \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 9}.$$

9.13 $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

9.14 $y = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

9.15 $y = e^{-x^2} + 2$.

9.16 $y = \frac{1}{1 - e^x}$.

9.17 $y = \sqrt{1 + x^2} - 2x$.

9.18 $y = xe^x$.

9.19 $y = \sin x + \frac{x}{\sin x}$.

9.20 $y = x^2 - \frac{8}{x}$.

9.21 $y = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$.

9.22 $y = \frac{e^x}{x}$.

9.23 $y = \frac{1}{xe^x}$.

9.24 $y = \frac{x}{\ln x}$.

10 ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Функция называется возрастающей (убывающей) в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции, называются монотонными. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ определяется знаком ее производной: если в некотором интервале $f'(x) > 0$, то функция возрастает, а если $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом интервале. Следовательно, отыскание промежутков монотонности функции $y = f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства ее первой производной. Производная может изменять знак в точках, где она либо равна нулю, либо не существует (но сама функция непрерывна). Такие точки называются критическими точками первой производной.

Отсюда получаем правило для нахождения промежутков монотонности функции $y = f(x)$:

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем производную функции $f'(x)$.

3 Находим критические точки первой производной.

4 Находим интервалы знакопостоянства производной, на которые разбивают область определения функции критические точки.

5 Определяем знак $f'(x)$ на каждом из этих интервалов: если $f'(x) > 0$, то функция возрастает, а если $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом интервале.

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если она является внутренней точкой области определения функции и существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x (x \neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0), \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Точки максимума и точки минимума называются точками экстремума функции, а значение функции в точке максимума (минимума) – максимумом (минимумом) или экстремумом функции.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

Не всякая критическая точка производной является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума: если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и при переходе через нее слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а если знак меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 – минимум; если первая производная при переходе через критическую точку не меняет знака, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Отсюда получаем первое правило нахождения экстремумов функции $f(x)$ (по первой производной):

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем первую производную функции $f'(x)$.

3 Находим критические точки первой производной.

4 Определяем знак производной $f'(x)$ слева и справа от критической точки, в которой функция непрерывна. Если знак изменяется с плюса на минус, то в данной точке функция имеет максимум, если с минуса на плюс, то – минимум. Если же знак производной не изменяется, то в данной точке экстремума нет.

При совместном решении задачи по нахождению интервалов монотонности и точек экстремума функции удобно составить таблицу изменения знаков первой производной (пример 10.1).

Второе достаточное условие экстремума: если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, первая производная $f'(x_0)=0$, а вторая производная $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 функция имеет минимум, а если $f''(x_0)<0$, то – максимум.

Второе правило нахождения точек экстремума (по второй производной):

1 Находим область определения функции $D(f)$.

2 Ищем первую производную функции $f'(x)$.

3 Находим точки, в которых $f'(x)=0$, а функция $f(x)$ непрерывна.

4 Ищем вторую производную $f''(x)$.

5 Во вторую производную $f''(x)$ подставляем каждое из значений, полученных в п. 3. Если $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 функция имеет минимум, если $f''(x_0)<0$, то – максимум. Если $f''(x_0)=0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым (можно воспользоваться первым правилом).

Пример 10.1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.

Решение. Находим область определения $D(f): (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
Первая производная

$$f'(x) = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 13)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}.$$

Определим критические точки: $f'(x) = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 5$;
 $f'(x) = \infty$ при $x_3 = 3$ (но в точке $x_3 = 3$ функция не определена, поэтому она не является критической).

Составим таблицу изменения знаков $f'(x)$:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; 5)$	5	$(5; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	+
$f(x)$	\square	\max -4	\square	т. п.	\square	\min 4	\square

В таблице указаны интервалы возрастания (\square) и убывания (\square) функции, точка максимума $(1; -4)$ и точка минимума $(5; 18)$.

Пример 10.2. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x - 1}$.

Решение. Область определения $D(f): (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
Первая производная

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}(x - 1) - x^{\frac{2}{3}}}{(x - 1)^2} = \frac{-x - 2}{3\sqrt[3]{x}(x - 1)^2}.$$

Находим критические точки: $f'(x) = 0$ при $x_1 = -2$; $f'(x) = \infty$ при $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ (но при $x_3 = 1$ функция имеет точку разрыва, поэтому она не является критической).

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	∞	$-$	∞	$-$
$f(x)$	\square	\min $-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	\square	\max 0	\square	т. п.	\square

Пример 10.3. Найти точки экстремума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ с помощью второй производной.

Решение. Находим $D(f): (-\infty; +\infty)$.

Ищем производную: $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Находим точки, в которых $f'(x) = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Вторая производная $f''(x) = 2x - 2$.

Исследуем полученные точки по знаку второй производной:

$f''(-1) = -4 < 0$, т. е. $x_1 = -1$ – точка максимума;

$f''(3) = 4 > 0$, т. е. $x_2 = 3$ – точка минимума.

Задачи для самостоятельной работы

Найти интервалы монотонности:

10.1 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

10.2 $y = x - x^3$.

10.3 $y = \frac{3}{x}$.

10.4 $y = 8x^2 - \ln x$.

10.5 $y = \frac{x+2}{x-3}$.

10.6 $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

10.7 $y = x(\sqrt{x} - 2)$.

10.8 $y = \ln(1 + x^2) + x$.

Найти экстремум функции:

10.9 $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$.

10.10 $y = (x - 1)^5$.

10.11 $y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

10.12 $y = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

10.13 $y = \frac{5x}{1+x^2}$.

10.14 $y = \frac{x^2+1}{x}$.

10.15 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

10.16 $y = -\frac{16}{\sqrt{x^2+6}}$.

10.17 $y = 5 - 4\sqrt[3]{x^2}$.

10.18 $y = \sqrt[3]{x^2-4x}$.

10.19 $y = 3e^{-x^2}$.

10.20 $y = \frac{\ln x}{x}$.

10.21 $y = \cos x - \sin x$.

10.22 $y = x \ln x$.

Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции:

10.23 $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

10.24 $y = x^2 \ln x$.

10.25 $y = x + 2 \operatorname{arctg} x$.

10.26 $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 + 4$.

10.27 $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}$.

10.28 $y = \frac{x}{x^2-3x+2}$.

11 ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Кривая называется выпуклой (вогнутой) в некотором промежутке, если она расположена ниже (выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка. Выпуклость или вогнутость кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая вогнута, если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла в этом промежутке.

Следовательно, нахождение промежутков выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства ее второй производной $f''(x)$.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ могут быть только точки, в которых вторая производная изменяет свой знак, т.е. точки, находящиеся внутри области определения функции $f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв. Такие точки называются критическими точками второй производной.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ будут лишь те критические точки второй производной, при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак.

Отсюда получаем правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции:

- 1 Находим область определения функции $D(f)$.
- 2 Ищем вторую производную функции $f''(x)$.
- 3 Определяем точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв (критические точки второй производной).
- 4 Находим промежутки, на которые разбивают область определения $D(f)$ критические точки.
- 5 Определяем знак $f''(x)$ на каждом из полученных промежутков: если $f''(x) > 0$, то это промежуток вогнутости; если же $f''(x) < 0$, то это промежуток выпуклости.
- 6 Те из граничных точек промежутков, в которых функция $f(x)$ непрерывна, а вторая производная $f''(x)$ изменяет свой знак при переходе через них, являются точками перегиба.

При нахождении интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба удобно результаты исследования записывать в таблицу изменения знаков второй производной.

Пример 11.1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

Решение. Находим $D(f): (-\infty; +\infty)$.

Ищем вторую производную:

$$y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 5, \quad y'' = 12x^2 - 12x - 24.$$

Находим критические точки:

$$12x^2 - 12x - 24 = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Все дальнейшие исследования запишем в таблицу изменения знаков второй производной:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\cup	т. п. -6	\cap	т. п. -14	\cup

Из таблицы следует, что $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ есть абсциссы точек перегиба (т. п.) кривой: $y(-1) = -6$, $y(2) = -14$. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; \infty)$ график функции вогнут (\cup), на интервале $(-1; 2)$ – выпукл (\cap).

Пример 11.2. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

Решение. Находим $D(f): (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Ищем вторую производную:

$$y' = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}; \quad y'' = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}.$$

Находим критические точки: $y'' = 0$, $x_1 = 0$; $y'' = \infty$ при $x_2 = -\sqrt{3}$ и $x_3 = \sqrt{3}$ (в этих точках функция терпит разрыв).

Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	\cap	т. п.	\cup	т. п. 0	\cap	т. п.	\cup

Задачи для самостоятельной работы

Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба:

11.1 $y = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 60x - 5$. 11.2 $y = 9\sqrt[3]{x}(x^2 - 7x) + 7x + 63$.

11.3 $y = (x^2 + 7x)\sqrt[3]{x} - 5x - 8$. 11.4 $y = \frac{x-1}{x+1}$.

11.5 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. 11.6 $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

11.7 $y = \frac{x^3 + 8}{x}$. 11.8 $y = 5 + \sqrt[3]{x-4}$.

11.9 $y = \ln(x^2 + 4)$. 11.10 $y = x \ln^2 x$.

11.11 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 11.12 $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

11.13 $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37$. 11.14 $y = \frac{x-5}{x+7}$.

11.15 $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2}(x+8)$. 11.16 $y = \frac{x}{x^2 + 9}$.

11.17 $y = xe^x$. 11.18 $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

11.19 $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$. 11.20 $y = \frac{1}{(x+1)^3}$.

11.21 $y = \frac{1}{x^2 - 4}$. 11.22 $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.

12 ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА

Рассмотренные отдельные элементы исследования функции образуют в совокупности аппарат, необходимый для построения графиков функций. Общая схема построения графика функции сводится к следующим этапам:

- 1 Найти область определения функции.
- 2 Проверить функцию на четность, нечетность, периодичность.
- 3 Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно).
- 4 Найти асимптоты графика функции.
- 5 Определить интервалы монотонности функции и точки экстремума.
- 6 Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба.
- 7 Построить график функции, используя полученные результаты исследования. При необходимости график функции может быть уточнен вычислением значений функций в отдельных точках.

Пример 12.1. Построить график функции $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

Решение.

1 Находим область определения функции. Данная функция является многочленом, поэтому точек разрыва нет и $D(f): (-\infty; +\infty)$.

2 Проверим функцию на четность или нечетность:

$$f(-x) = 4(-x)^2 - (-x)^4 - 3 = 4x^2 - x^4 - 3 = f(x).$$

Следовательно, функция является четной. Это значит, что ее график симметричен относительно оси ординат.

3 Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$$x=0, \quad y=-3;$$

$$y=0, \quad 4x^2 - x^4 - 3 = 0; \quad 4x^2 - 4 - x^4 + 1 = 0; \quad 4(x^2 - 1) - (x^4 - 1) = 0,$$

$$(x^2 - 1)(4 - x^2 - 1) = 0; \quad (x^2 - 1)(3 - x^2) = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -\sqrt{3};$$

$$x_4 = \sqrt{3}.$$

Получили следующие точки:

$$A(0; -3), B_1(-\sqrt{3}; 0), B_2(-1; 0), B_3(1; 0), B_4(\sqrt{3}; 0).$$

4 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, значит, график многочлена асимптот не имеет.

5 Определим интервалы монотонности функции и точки экстремума:

$$y' = 8x - 3x^3 = 4x(2 - x^2),$$

$$y' = 0, 4x(2 - x^2) = 0, x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}.$$

Составим таблицу:

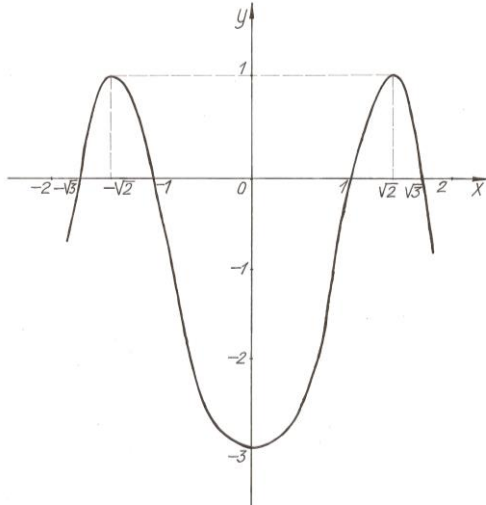
x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	□	max 1	□	min -3	□	max 1	□

1 Найдем промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

$$y'' = 8 - 12x^2 = 4(2 - 3x^2). y'' = 0, x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

x	$(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}})$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}})$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$(\sqrt{\frac{2}{3}}; \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	∩	т. п. $-\frac{7}{9}$	∪	т. п. $-\frac{7}{9}$	∩

2 Используя полученные результаты, строим график функции:



Пример 12.2. Построить график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Решение.

1 $D(f): (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Две точки бесконечного разрыва функции $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

2 $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Следовательно, функция

нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

3 При $x = 0$ имеем $y = 0$. Одна точка пересечения с осями координат $O(0;0)$.

4 Определяем наличие асимптот. Функция имеет две точки бесконечного разрыва, поэтому данная кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$.

Определим расположение бесконечных ветвей графика функции вблизи вертикальных асимптот:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Определим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

При $x \rightarrow -\infty$ получаем те же значения k и b . Итак, уравнение наклонной асимптоты $y = x$.

5 Определим интервалы монотонности и точки экстремума функции:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0, \quad \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Также имеем две точки разрыва: $x_4 = -1, \quad x_5 = 1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0
$f'(x)$	+	0	-	Не сущ.	-	0
$f(x)$	□	\max $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	□	т. п.	□	

$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
-	Не сущ.	-	0	+
□	т. п.	□	\min $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	□

В точке $x_1 = 0$ экстремума нет, так как $f'(x)$ не изменяет знака при переходе через данную точку.

6 Найдем промежутки выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} =$$

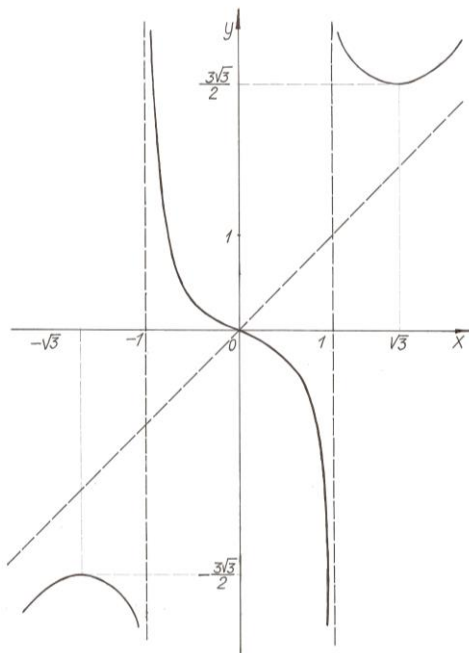
$$= \frac{(x^2 - 1)(4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

$y'' = 0$, $x_1 = 0$; две точки разрыва $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	Не сущ.	$+$	0	$-$	Не сущ.	$+$
$f(x)$	\cap	т. п.	\cup	т. п. 0	\cap	т. п.	\cup

7 Строим график функции.



Пример 12.3. Исследовать и построить график функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

Решение.

1 $D(f): (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2 $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - 2(-x)^2} = \sqrt[3]{-x^3 - 2x^2} \neq \pm f(x)$, т. е. функция не является ни четной, ни нечетной.

3 $x=0, y=0$.

$y=0, x^3 - 2x^2 = 0, x^2(x-2) = 0, x_1 = 0, x_2 = 2$.

Две точки пересечения с осями координат $O(0;0), A(2;0)$.

4 Определим наличие асимптот. Вертикальных асимптот нет.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} = \frac{-2}{1+1+1} = -\frac{2}{3}.$$

Наклонная асимптота $y = x - \frac{2}{3}$.

5 Определим интервалы монотонности и точки экстремума:

$$y' = \frac{1}{3}(x^3 - 2x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 4x) = \frac{3x^2 - 4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{3x - 4}{3 \cdot \sqrt[3]{(x(x-2))^2}}.$$

Находим критические точки:

$$y' = 0, \quad x_1 = \frac{4}{3};$$

$$y' = \infty, \quad x(x-2)^2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2.$$

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$\left(0; \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}; 2\right)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	Не суц.	-	0	+	Не суц.	+
$f(x)$	\square	\max_0	\square	$\min_{-\frac{32}{27}}$	\square	0	\square

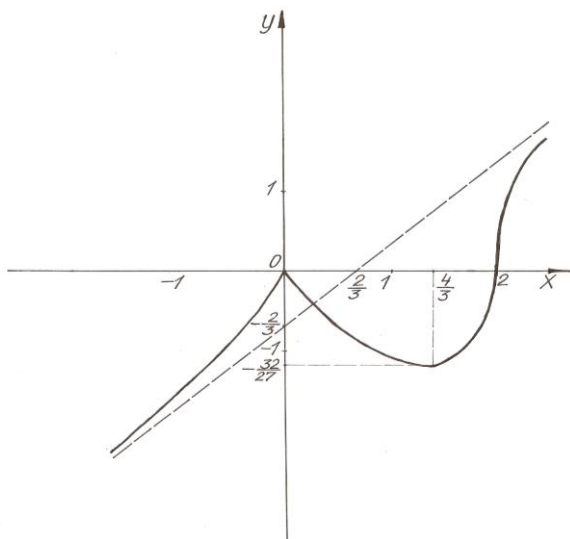
6 Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

$$y'' = -\frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4(x-2)^5}}. \quad y'' = \infty, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	Не суц.	+	Не суц.	-
$f(x)$	\cup		\cup	т. п. 0	\cap

Строим график функции:



Задачи для самостоятельной работы

Исследовать функции и построить их графики:

12.1 $y = x^3 + 3x^2$.

12.2 $y = x^3 - 12x$.

12.3 $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

12.4 $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

12.5 $y = x^4 - 2x^2$.

12.6 $y = x^4 - 4x^2 - 5$.

12.7 $y = \frac{1}{1+x^2}$.

12.8 $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$.

12.9 $y = \frac{8}{16-x^2}$.

12.10 $y = \frac{x}{x^2-4}$.

12.11 $y = x^2 - \frac{8}{x}$.

12.12 $y = xe^{-x}$.

12.13 $y = (x^2 + 1)e^{-x}$.

12.14 $y = \frac{x}{\ln x}$.

12.15 $y = \sqrt{16-x^2}$.

12.16 $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$.

12.17 $y = 8x^2 - x^4 - 7$.

12.18 $y = x^4 - 8x^2 - 9$.

12.19 $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 1}.$

12.20 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$

12.21 $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 - 1}.$

12.22 $y = \frac{x}{\sqrt{x-5}}.$

12.23 $y = \sqrt{4x^2 + 7}.$

12.24 $y = \frac{e^x}{x^2}.$

12.25 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.$

12.26 $y = \frac{1}{e^x - 1}.$

12.27 $y = x^2 \ln x.$

12.28 $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$

12.29 $y = \sin x + \cos x.$

12.30 $y = 3^{1/x}.$

13 НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a; b]$.

Поэтому, чтобы определить наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$, надо:

- 1) определить критические точки, принадлежащие данному отрезку;
- 2) вычислить значения функции в полученных критических точках и на концах отрезка;
- 3) из полученных значений функции самое большое будет наибольшим значением, а самое меньшее – наименьшим значением функции на всем данном отрезке.

Функция, непрерывная на интервале $(a; b)$, может и не достигать своего наибольшего и наименьшего значения. Если непрерывная функция имеет на интервале единственную точку экстремума, например, минимум (максимум), то в этой точке функция принимает и свое наименьшее (наибольшее) значение на этом интервале.

Пример 13.1. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на отрезке $[-4; 3]$.

Решение. Найдем критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9; \quad f'(x) = 0 \text{ при } x_1 = -3; \quad x_2 = 1.$$

Вычисляем значение функции в критических точках: $f(-3) = 20$;
 $f(1) = -12$.

Вычисляем значение функции на концах отрезка: $f(-4) = 13$;
 $f(3) = 20$.

Сравнивая полученные значения функции, заключаем: наибольшее значение функции на отрезке $[-4; 3]$ равно 20 и достигается в точках $x = 3$ и $x = -3$, а ее наименьшее значение равно -12 и достигается в точке $x = 1$.

Пример 13.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. Найдем критические точки:

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(2x^2 + 1)^2}}; \quad \text{при } x = 0 \quad f'(x) = 0.$$

Вычислим значения функции:

$$f(0) = 1, \quad f(-2) = \sqrt[3]{9}, \quad f(1) = \sqrt[3]{3}.$$

Наибольшее значение функции $f(-2) = \sqrt[3]{9}$ – в точке $x = -2$,
наименьшее значение $f(0) = 1$ – в точке $x = 0$.

Пример 13.3. Разложить число 20 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x , тогда другое будет $20 - x$. Произведение их $y = x(20 - x) = 20x - x^2$.

Найдем теперь наибольшее значение функции y для $x \in (0; 20)$. Для этого определим критические точки:

$y' = 20 - 2x$; $y' = 0$ в единственной точке $x = 10$, которая лежит в рассматриваемом интервале. Исследуем данную точку по знаку второй производной:

$$y'' = -2, \text{ т. е. } y''(10) < 0, \text{ т. е. это точка максимума.}$$

Единственная точка максимума в этом интервале совпадает с наибольшим значением функции в этом интервале. Итак, слагаемые равны 10, и их произведение, равное 100, будет наибольшим.

Пример 13.4. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Определить размеры окна при заданном периметре, имеющем наибольшую площадь.

Решение. Обозначим ширину окна через x , высоту прямоугольной части — y , тогда радиус полукруга $R = x/2$.

Периметр окна $p = x + 2y + \pi \frac{x}{2}$. Отсюда находим:

$$y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}.$$

Площадь окна

$$S = xy + \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{px}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{px}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8}.$$

Найдем наибольшее значение полученной функции S :

$$S' = \frac{p}{2} - x - \frac{\pi x}{4}, \quad S' = 0, \quad \frac{p}{2} - x - \frac{\pi x}{4} = 0, \quad x = \frac{p}{2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2p}{4 + \pi}.$$

Тогда высота окна

$$y = \frac{p}{2} - \frac{p}{4 + \pi} - \frac{\pi p}{2(4 + \pi)} = \frac{p}{4 + \pi}.$$

Покажем, что при $x = \frac{2p}{4 + \pi}$ площадь будет наибольшей.

Воспользуемся второй производной:

$S'' = -1 - \frac{\pi}{4} < 0$, т. е. при $x = \frac{2p}{4 + \pi}$ функция будет иметь максимум, что соответствует наибольшему значению функции.

Задачи для самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном промежутке либо на всей области определения:

13.1 $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0; 3]$.

13.2 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

13.3 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ на промежутке $[0; +\infty)$. 13.4 $y = \sin x \cdot \sin 2x$.

13.5 $y = \arctg x^2$. 13.6 $y = e^{-x^2}$. 13.7 $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

13.8 $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[0; 3]$. 13.9 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$; $[-2; 2]$.

13.10 $y = \operatorname{tg} x - x$; $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. 13.11 $u = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$; $[-4; 4]$.

13.12 $p = x^2 \ln x$; $[1; e]$. 13.13 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$; $[0; 3]$.

13.14 $u = x - 2 \ln x$; $[1; e]$. 13.15 $y = 2 \sin x + \cos x$; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

13.16 По двум путям движутся к пересечению два поезда со скоростью 60 км/ч. Считается, что пути пересекаются под прямым углом и что в данный момент они находятся от пересечения на расстоянии 25 и 40 км. Определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

13.17 Водоотводный канал железнодорожного пути имеет в поперечном сечении прямоугольник площадью 2 м^2 . При каких размерах сечения на его облицовку пойдет наименьшее количество материала?

13.18 Из круглого бревна диаметром $d = 30$ см требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основаниями b и h . Прочность балки пропорциональна bh^2 . При каких значениях b и h прочность балки будет наибольшей?

13.19 При каком соотношении между высотой h и диаметром d цилиндрической консервной банки на ее изготовление пойдет наименьшее количество жести.

13.20 Расходы на топливо для топки парохода пропорциональна кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб./ч, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб./ч. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

13.21 Требуется сделать конический шатер, объем которого 12 м^3 . При каком радиусе основания потребуется наименьшее количество материала?

13.22 Для балки, лежащей на двух опорах в концевых точках с равномерно распределенной нагрузкой по всей длине l , момент изгиба в точке, на расстоянии x от опоры, выражается формулой

$$M_{\text{изг}} = \frac{1}{2} qlx - \frac{1}{2} qx^2,$$

где q – нагрузка на единицу длины балки. Найти максимальный изгибающий момент и точку его приложения.

13.23 Для осушки болота должен быть вырыт открытый канал, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция. Найти угол откоса α (угол между большим основанием и боковой стороной), при котором потери на трение при движении воды будут наименьшими. Площадь сечения канала равна S , глубина h , потери на трение прямо пропорциональны смоченному периметру (линия соприкосновения потока со стенками канала).

13.24 На какой высоте следует поместить источник света над освещаемой поверхностью, чтобы освещение на расстоянии α от основания перпендикуляра, опущенного из источника света на освещенную поверхность, было наибольшим? Освещенность задана

$$E = \frac{k \sin \varphi}{\alpha^2 + h^2}, \text{ где } k \text{ – коэффициент пропорциональности, } h \text{ – высота}$$

источника света над освещаемой поверхностью, φ – угол между лучом и освещаемой поверхностью.

13.25 При горизонтальном перемещении груза P усилие Q , необходимое для этого перемещения, вычисляется по формуле

$$Q = \frac{PK}{\cos \beta + K \sin \beta},$$

где β – угол между горизонтом и направлением силы Q , K – коэффициент трения. Под каким углом к горизонту должно быть направлено усилие Q , чтобы оно было наименьшим?

13.26 Высота подъема брошенного вертикально вверх тела с начальной скоростью v_0 выражается формулой

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Определить максимальную высоту подъема тела, если $v_0 = 49$ м/с, $g = 9,8$ м/с².

13.27 Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать стойку прямоугольного сечения так, чтобы площадь поперечного сечения была наибольшей. Площадь поперечного сечения берется наибольшей, так как сопротивление стойки сжатию пропорционально ее поперечному сечению.

13.28 Сила удара P , испытываемая лопаточками гидравлического колеса, определяется по формуле

$$P = \frac{\gamma}{g} \omega_0 v_0 (v_0 - u),$$

где γ – удельный вес жидкости; $g = 9,81$ м/с² – ускорение земного притяжения; ω_0 – поперечное сечение струи; v_0 – скорость струи, падающей на колесо; u – скорость движения лопаточек колеса.

Мощность W гидравлического колеса определяется по формуле $W = PU$. Найти наибольшую мощность колеса и скорость его движения.

13.29 В фигуру, ограниченную линиями $y = 3 - x^2$, $y = 0$, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на оси, а две вершины – на параболе.

13.30 Определить наибольшую величину равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

13.31 Определить наименьшую площадь равнобедренного треугольника, описанного вокруг окружности радиуса R .

13.32 Открытый резервуар цилиндрической формы должен вмещать $V \text{ м}^3$. При какой высоте и радиусе основания резервуара на его

изготовление уйдет наименьшее количество материала.

13.33 В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

13.34 Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 м. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

13.35 Какой из прямоугольных треугольников с периметром $2r$ имеет наибольшую площадь?

13.36 Нужно огородить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала к стене. Для этого имеется a погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

13.37 В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

13.38 От канала шириной 4 м отходит под прямым углом другой канал шириной 2 м. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен).

13.39 Имея N одинаковых электрических элементов, мы можем различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы (числом N/n) – параллельно. Ток, даваемый такой батареей,

$$J = \frac{NnE}{NR + n^2r},$$

где E – электродвижущая сила одного элемента; R – внешнее сопротивление; r – его внутреннее сопротивление.

Определить, при каком значении n батарея даст наибольший ток.

14 САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

14.1 Производные сложных функций

Вариант 1

1 $y = \sin^3 5x \cos^5 3x$. 2 $y = e^{\arccos^3 x}$. 3 $y = x^{\cos x}$.

4 $x^2 y - y^2 x + (x - y)^3 = 0$. 5 $x = \cos \frac{t}{2}$; $y = t - \sin t$.

Вариант 2

1 $y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$. 2 $y = e^{\operatorname{arctg}^2 3x}$. 3 $y = (\sin x)^x$.

4 $y \sin x - \cos y = 0$. 5 $x = 2 \cos^3 t$; $y = 4 \sin^3 t$.

Вариант 3

1 $y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt[3]{1 - x}}$. 2 $y = e^{-2x} \ln^3(1 - x^2)$. 3 $y = \sqrt[3]{x}$.

4 $x^3 + xy^2 + y^3 = a^3$. 5 $x = \ln^3 \frac{1}{t}$; $y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$.

Вариант 4

1 $y = \frac{4 + x^4}{x^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$. 2 $y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}$. 3 $y = x^{\sqrt{x}}$.

4 $e^{x^2 - 2xy^3} = y$. 5 $x = \sqrt{1 - t^2}$; $y = \operatorname{tg} \sqrt{1 + t}$.

Вариант 5

1 $y = 2\sqrt[3]{(2 - x^3)^2}$. 2 $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} \right)$. 3 $y = (x^2)^{\sin 2x}$.

4 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a + \frac{1}{4} y^2$. 5 $x = \arcsin \frac{t}{1 + t^2}$; $y = \arccos \frac{1}{1 + t^2}$.

Вариант 6

1 $y = x^3 \cdot \ln^2 \cos(1 - 3x)$. 2 $y = \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$. 3 $y = (\ln 2x)^{1 - x^2}$.

4 $e^{1-y^2} - xy^3 = 0$. 5 $x = 2\cos t - 3t^2$; $y = 2\cos t - 5t^3$.

Вариант 7

1 $y = (1+x^2)e^{\arctg^2 x}$. 2 $y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$. 3 $y = (e^{2x})^{\ln^3 \frac{1}{x}}$.

4 $x^4 - 2xy^3 + a^3y = 0$. 5 $x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$; $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$.

Вариант 8

1 $y = \arctg \frac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x - 4}}$. 2 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$. 3 $y = (x^3 - 1)^{e^{3x}}$.

4 $xy^2 + xe^y + 1 - y^2 = 0$. 5 $x = \text{ctgt}$; $y = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Вариант 9

1 $y = \arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. 2 $y = 2^{x^2 \cdot \text{tg}^3 \frac{x+1}{x^2}}$. 3 $y = \left(\sin \frac{1}{x}\right)^{\ln 3x}$.

4 $x + y + \arctg 2y = 0$. 5 $x = 2\cos t - 3t^2$; $y = 2\sin t - 5t^3$.

Вариант 10

1 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$. 2 $y = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a}$. 3 $y = e^{x^{\frac{1}{\sin^3 x}}}$.

4 $x^4 + 2xy^3 - a^3y = 0$. 5 $x = \frac{3t^2 + 1}{3t^2}$; $y = \sin \frac{t^3}{t+3}$.

Вариант 11

1 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x$. 2 $y = \ln^3(x^2 + 5x + \sqrt[3]{x})$. 3 $y = (e^{2x})^{\sin 3x}$.

4 $e^y + xy^2 = 0$. 5 $x = \operatorname{ctg}(2e^t)$; $y = \ln(\operatorname{tge}^t)$.

Вариант 12

1 $y = \frac{1}{3}(x+2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}+1)$. 2 $y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

3 $y = 5^{\cos^3 2x \ln \frac{1}{x}}$. 4 $\cos(x+y) = y^2$. 5 $x = t - \sin 2t$; $y = \ln \cos 2t$.

Вариант 13

1 $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}$. 2 $y = \ln^3(x-3) \operatorname{arctg} \frac{x}{x-3}$. 3 $y = (\cos^2 x)^{\sin 3x}$.

4 $y \ln x - x \ln y = 1$. 5 $x = \cos 2t$; $y = \frac{2}{\cos^2 t}$.

Вариант 14

1 $y = \operatorname{tg}^3 \ln(-3x^2)$. 2 $y = e^{-2x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$. 3 $y = 5^{\arcsin \frac{1}{x} (x^3+1)^{-3}}$.

4 $\ln x + y^3 - 3xy^2 = 0$. 5 $x = \sqrt{t-3}$; $y = \ln(t-3)$.

Вариант 15

1 $y = (1+x^6)^2 e^{\operatorname{arctg}^2 x}$. 2 $y = x^3 \arccos \left(-\frac{x^2+2}{3} \right)$. 3 $y = (x^3+5x)e^{-3x}$.

4 $\ln y + x^3 - 2x^2 y = 0$. 5 $x = \sqrt{1+t^2}$; $y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t^2}$.

14.2 Правило Лопиталья

Найти пределы, используя правило Лопиталья.

Вариант 1

1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x}$.

$$3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right).$$

Вариант 2

$$1 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2-3x-10}.$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2-x+1}{5x^2+6x-2}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2x+1}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Вариант 3

$$1 \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}.$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+1}{x^2+3x-2}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} (\ln(2+x) - \ln 2).$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1-\cos x}.$$

Вариант 4

$$1 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}.$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x-6}{x^2+7x+10}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x} \right)^{x+2}.$$

Вариант 5

$$1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1-\sqrt{2x+1}}.$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln \text{ctg} x.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2x}.$$

Вариант 6

$$1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}.$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x-1}{x^3-x^2+x+1}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Вариант 7

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + x - 10}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{5x} \cdot \ln(1 + 3x).$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2 \cos 2x}.$$

Вариант 8

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 17x + 10}{3x^2 - 16x + 5}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x.$$

Вариант 9

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 11x + 2}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1}\right)^{x+1}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x + 1}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1}\right).$$

Вариант 10

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x + 1}\right)^x.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{x^3 + 3x^2 - 1}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{10x^2}.$$

Вариант 11

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{5 \operatorname{tg} x}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x^2 + 3}{x^3 + 3x + 1}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right).$$

Вариант 12

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 3x + 1}{6x^3 + x^2 + x - 2}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 4x - 5}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x).$$

Вариант 13

$$1 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{9x^2 + 2x}.$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{5x^2 - 13x - 6}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{1-4x} \right)^{x+1}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2} \right).$$

14.3 Исследование функции

Найти:

- 1) асимптоты кривой;
- 2) максимум и минимум;
- 3) наибольшее и наименьшее значения на отрезке.

Вариант 1

$$1 \ y = \frac{x^2 + 1}{x}. \quad 2 \ y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}. \quad 3 \ y = x - 2 \ln x, [1; e].$$

Вариант 2

$$1 \ y = \frac{x^2}{x+1}. \quad 2 \ y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}. \quad 3 \ y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 2].$$

Вариант 3

$$1 \ y = \frac{x^2 - x - 1}{x}. \quad 2 \ y = xe^{-\frac{x^2}{2}}. \quad 3 \ y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35, [-4; 4].$$

Вариант 4

$$1 \ y = \frac{1-4x}{1+2x}. \quad 2 \ y = \frac{x}{1+x^2}. \quad 3 \ y = e^{-x^2}, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

Вариант 5

$$1 \quad y = \frac{x-4}{2x+4}. \quad 2 \quad y = \frac{3-x^2}{x+2}. \quad 3 \quad y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, [-1; 5].$$

Вариант 6

$$1 \quad y = \frac{x^2}{2-2x}. \quad 2 \quad y = x + \frac{1}{x}. \quad 3 \quad y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4].$$

Вариант 7

$$1 \quad y = \frac{x^2}{x^2-4}. \quad 2 \quad y = \frac{2x^2-1}{x^4}. \quad 3 \quad y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1; 3].$$

Вариант 8

$$1 \quad y = \frac{x^3}{1-x^2}. \quad 2 \quad y = \frac{\ln x}{x}. \quad 3 \quad y = \sqrt[3]{2x^2} + 1, -[-2; 1].$$

Вариант 9

$$1 \quad y = \frac{x^2+x}{x-1}. \quad 2 \quad y = (x^2-8)e^x. \quad 3 \quad y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1; 2].$$

Вариант 10

$$1 \quad y = \frac{x^2+1}{x^2-1}. \quad 2 \quad y = \frac{x^4+48}{x}. \quad 3 \quad y = -3x^2 + 4x - 8, [0; 1].$$

Вариант 11

$$1 \quad y = \frac{x^2-4x+9}{x}. \quad 2 \quad y = \sqrt{16-x^2}. \quad 3 \quad y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, [-4; 3].$$

Вариант 12

$$1 \quad y = \frac{x}{x^2-4x+3}. \quad 2 \quad y = \frac{x^2-5x}{x-1}. \quad 3 \quad y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, [-1; 1].$$

Вариант 13

$$1 \quad y = \frac{x^4}{x^3+1}. \quad 2 \quad y = 3^{\frac{1}{x}}. \quad 3 \quad y = \sqrt{100-x^2}, [-6; 8].$$

Вариант 14

1 $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$. 2 $y = \frac{e^x}{x^2}$. 3 $y = \frac{x-1}{x+1}, [0; 4]$.

Вариант 15

1 $y = \frac{x^2}{x+1}$. 2 $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$. 3 $y = \sqrt{25-x^2}, [-4; 4]$.

15 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

- 1 Найти пределы функций, используя правило Лопиталья.
- 2 Найти уравнения асимптот кривых.
- 3 Исследовать функции и построить их графики.

Вариант 1

1 а) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctgx} \ln(x + e^x)$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$.
2 а) $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$; б) $y = \frac{17-x^2}{4x-5}$. 3 $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$.

Вариант 2

1 а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
2 а) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$; б) $y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$. 3 $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.

Вариант 3

1 а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$.
2 а) $y = \ln x$; б) $y = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$. 3 $y = \frac{2x+1}{x^2}$.

Вариант 4

1 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

$$2 \text{ a) } y = \frac{\ln(1+x)}{x}; \text{ б) } y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}. \quad 3 \text{ } y = \frac{2x^2}{4x^2 - 1}.$$

Вариант 5

$$1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$2 \text{ a) } y = 4x - \frac{\sin x}{x}; \text{ б) } y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}. \quad 3 \text{ } y = x^2 e^{-x}.$$

Вариант 6

$$1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$2 \text{ a) } y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}; \text{ б) } y = \frac{x^3}{4 - x^2}. \quad 3 \text{ } y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}.$$

Вариант 7

$$1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x}.$$

$$2 \text{ a) } y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}; \text{ б) } y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}. \quad 3 \text{ } y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

Вариант 8

$$1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$2 \text{ a) } y = \frac{-x^2 - 4x + 13}{4x + 3}; \text{ б) } y = \sqrt{x^2 - 16}. \quad 3 \text{ } y = e^{2x - x^2}.$$

Вариант 9

$$1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x).$$

$$2 \text{ a) } y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 2}; \text{ б) } y = \ln(1 - x^2). \quad 3 \text{ } y = e^{\frac{1}{3-x}}.$$

Вариант 10

1 a) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln(1 - \cos x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} 5x$.

2 a) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$; б) $y = \frac{x^4}{x^3+1}$. 3 $y = \frac{4x^3+5}{x}$.

Вариант 11

1 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{x + \sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^x - 1}$.

2 a) $y = xe^{-x^2} - 2$; б) $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$. 3 $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

Вариант 12

1 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{4}{1-2 \ln x}}$.

2 a) $y = \frac{1}{1+x^2}$; б) $y = \frac{x^2 - 1}{4x - 3}$. 3 $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Вариант 13

1 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \arcsin 2x}{\ln(1 + 3x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos 2x}$.

2 a) $y = \frac{1}{1 - e^x}$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$. 3 $y = \frac{4x}{x^3 - 1}$.

Вариант 14

1 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x^3 - x^5}{3x - x^4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

2 a) $y = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 2}$; б) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$. 3 $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

Вариант 15

1 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{3}{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

$$2 \text{ a) } y = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}; \text{ б) } y = \ln \frac{x-5}{x+5}. \text{ 3 } y = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

16 ОТВЕТЫ

$$1.1 \ y' = 15x^4 - 6x^2. \quad 1.2 \ y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}. \quad 1.3 \ y' = \frac{-15}{x^4} - \frac{1}{x^2} + 0,1.$$

$$1.4 \ y' = \frac{3}{4} - \frac{7}{4x^2}. \quad 1.5 \ y' = \frac{-4x^4 + 58x^2 - 10}{(5-x^2)^2}. \quad 1.6 \ y' = \frac{x \cos x - \sin x + 10x^3}{4x^2}.$$

$$1.7 \ y' = -16x^3 + 108x^2 - 162x - 2. \quad 1.8 \ y' = \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x^2} - 3.$$

$$1.9 \ y' = 56\sqrt[3]{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3}.$$

$$1.10 \ y' = (\cos x - 3\sin x)\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sin x + 3\cos x).$$

$$1.11 \ y' = \frac{1}{\cos^2 x} \arcsin x + (\operatorname{tg} x - 1) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.12 \ y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} \operatorname{arctg} x + \left(\sqrt[5]{x^3} - 1\right) \frac{1}{1+x^2}. \quad 1.13 \ s' = \frac{2t \sin t - t^2 \cos t - 2}{\sin^2 t}.$$

$$1.14 \ y' = -\frac{7}{(3\sin x + \cos x)^2}.$$

$$1.15 \ y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\right)(\sqrt[4]{x} + 1) - (\sqrt{x} - 2x)\frac{1}{4}x^{-3/4}}{(\sqrt[4]{x} + 1)^2}.$$

$$1.16 \ y' = \frac{x+1 - \arcsin x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(x+1)^2} + \frac{4}{x^3}. \quad 1.17 \ y' = e^x \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$1.18 \ y' = 7^x \left(\ln 7 \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} \right). \quad 1.19 \ y' = -\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{12}{x^4}.$$

$$1.20 \quad y' = \frac{1}{5^x} \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \ln 5 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \ln x \right).$$

$$1.21 \quad y' = \frac{10^x}{\operatorname{ctg}^2 x} \left(\left(\ln 10 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right) \operatorname{ctg} x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$1.22 \quad y' = \frac{e^x}{(1 + \ln x)^2} \left((\cos x - \sin x)(1 + \ln x) - \cos x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

$$1.23 \quad y' = \frac{1 - \log_5 x \cdot \ln^2 5 \cdot x}{5^x \cdot x \cdot \ln 5}.$$

$$1.24 \quad y' = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{\ln x}{1 + x^2} - \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2}.$$

$$1.25 \quad y' = \frac{7^x \cdot \ln 7 \cdot x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - (7^x + 1) \left(2x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1 + x^2} \right)}{x^4 \cdot \operatorname{arctg}^2 x}.$$

$$1.26 \quad s' = \frac{1}{\sqrt[5]{t^3}} \left(1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{5} \ln t - \frac{2}{5} \log_2 t \right). \quad 1.27 \quad y' = -\frac{2 \operatorname{arctg} x}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{8\sqrt[4]{x}}{1 + x^2}.$$

$$1.28 \quad y' = \frac{1}{20\sqrt[4]{x^3}} - 3x^2 - \frac{2}{5x^3}. \quad 1.29 \quad y' = -4x^{-5} + 9x^{-4} + 1,4x^{-3}.$$

$$1.30 \quad y' = \frac{6x^4 - x^2 + 10x - 9}{2x^4}. \quad 1.31 \quad y' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$$1.32 \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arccos x - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 1.33 \quad y' = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x.$$

$$1.34 \quad y' = \frac{x - \operatorname{arctg} x(1 + x^2)}{(1 + x^2)x^2}. \quad 1.35 \quad y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

$$1.36 \quad y' = -\frac{24}{x^5} + \frac{3}{x^2} + 9x^2 - \frac{7}{2} \sqrt{x^5}.$$

$$1.37 \quad y' = 3 + \frac{2}{x^2} + \frac{10}{3} \sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \quad 1.38 \quad y' = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$1.39 \quad y' = \frac{-x + \arcsin x - \arccos x (\sqrt{1-x^2} - 1)}{\sqrt{1-x^2} (x - \arcsin x)^2}.$$

$$1.40 \quad y' = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \arccos x - \frac{4^x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{e^x (x-1)}{x^2}.$$

$$1.41 \quad \tau' = \frac{-\sin \varphi - \cos \varphi + 2\varphi - \varphi^2}{e^\varphi}. \quad 1.42 \quad y' = \frac{2}{x} + \frac{6}{x^3}.$$

$$1.43 \quad y' = \frac{6}{\sqrt[4]{x}} - \frac{3}{2x \ln 3}. \quad 1.44 \quad y' = \frac{5x^4 + 2^x \ln 2 - x^5 - 2^x}{e^x}.$$

$$1.45 \quad y' = (-\sin x - 2^x \ln 2)(4^x + 3 \sin x) + (\cos x - 2^x)(4^x \ln 4 + 3 \cos x).$$

$$1.46 \quad y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} 6^x + (\sqrt{x} + 2) 6^x \ln 6\right) \operatorname{arctg} x (1+x^2) - (\sqrt{x} + 2) 6^x}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^2 x}.$$

$$1.47 \quad y' = \frac{x^2 (3 - x \ln 4)}{4^x}. \quad 1.48 \quad y' = 5^x \ln 5 (x^5 - 10x) + 5^x (5x^4 - 10).$$

$$1.49 \quad y' = 2\pi x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 1.50 \quad y' = \cos x \cdot \arccos x - \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.1 \quad y \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

$$2.2 \quad y' = \frac{3e^{3x}}{2 \arccos \sqrt{1-e^{3x}} \cdot \sqrt{1-e^{3x}} \cdot \sqrt{e^{3x}}}.$$

$$2.3 \quad y' = -\frac{1}{3(x^2 + 1) \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}}}. \quad 2.4 \quad y' = \frac{2x^3}{(1-x^4) \ln 3}.$$

$$2.5 \quad y' = \frac{5\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} (5x + \sqrt{x^2+1})}. \quad 2.6 \quad y' = \frac{4x}{1+x^4}.$$

$$2.7 \ y' = \frac{1}{2t(1+\ln 3t)\sqrt{\ln 3t}}. \quad 2.8 \ y' = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{3\cos^2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right).$$

$$2.9 \ y' = 2e^x \left(\ln \operatorname{ctg} 4x - \frac{8}{\sin 8x} \right) (\operatorname{ctg} 4x)^{2e^x}.$$

$$2.10 \ y' = -\frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1}. \quad 2.11 \ y' = \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}.$$

$$2.12 \ y' = \frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}. \quad 2.13 \ y' = -\frac{4e^{4x}\sqrt{\operatorname{arctg} e^{4x}}}{1+e^{8x}}.$$

$$2.14 \ y' = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{(1-2x)^{\frac{4}{5}} \cdot (1+2x)^{\frac{4}{5}} \cdot \left((1+2x)^{\frac{2}{5}} + (1-2x)^{\frac{2}{5}} \right)}.$$

$$2.15 \ y' = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}. \quad 2.16 \ y' = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad 2.17 \ y' = \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2} + 3\cos \frac{x}{2} \right)^2}.$$

$$2.18 \ y' = -\frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}}. \quad 2.19 \ y' = \frac{5}{\sin \frac{e^{2\sin 5x}}{2}} \cdot e^{2\sin 5x} \cdot \cos 5x.$$

$$2.20 \ y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}} \cdot \frac{1}{2+\ln(2x+3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\ln(2x+3)}} \cdot \frac{1}{2x+3}.$$

$$2.21 \ y' = \frac{6\operatorname{ctg} 3t}{\ln 2}.$$

$$2.22 \ y' = 5^{\ln 3 \cdot \cos^3(1-x)} \cdot \ln 5 \cdot \left(\frac{\cos^3(1-x)}{x} + 3\ln 3x \cdot \cos^2(1-x) \cdot \sin(1-x) \right).$$

$$2.23 \ y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right) x^{\arcsin x}. \quad 2.24 \ y' = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.25 \ y' = \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}. \quad 2.26 \ y' = \frac{n \cdot x^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}.$$

$$2.27 \quad y' = x(\ln x - 1) \frac{x^x}{e^x} \ln x. \quad 2.28 \quad y' = -\frac{2\sqrt{2}(x^2 + 4)}{x^4 + 16}.$$

$$2.29 \quad y' = 5^{x^3 - 3x^2 + 2x} \cdot \ln 5 \cdot (3x^2 - 6x + 2).$$

$$2.30 \quad y' = -\frac{e^{-\arcsin 2x} (\sin 3x + 2\sqrt[3]{\cos 3x})}{\sqrt[3]{\cos^2 3x} \cdot \sqrt{1 - 4x^2}}.$$

$$2.31 \quad y' = \frac{3}{2} \sqrt{x+5} \cdot \arccos^4 x - \frac{4\sqrt{(x+5)^3} \cdot \arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.32 \quad y' = \frac{\arctg^2 x^3}{(x+1)\ln 5} + \frac{6x^2 \cdot \log_5(x+1) \cdot \arctg x^3}{1+x^6}.$$

$$2.33 \quad y' = \frac{e^{\operatorname{tg} 3x} (6(3x^2 - x + 4) - \cos^2 3x(6x - 1))}{2 \cos^2 3x (3x^2 - x + 4)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$2.34 \quad y' = \frac{2}{(4x+5)\ln 3 \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x}} + \frac{\log_3(4x+5)}{4\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}.$$

$$2.35 \quad y' = 27 \operatorname{ch}^2 9x \cdot \operatorname{sh} 9x \cdot \arctg(5x-1) + \frac{5 \operatorname{ch}^3 9x}{1 + (5x-1)^2}.$$

$$2.36 \quad y' = 3 \left(\frac{x-9}{x+9} \right)^{-\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{(x+9)^2} \cdot \operatorname{tg}(3x^2 - 4x + 1) + \left(\frac{x-9}{x+9} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{6x-4}{\cos^2(3x^2 - 4x + 1)}.$$

$$2.37 \quad y' = \left(\frac{\ln \operatorname{th} 5x}{\sqrt{1-(x+1)^2}} + \arcsin(x+1) \cdot \frac{10}{\operatorname{sh} 10x} \right) (\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x+1)}.$$

$$2.38 \quad y' = \left(4 \cos 4x \cdot \ln \operatorname{arctg}(3x-3) - \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{arctg}(3x-3) \cdot (1+(3x-3)^2)} \right) \times$$

$$\times (\operatorname{arctg}(3x-3))^{\sin 4x}.$$

$$2.39 \quad y' = \frac{12 \arcsin^2 4x \cdot \operatorname{sh}(3x+1) - 3 \arcsin^3 4x \cdot \operatorname{ch}(3x+1) \cdot \sqrt{1-16x^2}}{\operatorname{sh}^2(3x+1) \cdot \sqrt{1-16x^2}}.$$

$$2.40 \quad y' = -15 \cos^4 3x \cdot \sin 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3 + \frac{12(4x+1)^2 \cdot \cos^5 3x}{\cos^2(4x+1)^3}.$$

$$2.41 \quad y' = -3 \ln 3 \cdot 3^{-x^3} \cdot x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x^5 + \frac{10x^4 \cdot 3^{-x^3}}{1+4x^{10}}.$$

$$2.42 \quad y' = \frac{6}{x \cdot \ln \ln^2 x \cdot \ln x}.$$

$$2.43 \quad y' = \left(\frac{7}{x+2} + \frac{3}{x-3} - \frac{5}{2(x+1)} \right) \frac{(x+2)^7 \cdot (x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}.$$

$$2.44 \quad y' = \left(\frac{3}{5(x+2)} - \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-3} \right) \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4 \cdot (x-3)^5}.$$

$$2.45 \quad y' = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 8x + \cos^2 4x \cdot \cos 8x}{(\sin 8x)^2}.$$

$$2.46 \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right).$$

$$2.47 \quad y' = \frac{e^{3x} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x} \cdot (1+e^{6x})}}.$$

$$2.48 \quad y' = -\frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)}{\left((\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^2 + \operatorname{sh} 2x \right) \sqrt{\operatorname{sh} 2x}}.$$

$$3.1 \quad 2x + y - 1 = 0, \quad x - 2y - 3 = 0. \quad 3.2 \quad 5x + y + 3 = 0, \quad x - 5y + 11 = 0.$$

$$3.3 \quad 2x + y - 6 = 0, \quad 2x - y + 2 = 0. \quad 3.4 \quad \alpha = 71^\circ 34'.$$

$$3.5 \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{8}{15} \right), \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}. \quad 3.6 \quad 3x - y - 1 = 0, \quad 3x - y - 2 = 0.$$

3.7 $x - y - 8 = 0$, $x - y + 8 = 0$. **3.8** $4x + y + 4 = 0$, $-2x + 8y + 15 = 0$.

3.9 $t_1 = 0$, $t_2 = 8$. **3.10** $(1, 0)$, $(-1, -4)$. **3.11** $v \approx 16,18 \text{ м/с}$.

3.12 $v = 9 \text{ м/с}$. **3.13** 8 Дж . **3.14** $\frac{dv}{dt} = \pi(4rh - r^2)$.

3.15 $x\sqrt{5} - 2y - 1 = 0$. **3.16** $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $y = x + 1$. **3.17** $x - y + 1 = 0$,

$x + y + 17 = 0$. **3.18** $3x + y + 6 = 0$. **3.19** $\varphi = \frac{\pi}{4}$. **3.20** $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$.

3.21 $M(-2, -8)$, $M(2, 8)$. **3.22** $M(3, 2)$. **3.23** $\varphi_1 = \arctg 3$,

$\varphi_2 = \arctg \frac{1}{3}$. **3.24** $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **3.25** $t = \frac{\pi}{2}$, $v = 1$, $a = 1$.

3.26 $w = 3 \text{ с}^{-1}$, $a = -3 \text{ с}^{-2}$, $t = 4 \text{ с}$. **3.27** $v = 10 \pi \text{ см/с}$. **3.28** Через 3 с .

5.1 $y''' = 60x^2 - 42$. **5.2** $\frac{16}{25}$. **5.7** $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$. **5.8** $y''' = 4 \text{sh } 2x$.

5.9 $y'' = \ln x$. **5.10** $y'' = \frac{7}{3} \cos 3x + x \cdot \sin 3x$. **5.11** $y'' = 2\sqrt{1-x^2}$.

5.12 $y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2^n} \sqrt{x}$. **5.13** $y^{(n)} = \frac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$.

5.14 $4t^3 - 4t$; $12t^2 - 4$. **5.15** $v = 4$; $a = 1$.

6.1 $y' = \frac{2xy^2 - 4x^3}{4y^3 - 2x^2y}$. **6.2** $y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2ye^y}$.

6.3 $y' = \frac{\sin y}{2 \sin 2y - x \cos y - \sin y}$. **6.4** $y' = -\frac{2x+3y}{3x+2y}$, $y'|_{(2;-1)} = -\frac{1}{4}$

6.5 $y'|_{(0;1)} = -e^{-1}$. **6.6** $y'|_{(1;1)} = \frac{2e+1}{2e}$. **6.7** $y' = \frac{-2x - ye^{-xy}}{xe^{-xy} + 2y} \Big|_{x=1; y=0} = -2$.

6.8 $y' = \frac{\cos 3x}{y^2}$. **6.9** $y' = -\frac{1}{\sin^2(x+y)}$. **6.10** $y'|_{(0;0)} = -2$.

$$6.11 \ y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}. \quad 6.12 \ y'' = -\frac{(1 + y'^2)}{y}. \quad 6.13 \ y'' = \frac{2(x + yy'^2)}{(1 - y^2)}.$$

$$6.14 \ y'' = -\frac{4y'}{y^3}. \quad 6.15 \ y'' = \frac{2yy'}{(1 - y^2)^2}.$$

$$7.1 \ y'_x = t^2 + \frac{1}{3}. \quad 7.2 \ y'_x = (\sin 2t + \cos 2t) \cos^2 t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$7.3 \ y'_x = -\frac{1}{2t} \Big|_{t=-\frac{1}{6}} = 3. \quad 7.4 \ y'_x = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3} \Big|_{t=0} = 0.$$

$$7.5 \ y'_x = \frac{\sin t}{1 + \cos t}, \ y''_{xx} = \frac{1}{(1 + \cos t)^2}. \quad 7.6 \ y'_x = 2, \ y''_{xx} = 4. \quad 7.7 \ y''_{xx} = 12.$$

$$7.8 \ y'_x = \operatorname{ctg} t. \quad 7.9 \ y'_x = \operatorname{cth} t. \quad 7.10 \ y'_x = -\frac{\cos \frac{t^3}{3+t} \cdot t^6 (9+2t)}{(3+t)^2 (1+t^2)}.$$

$$7.11 \ y'_x = 1. \quad 7.12 \ y'_x = \frac{1}{1-t}. \quad 7.13 \ y'_x = -\sin 2e^t. \quad 7.14 \ y'_x = -2 \operatorname{tg}^2 t.$$

$$7.15 \ y'_x = \frac{\ln^2 t}{\sqrt{1-t^2}}. \quad 7.16 \ y'_x = \frac{2(1 + \sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2} \cdot t}. \quad 7.17 \ y = x + 1.$$

$$7.18 \ y = -2\sqrt{2}x + 2; \ y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{4}. \quad 7.19 \ x + y - 1 = 0; \ x - y = 0.$$

$$7.20 \ x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0; \ x + y - \frac{\pi}{2} = 0. \quad 7.21 \ x + y - 2 = 0; \ x - y = 0.$$

$$8.1 \ \frac{16}{13}. \quad 8.2 \ \frac{1}{3}. \quad 8.3 \ \frac{1}{2}. \quad 8.4 \ 0. \quad 8.5 \ \frac{3}{e}. \quad 8.6 \ 0. \quad 8.7 \ \frac{1}{2}. \quad 8.8 \ 0. \quad 8.9 \ 0.$$

$$8.10 \ 1. \quad 8.11 \ 1. \quad 8.12 \ -\infty. \quad 8.13 \ 0. \quad 8.14 \ \frac{1}{4}. \quad 8.15 \ \frac{1}{2}. \quad 8.16 \ 0. \quad 8.17 \ \frac{3}{5}.$$

8.18 2. 8.19 $\frac{2}{3}$. 8.20 0,18. 8.21 1. 8.22 ∞ . 8.23 $\frac{1}{\pi}$. 8.24 0. 8.25 $-\frac{1}{2}$.
 8.26 $\frac{1}{2}$. 8.27 e^{-6} . 8.28 $\ln 2$. 8.29 1. 8.30 $-\frac{2}{3}$.

9.1 $x = -3; y = x$. 9.2 $x = \pm 2; y = x$. 9.3 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \rightarrow +\infty$;

$y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.4 $x = -3; y = 1$. 9.5 $x = 1; y = 2x$.

9.6 $x = 1; y = x + 2$. 9.7 $x = 0; y = x - 4$. 9.8 $x = 1; x = 3; y = 0$.

9.9 $x = -1; y = x$. 9.10 $x = 1; x = -1; y = x$ при $x \rightarrow +\infty$; $y = -x$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.11 $x = -2; x = 2; y = 1$. 9.12 $y = x$. 9.13 $y = x$

при $x \rightarrow +\infty$; $y = -x$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.14 $y = 2x - 2$ при $x \rightarrow +\infty$;
 $y = -2$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.15 $y = 2$. 9.16 $x = 0; y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$;

$y = 1$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.17 $y = -x$ при $x \rightarrow +\infty$; $y = -3x$ при $x \rightarrow -\infty$.

9.18 $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.19 $x = \pi(2n + 1), n \in \mathbb{Z}$. 9.20 $x = 0$.

9.21 $x = 5$. 9.22 $x = 0; y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. 9.23 $x = 0; y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$. 9.24 $x = 1$.

10.1 $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ – возр., $(1; 3)$ – убыв.

10.2 $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ – убыв., $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3}\right)$ – возр.

10.3 $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – убыв. 10.4 $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ – убыв., $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ – возр.

10.5 $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ – убыв. 10.6 $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ – возр.,

$(-1; 1) \cup (1; 3)$ – убыв. 10.7 $\left(0; \frac{16}{9}\right)$ – убыв.; $\left(\frac{16}{9}; +\infty\right)$ – возр.

10.8 $(-\infty; +\infty)$ – возр. 10.9 $\min\left(2; -\frac{17}{3}\right); \max\left(-1; \frac{10}{3}\right)$.

10.10 Функция не имеет экстремумов.

10.11 $\max(0, 8; 0, 17); \min(1; 0)$. 10.12 $\max(-2; -1, 89)$.

- 10.13** $\min(-1; -2, 5); \max(1; 2, 5)$. **10.14** $\max(-1; -2); \min(1; 2)$.
10.15 Функция не имеет экстремумов. **10.16** $\min(0; -6, 5)$.
10.17 $\max(0; 5)$. **10.18** $\min(2; -\sqrt[3]{4})$. **10.19** $\max(0; 3)$.
10.20 $\max\left(e; \frac{1}{e}\right)$. **10.21** $\max\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \sqrt{2}\right); \min\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\sqrt{2}\right)$,
 $k \in \mathbb{Z}$. **10.22** $\min\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$. **10.23** $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$ – убыв.,
 $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ – возраст.; $\min(-1; 0), \min(1; 0), \max(0; 1)$.
10.24 $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – убыв., $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ – возраст.; $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{2e}\right)$.
10.25 $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – возраст., $(-1; 1)$ – убыв.; $\max\left(-1; -1 + \frac{3\pi}{2}\right)$,
 $\min\left(1; 1 + \frac{\pi}{2}\right)$. **10.26** $(-\infty; -2) \cup (-1; 0)$ – убыв., $(-2; -1) \cup (0; +\infty)$ –
возраст.; $\min(-2; 4), \min(0; 4), \max(-1; 4, 25)$.
10.27 $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ – возраст., $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ – убыв.; $\max\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$,
 $\min(1; 0)$. **10.28** $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$ – убыв.,
 $(-\sqrt{2}; 1) \cup (1; \sqrt{2})$ – возраст.; $\min\left(-\sqrt{2}; \frac{-\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}\right), \max\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}\right)$.
11.1 $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$ – выпукла, $(-2; 0) \cup (1; +\infty)$ – вогнута,
т. п. $(-2; 19), (0; -5), (1; 43)$. **11.2** $(-\infty; 1)$ – выпукла, $(1; +\infty)$ –
вогнута, т. п. $(1; 16)$. **11.3** $(-\infty; -1)$ – выпукла, $(-1; +\infty)$ – вогнута,
т. п. $(-1; 3)$. **11.4** $(-\infty; -1)$ – вогнута, $(-1; +\infty)$ – выпукла, т. п. нет.
11.5 $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ – выпукла, $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ – вогнута,

т. п. $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0; 0), \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **11.6** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ – вогнута,
 $(0; 1)$ – выпукла, т. п. $(1; 0)$. **11.7** $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ – вогнута,
 $(-2; 0)$ – выпукла, т. п. $(-2; 0)$. **11.8** $(-\infty; 4)$ – вогнута,
 $(4; +\infty)$ – выпукла, т. п. $(4; 5)$. **11.9** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ – выпукла,
 $(-2; 2)$ – вогнута, т. п. $(-2; 3 \ln 2), (2; 3 \ln 2)$. **11.10** $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ – выпукла,
 $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$ – вогнута, т. п. $\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$. **11.11** $(-\infty; 0)$ – выпукла,
 $(0; +\infty)$ – вогнута, т. п. $(0; 0)$. **11.12** $(-\infty; -0,5 \ln 2)$ – выпукла,
 $(-0,5 \ln 2; 0) \cup (0; +\infty)$ – вогнута, т. п. $\left(-0,5 \ln 2; 2 \frac{2}{\ln 2}\right)$.
11.13 $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ – вогнута, $(2; 3)$ – выпукла,
 т. п. $(2; -19), (3; 5)$. **11.14** $(-\infty; -7)$ – вогнута, $(-7; +\infty)$ – выпукла,
 т. п. нет. **11.15** $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ – вогнута, $(-2; 0)$ – выпукла,
 т. п. $(-2; -12 \sqrt[3]{4}), (0; 0)$. **11.16** $(-\infty; -3\sqrt{3}) \cup (0; 3\sqrt{3})$ – выпукла,
 $(-3\sqrt{3}; 0) \cup (3\sqrt{3}; +\infty)$ – вогнута, т. п. $\left(-3\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{12}\right), (0; 0), \left(3\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$.
11.17 $(-\infty; -2)$ – выпукла, $(-2; +\infty)$ – вогнута, т. п. $(-2; -0,3)$.
11.18 $(-\infty; 1)$ – выпукла, $(1; +\infty)$ – вогнута, т. п. $(1; 2)$.
11.19 $(-\infty; -2)$ – вогнута, $(-2; +\infty)$ – выпукла, т. п. $(-2; 3)$.
11.20 $(-\infty; -1)$ – выпукла, $(-1; +\infty)$ – вогнута, т. п. нет.
11.21 $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ – вогнута, $(-2; 2)$ – выпукла, т. п. нет.
11.22 Кривая везде вогнута.

13.1 $f(2) = -9$ – наим. значение, $f(0) = 7$ – наиб. значение.

13.2 $f(-2) = 8$ – наиб. значение, $f(2) = -19$ – наим. значение.

13.3 $f(0) = 0$ – наим. значение, $f(1) = \frac{1}{e}$ – наиб. значение.

13.4 $y\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ – наим. значение,

$y\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ – наиб. значение. **13.5** $y_{\text{наим}} = y_{\text{min}} = 0$;

наибольшего значения функция не имеет.

13.6 $y_{\text{наиб}} = y_{\text{max}} = y(0) = 1$; наименьшего значения функция не

имеет. **13.7** $y_{\text{наим}} = y_{\text{min}} = y(0) = -1$; наибольшего значения функция

не имеет. **13.8** $f(2) = -1$ – наим. значение,

$f(0) = 3$ – наиб. значение. **13.9** $f(0) = 3$ – наиб. значение,

$f(2) = f(-2) = -13$ – наим. значение.

13.10 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$ – наим. значение, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$ – наиб. значение.

13.11 $u(-1) = 40$ – наиб. значение, $u(-4) = -41$ – наим. значение.

13.12 $p(e) = e^2$ – наиб. значение, $p(1) = 0$ – наим. значение.

13.13 $y(2) = 10$ – наиб. значение, $y(0) = -10$ – наим. значение.

13.14 $u(1) = 1$ – наиб. значение, $u(2) = 2(1 - \ln 2)$ – наим. значение.

13.15 $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ – наиб. значение, $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ – наим. значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 456 с.
- 2 **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 416 с.
- 3 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1999. – Ч. 1. – 304 с.
- 4 Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. : учеб. пособие / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 349 с.
- 5 Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. : учеб. пособие / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1. – 304 с.
- 6 **Кузнецов Л. А.** Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Производные простых функций.....	3
2 Производные сложных функций.....	7
3 Геометрические и механические приложения производной.....	12
4 Дифференциал функции.....	18
5 Производные высших порядков.....	19
6 Дифференцирование неявных функций.....	21
7 Дифференцирование функций, заданных параметрически.....	22
8 Правило Лопитала.....	25
9 Асимптоты.....	30
10 Интервалы монотонности функции. Экстремумы функции.....	34
11 Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.....	39
12 Общая схема исследования функции и построения графика.....	42
13 Наибольшее и наименьшее значения функции.....	50
14 Самостоятельные работы.....	56
15 Контрольная работа.....	64
16 Ответы.....	67
Список литературы.....	79

Учебное издание

ЩЕРБО Аркадий Митрофанович
ШАБАЛИНА Ирина Петровна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

Производная и ее приложения
Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Э в е н т о в
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а

Подписано в печать 10.10.2010 г. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,09. Тираж 1500 экз.
Зак. № . Изд. № 64.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.

246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.