УДК 519.17:6

А.П. КОТЕНКО, А.А. КОТЕНКО
Самарский государственный технический университет,
Российская Федерация

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ НА ПЕРЕВОЗКИ МЕЖДУ ГРУППАМИ ВЕРШИН ГРАФА

Предложим решение задачи возврата порожних железнодорожных цистерн к месту загрузки. Проблема возникает, когда одномоментно прибывает несогласованно большое число пустых цистерн, блокируя подъездные пути станции назначения. Таким образом, требуется согласовать движение от пунктов отправления, куда цистерны доставили содержимое на предыдущем цикле оборота. С помощью теории графов сведем задачу к транспортной задаче линейного программирования, учитывающей транспортные расходы и ограниченную пропускную способность пунктов загрузки.

На связном орграфе $G(V,R)$ с неотрицательной разметкой вершин и их упорядоченных пар $m_1 : V \to \Re^+$, $m_2 : V \times V \to \Re^+$, $V := \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$ рассмотрим двойную разметку ребер $\vec{d} := (d^1, d^2) : R \to \Re^+ \times \Re^+$, $R := \{r_1, \dots, r_{|R|}\}$.

Здесь $m_1(u)$ – запас пустых стандартных цистерн на железнодорожной станции u; $m_2(u,v)$ – число порожних цистерн, которые нужно доставить от станции u к станции v, где они будут загружены в следующем цикле грузооборота; $d^1 r$ – стоимость перевозки одной цистерны по перегону r между соседними станциями; $d^2 r$ – пропускная способность перегона за нормативное время прохождения $t(d^1 r)$. Минимизируем расходы на доставку всего груза по назначению за время $[T - \Delta T; T + \Delta T]$ сведением к транспортной задаче линейного программирования. Алгоритмом [1] по известной матрице $A := \left\| d^1 r_{v_i v_j} \right\|$; $i, j \in \overline{1,|V|}$, взвешенного соседства вершин графа $G(V,R)$ найдем матрицу $C := \left\| c_{ij} \right\|$ упорядоченных по неубыванию затрат $d^1 e_{(s)ij} := \sum_{r \in e_{(s)ij}} d^1 r$ списков $c_{ij} := \left(e_{(s)ij} \right)_{s \ge 0}$ маршрутов $e_{(s)ij} := v_i \to \dots \to v_j$ пропускной способности $d^2 e_{(s)ij} := \min_{r \in e_{(s)ij}} d^2 r$ и подходящей продолжительности $\sum_{r \in e_{(s)ij}} t(d^1 r) \in [T - \Delta T; T + \Delta T]$.

Разбив каждую вершину $v \in V$ на две вершины $v^s \in V_s$, $v^f \in V_f$, привяжем с сохранением разметок каждый исходящий маршрут матрицы C к вершине v^s, а каждый входящий маршрут к вершине v^f. Полученный полный двудольный ориентированный мультиграф $G_1\left(V_1 = V^s \cup V^f, R_1\right)$ даст транспортную задачу с долей источников V^s и долей стоков V^f:

1) $\forall i, j \in \overline{1,|V|} \Rightarrow 0 \le x_{ij} \le d^2 e_{(0)ij}$ – учет неотрицательности перевозок и ограниченной проводимости оптимальных маршрутов;

2) $\forall i \in \overline{1,|V|} \Rightarrow \sum_{j \in \overline{1,|V|}} \left(x_{ij} - x_{ji}\right) \le m_1\left(v_i^s\right)$ – ограничение запасов порожних цистерн на каждой станции;

3) $\forall i \in \overline{1,|V|} \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{|V|} x_{ij} = m_1\left(v_i^s\right) + \sum\limits_{j=1}^{|V|} m_2\left(v_i^s, v_j^f\right)$, $\sum\limits_{j=1}^{|V|} x_{ji} = m_1\left(v_i^f\right) + \sum\limits_{j=1}^{|V|} m_2\left(v_j^s, v_i^f\right)$ – условие замкнутости транспортной задачи;

4) $\forall i, j \in \overline{1,|V|} \Rightarrow \sum_{r \in e_{(s)ij}} t\left(d^1 r\right) \in \left[T - \Delta T; T + \Delta T\right]$ – условие отбора (суб)оптимальных маршрутов матрицы C, доставляющих порожние цистерны на станции назначения в нужный отрезок времени;

5) $\sum_{i,j \in \overline{1,|V|}} x_{ij} d^1 e_{(0)ij} \to \min$ – критерий оптимальности.

Здесь x_{ij} – число цистерн, отправленных от станции v_i к станции v_j по оптимальному маршруту $e_{(0)ij}$. Если все необходимые порожние цистерны доставлены по назначению за время $\left[T - \Delta T; T + \Delta T\right]$, то поставленная задача решена с использованием лишь оптимальных маршрутов. В противном случае очистим матрицу C от (суб)оптимальных маршрутов с ребрами, исчерпавшими пропускную способность. Алгоритм повторим циклически до завершения перевозки всего груза. Таким образом, задача решена при достаточной проводимости перегонов железнодорожной сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Котенко, А.П.** Матричный алгоритм Беллмана – Мура / А.П. Котенко // Управление организационно-экономическими системами: моделирование взаимодействий, принятие решений. – Самара : Самарский нац. исслед. ун-т, 2013. – Т. 10. – С.33–37.

A.P. KOTENKO, A.A. KOTENKO
Samara State Technical University

MINIMIZATION OF COSTS OF TRANSPORTATION BETWEEN UBSETS OF GRAPH VERTICES