МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра высшей математики

Е. Е. ГРИБОВСКАЯ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
С. П. НОВИКОВ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2016

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

Е. Е. ГРИБОВСКАЯ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
С. П. НОВИКОВ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета БелГУТа в качестве учебно-методического пособия по курсу «Математика»

Гомель 2016

УДК 517.987.1(075.8)
ББК 22.161.1
Г82

Р е ц е н з е н т – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики *С. А. Дудко* (УО «БелГУТ»)

Грибовская, Е. Е.

Г82 Определенный интеграл : учеб.-метод. пособие / Е. Е. Грибовская, Е. А. Задорожнюк, С. П. Новиков; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2016. – 71 с.

ISBN 978-985-554-580-5

Пособие содержит краткие теоретические сведения, описание свойств и приложений определенного интеграла, а также индивидуальные задания для расчетно-графической работы. Разобрано большое количество примеров с подробными пояснениями по указанной тематике.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 517.987.1(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 978-985-554-580-5

ВВЕДЕНИЕ

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определённый интеграл – одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей, длин дуг, объёмов, работы, скорости, пути, моментов инерции, координат центра масс и т.д. сводится к вычислению определённого интеграла.

Целью настоящего пособия является выработка у студентов прочных навыков нахождения определённых интегралов и использования их при решении различных прикладных задач. Пособие состоит из трех разделов. В первом рассмотрены определение, свойства и методы вычисления определённых интегралов. Второй раздел посвящён различным приложениям определённого интеграла. Каждый раздел содержит необходимый справочный материал, большое количество типовых задач с подробными объяснениями. В конце каждого раздела приведены задачи для самостоятельного решения, ответы на которые даны в конце пособия. Кроме того, в каждом разделе имеется большое количество вариантов для проведения контрольных и самостоятельных работ. В третьем разделе приведены индивидуальные задания для расчетно-графической работы, которые также могут быть использованы и для индивидуальных домашних заданий.

1 ПОНЯТИЕ И СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1 Определение и условия существования определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Разобьём отрезок $[a; b]$ произвольным образом на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_k)\Delta x_n,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина k-го частичного отрезка. Эта сумма называется интегральной. Пусть $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$ – максимальная длина частичных отрезков. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k, то этот предел называют определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$. При этом $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$.

Пример 1. Доказать, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{ рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x - \text{ иррациональное число} \end{cases}$$

не интегрируема на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Выберем сначала при составлении интегральных сумм точки $\xi_k \in Q$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1\ \Delta x_k = 1.$$

Затем составим интегральную сумму, в которой точки ξ_k – иррациональные числа:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Таким образом, интегральные суммы могут принимать как значение, равное 1, так и значение, равное 0. Следовательно, предел интегральных сумм не существует, т. е. функция $f(x)$ не интегрируема на отрезке [0; 1], хотя и ограничена на всей числовой оси.

Как показывает пример 1, не все функции интегрируемы на отрезке $[a; b]$. Однако, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Геометрический смысл определённого интеграла (рисунок 1.1) от непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ состоит в том, что он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a,\ \ x = b,\ \ x = 0$:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

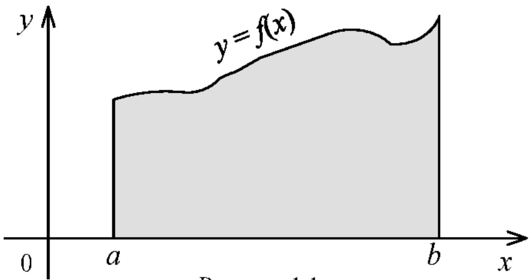


Рисунок 1.1

Замечание 1. Определённый интеграл не зависит от переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz...$

Замечание 2. Если $a < b$, то положим $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. Если $a = b$, то будем считать $\int_a^a f(x)dx = 0.$

1.2 Свойства определённого интеграла

1 Если $f(x)=1,$ то $\int_a^b dx = b - a.$

2 Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$ где $c \in \mathrm{R}$.

3 Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций равен алгебраической сумме определённых интегралов слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x)dx \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm .. \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

4 Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ и , $c \in (a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5 Если интегрируемые на $[a;b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$.

6 Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$.

7 *Теорема о среднем*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi)$$.

При этом число $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

8 *Формула Ньютона – Лейбница.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Число $F(b)-F(a)$ удобно обозначать $F(x)\Big|_a^b$. Тогда формула Ньютона – Лейбница принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Пример 2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

Пример 3. $\int\limits_0^1 (2x^2+3)dx = \left(\dfrac{2x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\dfrac{2}{3}+3\right) - 0 = \dfrac{11}{3}.$

Пример 4. $\int\limits_1^6 \dfrac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^6 = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6.$

9 *Замена переменной (подстановка) в определённом интеграле*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$, причём $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Пример 5. $\int\limits_0^9 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l}\text{Сделаем замену } \sqrt{x}=t. \text{ Тогда } x=t^2, \\ dx=2tdt; \text{ при } x=0\ t=0; \text{ при } x=9\ t=3\end{array}\right] =$

$$=\int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = \int_0^3 \frac{(2t+2)-2}{1+t}dt = \int_0^3 2dt - \int_0^3 \frac{2}{1+t}dt =$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Сделаем во втором интеграле замену } 1+t=y. \text{Тогда } t=y-1,\ dt=dy. \\ \text{Если } t=0, \text{ то } y=1. \text{ Если } t=3, \text{ то } y=4.\end{array}\right]=$$

$$=2t\Big|_0^3 - \int_1^4 \frac{2dy}{y} = 2\cdot 3 - 2\cdot 0 - 2\ln|y|\Big|_1^4 = 6 - 2\ln 4.$$

Пример 6. $$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \left[\begin{array}{l}\sin x = t. \text{ Тогда } dt = d(\sin x) = \cos x dx \\ \text{Если } x=\frac{\pi}{6}, \text{ то } t=\frac{1}{2}. \text{ Если } x=\frac{\pi}{3}, \text{ то } t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}} + \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

В примере 6 нам было удобнее не находить $x=\arcsin t$ и $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, а заметить, что $\cos x dx = d(\sin x) = dt.$ При вычислении определённого интеграла можно использовать приём “подведения” функции под знак дифференциала, как и при нахождении неопределённого интеграла. При этом не требуется заменять пределы интегрирования. Так, например, интеграл из примера 6 можно найти следующим образом:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^{-3} x d(\sin x) = \frac{\sin^{-2} x}{-2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{1}{2\sin^2 x}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

10 *Интегрирование по частям в определённом интеграле*. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на отрезке $[a;\, b]$ функции. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 7. $$\int_0^\pi x\sin x dx = \left[\begin{array}{l} u=x,\ \sin x dx = dv \\ du = dx, v=-\cos x\end{array}\right] = -x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx =$$

$$=-\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

Пример 8.

$$\int_0^{\pi/4}\frac{xdx}{\cos^2 x}=\begin{bmatrix} u=x, & dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ du=dx, & v=\operatorname{tg} x\end{bmatrix}=x\operatorname{tg}x\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}xdx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-0\cdot\operatorname{tg}0-\int_0^{\pi/4}\frac{\sin xdx}{\cos x}=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi/4}\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

З а д а ч и

Вычислить определённые интегралы по формуле Ньютона – Лейбница:

1.2.1 $\int_1^2 (x^2+2x-3)dx.$

1.2.2 $\int_0^{\pi/2}(2\sin x-\cos x)dx.$

1.2.3 $\int_0^1\frac{dx}{x^2-4}.$

1.2.4 $\int_0^4(1+e^{x/4})dx.$

1.2.5 $\int_{-1}^7\frac{dt}{\sqrt{3t+4}}.$

1.2.6 $\int_1^2\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+2}}.$

Вычислить интегралы подстановкой:

1.2.7 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ (замена $e^x=t$).

1.2.8 $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$ (замена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$).

Вычислить интегралы по частям:

1.2.9 $\int_0^3 (x-3)\sin 2xdx.$

1.2.10 $\int_2^4 \ln xdx.$

Самостоятельная работа № 1

Вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int_0^1\frac{dx}{(2x-3)^3}$.
2. $\int_4^9\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

Вариант 2

1. $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$.

4. $\int_0^{\pi/2} (3x+2)\cos x dx$.

5. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

3. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$.

4. $\int_0^{\pi/6} (x+5)\sin 3x dx$.

5. $\int_1^2 \frac{3x-3}{x^3+1} dx$.

Вариант 3

1. $\int_0^{1/2} x\sqrt{1-x^2} dx$.

2. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x dx$.

4. $\int_0^1 xe^{-x} dx$.

5. $\int_2^3 \frac{2x^2+3x-2}{x^3-x} dx.$

Вариант 4

1. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

3. $\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin x}$.

4. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

5. $\int_0^1 \frac{12-6x}{x^3+8} dx$.

Вариант 5

1. $\int_{\pi/3}^{\pi/6} \operatorname{tg} x dx$.

2. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

3. $\int_0^{\pi/6} \sin^2 3x dx$.

4. $\int_1^2 x\log_2 x dx$.

5. $\int_0^1 \frac{1-2x}{(x+2)(x^2+1)} dx$.

Вариант 6

1. $\int_0^1 \cos(1-2x) dx$.

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

3. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$.

4. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

5. $\int_0^1 \frac{2x-6}{(x^2+3)(x+1)} dx$.

Вариант 7

1. $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

2. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\cos^3 x\,dx$.

4. $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

5. $\int_3^4 \frac{5x+2}{(x-2)(x^2+x)}dx$.

Вариант 8

1. $\int_0^1 e^x \sin e^x\,dx$.

2. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\cos^4 x\,dx$.

4. $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx$.

5. $\int_3^4 \frac{2-2x}{(x+1)(x^2-2x)}dx$.

Вариант 9

1. $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx$.

2. $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

3. $\int_0^1 (x+3)e^{-2x}\,dx$.

4. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$.

5. $\int_2^3 \frac{3-7x}{(x+3)(x^2-x)}dx$.

Вариант 10

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{ctg}\,x\,dx$.

2. $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$.

3. $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$.

4. $\int_0^{\pi/6} \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

5. $\int_1^2 \frac{7x+4}{(x+4)(x^2+x)}\,dx$.

1.3 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций.

Рассмотрим интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;+\infty)$. Тогда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если вышеуказанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся. Если же предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся. Геометрически сходимость несобственного интеграла первого рода при $f(x)>0$ означает, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и осью Ox, – конечное число (рисунок 1.2).

Аналогично определяются несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части последнего равенства.

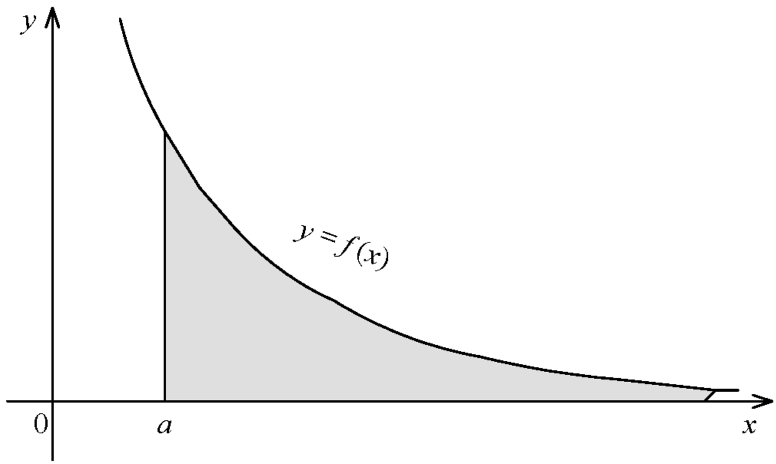


Рисунок 1.2

Пример 9. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

Решение. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_0^{a}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_0^{a}\operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x)=$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Bigg|_0^a=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 a-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 0\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0=\frac{\pi^2}{8}.$$

Пример 10. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_a^0+$

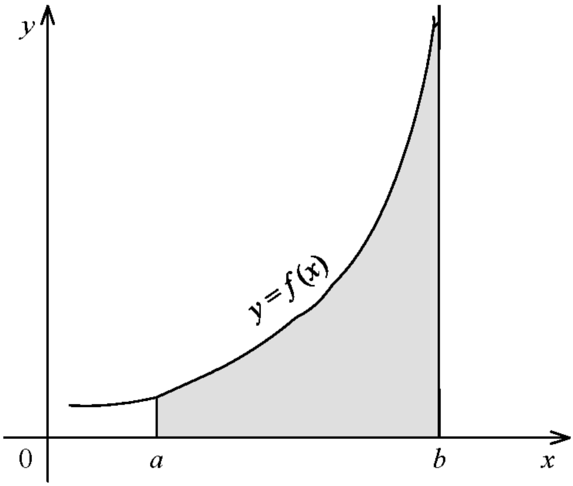
$$+\lim_{b\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^b=\left[(0-\infty)+(\infty-0)\right].$$

Исходный интеграл расходится, т.к. расходится $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{x^2+1}$ ($\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$ также расходится).

Рассмотрим теперь несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале $[a;\,b)$, а в точке $x=b$ имеет бесконечный разрыв, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx.$$

Если вышеуказанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, если же предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся. Геометрически несобственный интеграл в случае $f(x)>0$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $y=0$ и



вертикальной асимптотой $x=b$ (рисунок 1.3).

Рисунок 1.3

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b]$ и в точке $x=a$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c\in(a;b)$ и непрерывна на интервалах $[a;c)$ и $(c;b]$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{l\to c-0}\int_a^l f(x)dx+\lim_{d\to c+0}\int_d^b f(x)dx.$$

Вышеуказанный интеграл называется сходящимся, если оба упомянутых выше предела существуют и конечны.

Пример 11. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

Решение. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{c\to 1+0}\int_c^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{c\to 1+0}\left.\frac{\ln^{-2} x}{-2}\right|_c^e = \lim_{c\to 1+0}\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}+\frac{1}{2\ln^2 c}\right) =$

$= \left[-\frac{1}{2}+\infty\right] = +\infty,$ т.е. интеграл расходится.

З а д а ч и

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1.4.1 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

1.4.2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

1.4.3 $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

1.4.4 $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$.

1.4.5 $\int_0^{2,5}\frac{dx}{x^2-5x+6}$.

Самостоятельная работа № 2

Каждый вариант состоит из 7 примеров. Необходимо: в примерах 1–6 вычислить определённые интегралы с точностью до двух знаков после запятой; в примере 7 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Вариант 1

1. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

2. $\int_2^3 y\ln(y-1)\,dy.$

3. $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx.$

4. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx.$

Вариант 2

1. $\int_0^{12\sqrt{3}}\frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}.$

2. $\int_{-2}^0 x^2e^{-x/2}dx.$

3. $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx.$

4. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}.$

5. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{2x^2+3x-2}.$

6. $\int\limits_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$

Вариант 3

1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{x^2+1}.$

2. $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos xdx.$

3. $\int\limits_{3}^{4}\frac{x+2}{x^2(x-2)}dx.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin^3 2xdx.$

5. $\int\limits_{-5}^{-2}\frac{dx}{x^2+4x-21}.$

6. $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$;

б) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{e^3+\frac{1}{x}}{x^2}dx.$

Вариант 5

5. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}.$

6. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$

7. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{16xdx}{16x^4-1}$;

б) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}.$

Вариант 4

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^2 xdx.$

2. $\int\limits_{0}^{\pi}x^2\sin xdx.$

3. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x^2(x-1)}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi}\sin^4\frac{x}{2}dx.$

5. $\int\limits_{1}^{\sqrt{5}}\frac{x^2dx}{13-6x^2+x^6}.$

6. $\int\limits_{3}^{8}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

7. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$;

б) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$

Вариант 6

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx.$

2. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx.$

3. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5 dy}{y+2}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx.$

5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}.$

6. $\int\limits_{3}^{8} \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}.$

7. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}};$

б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1) dx}{3x-1}.$

1. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}.$

2. $\int\limits_{1}^{2} (y-1) \ln y dy.$

3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 x dx.$

5. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

6. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}};$

б) $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}.$

Вариант 7

1. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

2. $\int\limits_{-1/2}^{0} x e^{-2x} dx.$

3. $\int\limits_{1/3}^{1/2} \frac{x dx}{(x-1)^3}.$

4. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx.$

5. $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$

Вариант 8

1. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}.$

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$

3. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/4} 2 \cos x \sin 3x dx.$

5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t^2+5t+4}.$

6. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x-1}.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}};$

б) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\ln 2dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$

Вариант 9

1. $\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx.$

2. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3}\frac{x}{e^{3x}}dx.$

3. $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx.$

5. $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{x^2+3x+2}.$

6. $\int\limits_{0}^{5}\frac{xdx}{\sqrt{x+4}}.$

7. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\pi\left(x^4+4x+5\right)};$

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1-x^4}.$

Вариант 11

1. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos^2 x}.$

6. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx.$

7. а) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}};$

б) $\int\limits_{0}^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx.$

Вариант 10

1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{z^3}{z^8+1}dz.$

2. $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x^2}dx.$

3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/32}\left(32\cos^2 4x-16\right)dx.$

5. $\int\limits_{1}^{2}\frac{x-5}{x^2-2x+2}dx.$

6. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

7. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5};$

б) $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx.$

Вариант 12

1. $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

2. $\int\limits_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx.$

3. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x+1}.$

5. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5}.$

6. $\int\limits_{2/3}^{7/3}\frac{x dx}{\sqrt{2+3x}}.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}dx;$

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

Вариант 13

1. $\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{4+5x^4}dx.$

2. $\int\limits_{0}^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx.$

3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx.$

5. $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2 dx}{(1+x)^4}.$

2. $\int\limits_{0}^{1}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx.$

3. $\int\limits_{3}^{5}\frac{\left(x^2+2\right)dx}{(x+1)^2(x-1)}.$

4. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\operatorname{tg}^4\varphi d\varphi.$

5. $\int\limits_{6}^{8}\frac{dx}{x^2+2x}.$

6. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

7. а) $\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{16dx}{\pi\left(4x^2+4x+5\right)};$

б) $\int\limits_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$

Вариант 14

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx.$

2. $\int\limits_{0}^{\pi/8}x^2\sin 4x dx.$

3. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin 3x\cos 5x dx.$

5. $\int\limits_{-1/2}^{0}\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

6. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

7. а) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{xdx}{4x^2+4x+5}$;

б) $\displaystyle\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

7. а) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$;

б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

Вариант 15

1. $\displaystyle\int_1^2\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.
2. $\displaystyle\int_1^2 y^2\ln y\,dy$.
3. $\displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{x^2+3x+2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.
5. $\displaystyle\int_{3/4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln 2}\frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$.
7. а) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}dx$;

б) $\displaystyle\int_0^1\frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$.

Вариант 16

1. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$.
3. $\displaystyle\int_8^{10}\frac{(x^2+3)\,dx}{x^3-x^2-6x}$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x}$.
5. $\displaystyle\int_{1/6}^{2}\frac{dx}{3x^2-x+1}$.
6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{7}}\frac{z^2dz}{\sqrt{9+z^3}}$.
7. а) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$;

б) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

Вариант 17

1. $\displaystyle\int_0^1 3\left(x^2+x^2e^{x^3}\right)dx$.
2. $\displaystyle\int_{3/2}^{2}\operatorname{arctg}(2x-3)\,dx$.

Вариант 18

1. $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(x+3)\sin x\,dx$.

3. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

4. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{ctg}^3\, x dx$.

5. $\int\limits_3^4 \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 10}$.

6. $\int\limits_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1 + 3x}}$.

7. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{4dx}{x\left(1 + \ln^2 x\right)}$;

б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

3. $\int\limits_2^3 \frac{x^7 dx}{1 - x^4}$.

4. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \cos 5x dx$.

5. $\int\limits_{3,5}^5 \frac{x dx}{x^2 - 7x + 13}$.

6. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{(x + 1)^3}}$.

7. а) $\int\limits_0^{\infty} x \sin x dx$;

б) $\int\limits_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x + 3}}$.

Вариант 19

1. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$.

2. $\int\limits_1^e x \ln^2 x dx$.

3. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1}$.

4. $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx$.

5. $\int\limits_2^3 \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx$.

6. $\int\limits_{\ln 3}^0 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$.

7. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{\left(x^2 - 4x\right) \ln 5}$;

Вариант 20

1. $\int\limits_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$.

2. $\int\limits_{-3}^0 (x - 2)\, e^{-x/3} dx$.

3. $\int\limits_{-1}^0 \frac{x dx}{x^3 - 1}$.

4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$.

5. $\int\limits_{-3/2}^2 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 3x + 4} dx$.

6. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos y dy}{4 + \sqrt{\sin y}}$.

7. а) $\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{\left(1 + 9x^2\right) \mathrm{arctg}^2\, 3x}$;

б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}\ln 2}.$

б) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{9x^2-9x+2}.$

Вариант 21

1. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

2. $\int\limits_{0}^{\pi/9}\frac{xdx}{\cos^2 3x}.$

3. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/3}\frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1}dx.$

4. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx.$

5. $\int\limits_{4}^{5}\frac{xdx}{x^4-4x^2+3}.$

6. $\int\limits_{2}^{5}\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$

7. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{\pi\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}}};$

б) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{3\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}.$

Вариант 22

1. $\int\limits_{3}^{8}\sqrt{x+1}dx.$

2. $\int\limits_{1/2}^{1}\arcsin(1-x)\,dx.$

3. $\int\limits_{4}^{5}\frac{dx}{x^2(x-1)}.$

4. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{\sin 2x}dx.$

5. $\int\limits_{-1/2}^{1}\frac{x^3}{x^2+x+1}dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$

7. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x\right)\ln 3};$

б) $\int\limits_{0}^{3}\frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$

Вариант 23

1. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\sin\alpha\cos^3\alpha d\alpha.$

2. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx.$

3. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+4\right)}.$

Вариант 24

1. $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6}12\,\mathrm{ctg}\,3xdx.$

2. $\int\limits_{-1}^{0}x\ln(1-x)\,dx.$

3. $\int\limits_{7}^{9}\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx.$

4. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx.$

5. $\int\limits_{7}^{10} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}.$

6. $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x} x dx;$

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1 - x^5}}.$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx.$

5. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{8x - x^2 - 15}}.$

6. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

7. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx;$

б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$

Вариант 25

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x}}.$

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2 - x}} dx.$

3. $\int\limits_{4}^{5} \frac{x dx}{x^3 - 6x^2 + x - 6}.$

4. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

6. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)}.$

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1};$

б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}}.$

Вариант 26

1. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

2. $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2) dx.$

3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3 + 1}.$

4. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$

5. $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}.$

6. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx.$

7. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$

б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}.$

Вариант 27

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx.$

2. $\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx.$

3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx.$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx.$

5. $\int_4^7 \frac{dx}{x^2+3x-10}.$

6. $\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3dx}{(x^2+1)^{2/3}}.$

7. а) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2};$

б) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$

Вариант 28

1. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}.$

2. $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx.$

3. $\int_2^3 \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx.$

4. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x\sin^4 x dx.$

5. $\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$

6. $\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx.$

7. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}};$

б) $\int_0^4 \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}.$

Вариант 29

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\alpha\sin^3\alpha d\alpha.$

2. $\int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x dx.$

3. $\int_3^5 \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx.$

4. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Вариант 30

1. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}.$

2. $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\, x dx.$

3. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}.$

4. $\int_0^{\pi} \sin^4\frac{x}{2}dx.$

5. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

6. $\int_{\ln 5}^{\ln 12}\frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

7. а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$;

б) $\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

5. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+3}$.

6. $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

7. а) $\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$;

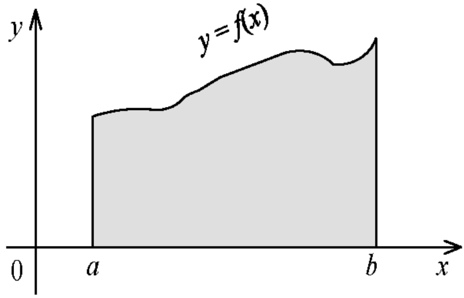
б) $\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$.

2 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1 Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

Из геометрического смысла определённого интеграла следует, что если $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a; x=b; y=0,$ может быть вычислена по формуле

$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx,$$



причём $S\geq 0$ (рисунок 2.1).

Рисунок 2.1

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a;\ x=b$ и кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, где $f(x)\geq g(x)\ \ \forall x\in[a;b]$ (рисунок 2.2), то можно воспользоваться формулой

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

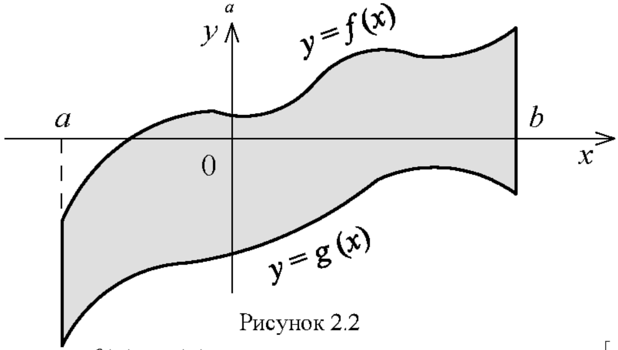


Рисунок 2.2

Если же разность $f(x)-g(x)$ не сохраняет знак на отрезке $[a;b]$, этот отрезок разбивают на частичные отрезки, на каждом из которых функция $f(x)-g(x)$ сохраняет знак. Например, для случая, изображённого на рисунке 2.3, площадь заштрихованной фигуры

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx+\int_b^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^d (g(x)-f(x))dx.$$

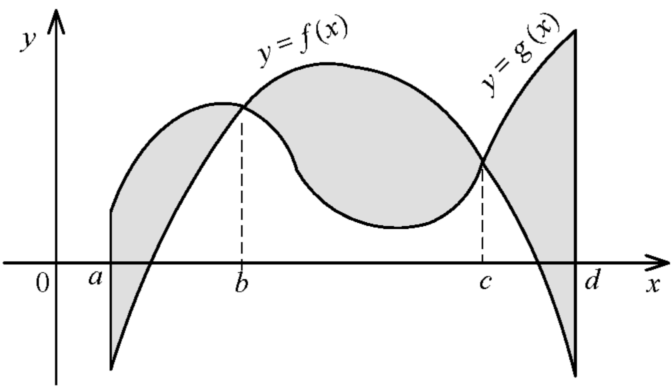


Рисунок 2.3

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной косинусоидой $y = \cos x$ и осью $Ox,$ при условии $0 \le x \le \pi$ (рисунок 2.4).

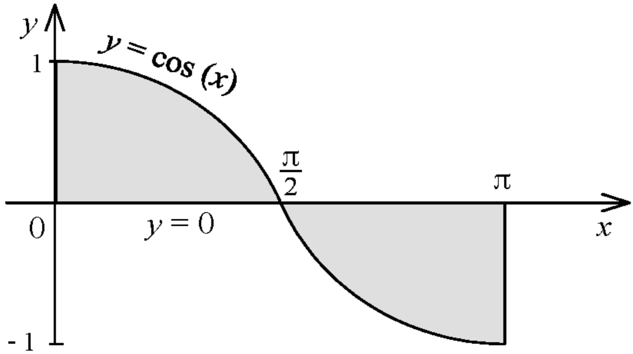


Рисунок 2.4

Решение. Так как $\cos x \ge 0 \quad \forall x \in [0; \pi/2]$ и $\cos x \le 0 \quad \forall x \in [\pi/2; \pi]$, то

$$S = \int_0^{\pi/2} (\cos x - 0) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (0 - \cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$

Если требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, где $\varphi_1(y) \ge \varphi_2(y) \quad \forall y \in [c; d]$ (рисунок 2.5), то можно воспользоваться формулой

$$S = \int_c^d (\varphi_1(y) - \varphi_2(y)) dy.$$

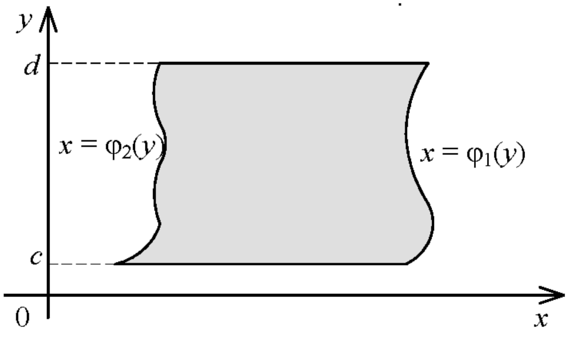


Рисунок 2.5

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x$, $y=x-4$ (рисунок 2.6).

Решение. Найдём точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y^2=2x; \\ y=x-4. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-8x+16=2x; \\ y=x-4. \end{cases} \quad \begin{cases} (x-8)(x-2)=0; \\ y=x-4. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=8; \\ y=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2; \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Площадь заштрихованной фигуры можно найти как сумму площадей двух фигур

$$S=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\left(-\sqrt{2x}\right)\right)dx+\int_2^8\left(\sqrt{2x}-(x-4)\right)dx.$$

Однако площадь в данном случае удобно вычислять, считая x функцией от y (если $y=x-4$, то $x=y+4$, а если $y^2=2x$, то $x=\dfrac{y^2}{2}$):

$$S=\int_{-2}^{4}\left((y+4)-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left.\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\right|_{-2}^{4}=8+16-\frac{32}{3}-2+8-\frac{4}{3}=18.$$

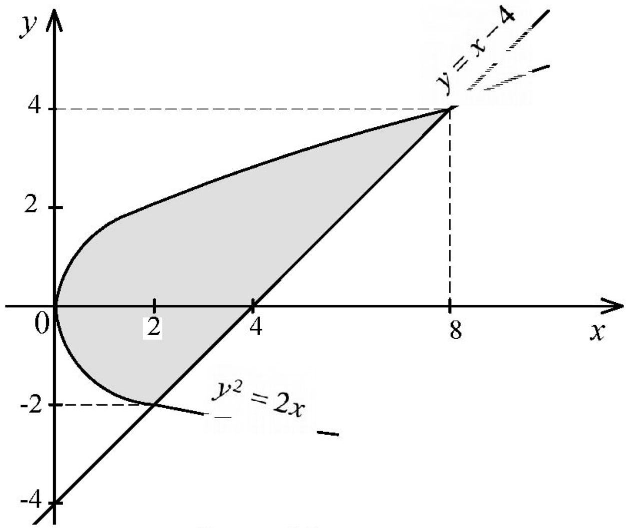


Рисунок 2.6

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, заключенную между параболой $y = x^2$, касательной к ней в точке $M(1;1)$ и осью ординат. Сделать чертеж.

Решение. Найдем уравнение касательной к параболе. Известно, что уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ – точка касания. Так как $y' = 2x,\ y'(1) = 2,$ то уравнение касательной имеет вид $y - 1 = 2(x - 1)$ или $y = 2x - 1$.

Построим параболу и касательную (рисунок 2.7). Найдем площадь криволинейной фигуры (она заштрихована на чертеже). Воспользуемся формулой $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, где $g(x) = 2x - 1,\ f(x) = x^2$.

$$S = \int_0^1 (x^2 - (2x - 1))dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}$$ (ед. кв.).

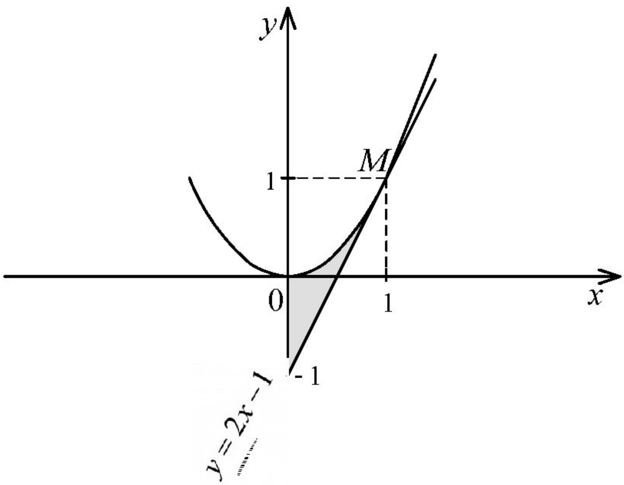


Рисунок 2.7

2.2 Вычисление площадей плоских фигур, заданных в параметрическом виде

Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, осью Ox и прямыми $x = a,\ x = b$, причём $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, то её площадь S при $y(t) \ge 0\ \ \forall t \in [t_1; t_2]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \ge 2)$ (рисунок 2.8).

Решение. Найдем значения параметра t, при которых пересекаются эллипс и прямая:

$\begin{cases} y = 4\sin t, \\ y = 2. \end{cases}$ $4\sin t = 2, \sin t = \dfrac{1}{2}, t_1 = \dfrac{5\pi}{6}, t_2 = \dfrac{\pi}{6}$. Искомая площадь равна

$$S = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (4\sin t - 2)(3\cos t)'dt = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (4\sin t - 2)(-3\sin t)dt = -\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (12\sin^2 t - 6\sin t)dt =$$

$$= -12\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt + 6\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt = -6\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - 6\cos t\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = -6\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3}\right) -$$

$$-6\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{6}\right) = -6\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

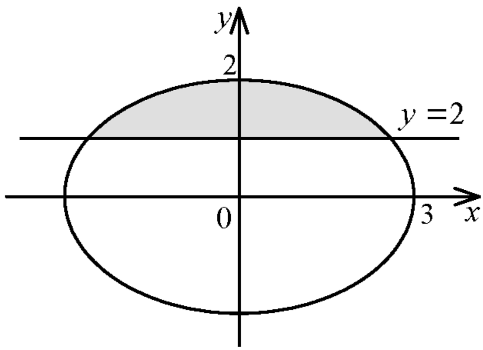


Рисунок 2.8

З а д а ч и

2.1.1 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x,\ \ y = 3x.$

2.1.2 Найти площадь фигуры, ограниченной равнобокой гиперболой $xy = a^2$, осью Ox и прямыми $x = a, x = 2a.$

2.1.3 Найти площадь фигуры, заключённой между кривой $y = 4 - x^2$ и осью $Ox.$

2.1.4 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$

2.1.5 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3,$ прямой $y = 8$ и осью $Oy.$

2.1.6 Найти площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

2.1.7 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3; y = 2x; y = x.$

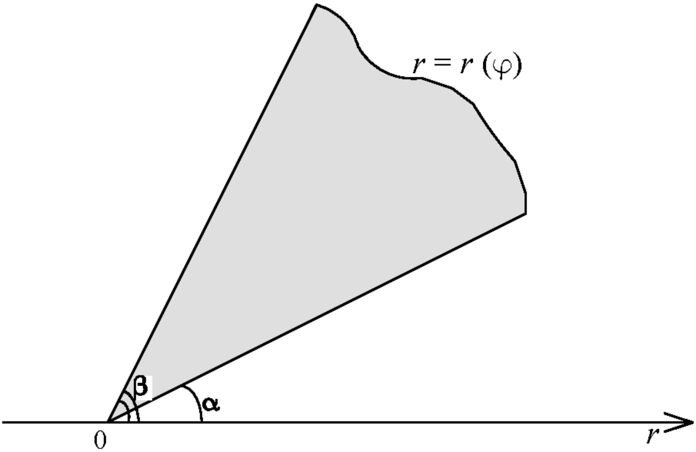
2.1.8 Найти площадь области, заключённой между параболами $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py.$

2.1.9 Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

2.1.10 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t,$ $y = a\sin^3 t$.

2.3 Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией l, заданной в полярной системе координат $\{0, r, \varphi\}$ уравнением $r = r(\varphi)$ и



лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ (рисунок 2.9).

Рисунок 2.9

В этом случае можно воспользоваться формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$ (рисунок 2.10).

Решение. Ввиду симметричности кардиоиды относительно полярной оси ее площадь равна

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\cdot\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = a^2\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

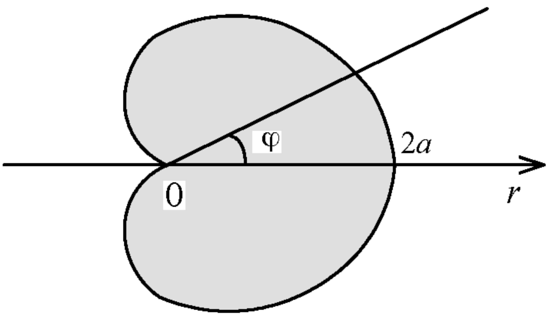


Рисунок 2.10

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $r = 3\sqrt{2}\, a\cos\varphi$ и $r = 3a\sin\varphi$.

Решение. Очевидно, что окружности пересекаются в точке O – полюсе. Найдём ещё одну точку пересечения окружностей:

$$\begin{cases} r = 3\sqrt{2}a\cos\varphi \\ r = 3a\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2};\ \ \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{2};\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \ r = a\sqrt{6}.$$

Итак, $A(\operatorname{arctg}\sqrt{2};\ a\sqrt{6})$. Построим окружности (рисунок 2.11).

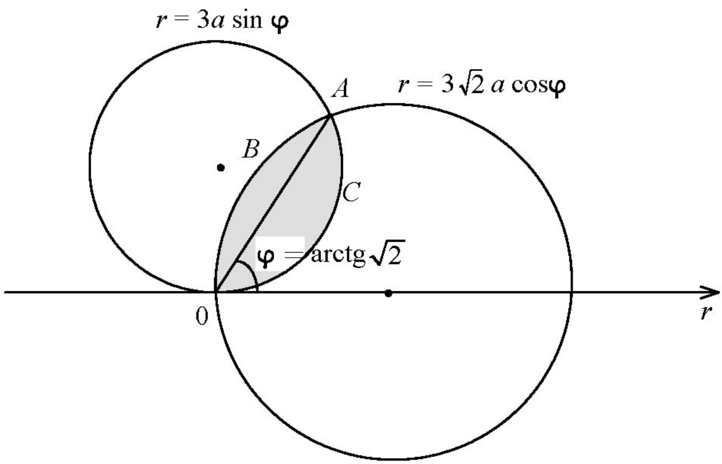


Рисунок 2.11

Искомая площадь S равна сумме площадей криволинейных секторов OAC и OAB:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} (3a\sin\varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sqrt{2}a\cos\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{9}{4}a^2 \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} (1-\cos 2\varphi)d\varphi +$$

$$+\frac{9}{2}a^2 \int\limits_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{9}{4}a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} + \frac{9a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\pi/2} =$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{если } \varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \text{ то } \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2};\ \cos\varphi=1/\sqrt{3};\ \sin\varphi=\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}};\\ \sin 2\varphi=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{9}{4}a^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{9}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{9}{4}a^2(\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\sqrt{2}).$$

З а д а ч и

2.2.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$

2.2.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной петлей кривой $r=a\sin 2\varphi$ (четырёхлепестковая роза).

2.2.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\cos\varphi.$

2.2.4 Вычислить площадь области, ограниченной кривой $r=\cos 3\varphi.$

2.2.5 Вычислить площадь, описываемую полярным радиусом спирали Архимеда $r=a\varphi$ при одном его обороте, если началу движения соответствует $\varphi=0.$

2.4 Вычисление длины дуги кривой

а) Если функция $y=f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную, то длина дуги графика этой функции, заключённой между точками $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$, вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Пример 6. Вычислить длину окружности $x^2+y^2=R^2.$

Решение. Найдём сначала длину четвёртой части окружности, лежащей в первом квадранте. Уравнение дуги этой окружности, лежащей в первом квадранте, имеет вид $y=\sqrt{R^2-x^2},\ 0\le x\le R.$ Отсюда $y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$ Следовательно,

$$\frac{1}{4}l=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=\int_0^R\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=R\cdot\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi R}{2}.$$

Итак, длина всей окружности $l=2\pi R.$

б) В случае, когда плоская кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1;\, t_2]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – функции с непрерывными производными и $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_1;\, t_2]$, длина дуги такой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

***Пример** 7.* Вычислить длину дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (рисунок 2.12).

Решение. $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a\sin t)^2}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = a\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

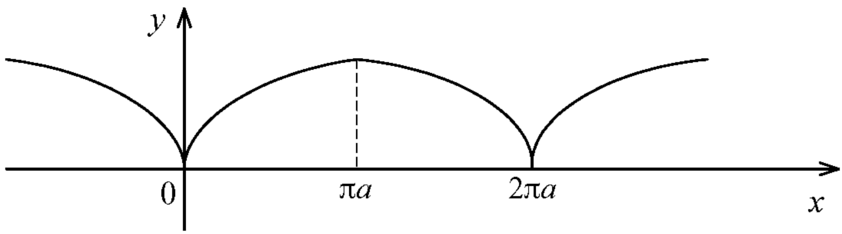


Рисунок 2.12

в) Если же кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\, \beta]$ и $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha;\, \beta]$, то длина дуги этой кривой может быть вычислена по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

***Пример 8**.* Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ (рисунок 2.13).

Решение. Ввиду симметрии кардиоиды относительно полярной оси

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

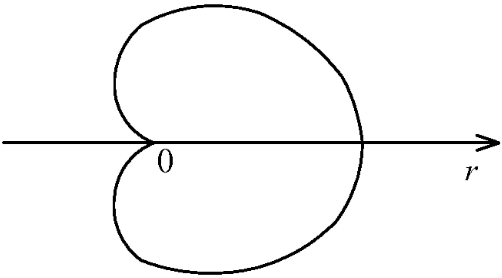


Рисунок 2.13

З а д а ч и

2.3.1 Найти всю длину астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

2.3.2 Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2=x^3$ от начала координат до точки $\left(5a;\,5a\sqrt{5}\right)$.

2.3.3 Найти всю длину кривой $r=a\sin^3(\varphi/3)$.

2.3.4 Вычислить длину кривой $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

2.3.5 Найти длину спирали $r=e^{\alpha\varphi}$ от полюса до точки $(\varphi_0;\rho)$.

2.5 Вычисление объёмов тел

а) Объём тела, заключённого между двумя плоскостями $x=a$ и $x=b$, в случае, если площадь сечения, проведенного перпендикулярно к оси OX, есть известная функция от x: $S=S(x)$ $\forall x\in[a;b]$ (рисунок 2.14) вычисляется по формуле

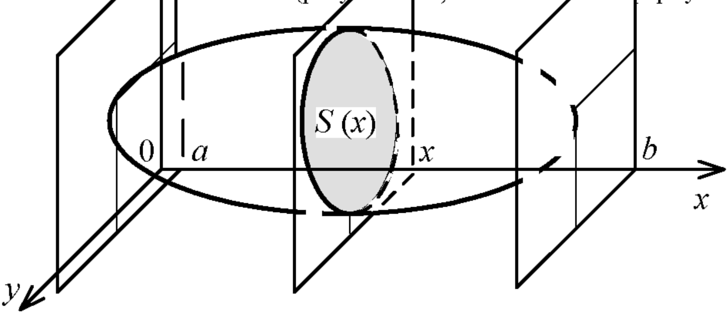


Рисунок 2.14

Пример 9. Вычислить объём сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Пересечём сферу плоскостью $x=h,$ где $h\in[-R;R]$. В сечении получим круг $\begin{cases} x=h; \\ y^2+z^2=R^2-h^2. \end{cases}$ Площадь такого круга равна $\pi\left(R^2-h^2\right)$. Искомый объём сферы

$$V=\int\limits_{-R}^{R}\pi\left(R^2-h^2\right)dh=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

б) Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a,\ x=b,\ y=0$ (рисунок 2.15), то в сечениях тела плоскостями $x=h$ будут получаться круги, и объём такого тела можно вычислить по формуле

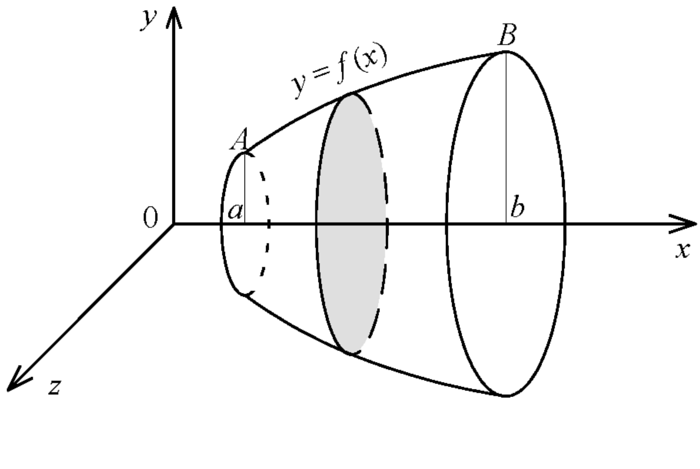


Рисунок 2.15

Пример 10. Вычислить объём тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

Решение. Ввиду симметричности тела относительно плоскости yOz искомый объём

$$V=2\int_0^a \pi y^2 dx=2\int_0^a \pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot b^2 dx=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Пример 11. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=e^x\ (x<0)$ (рисунок 2.16).

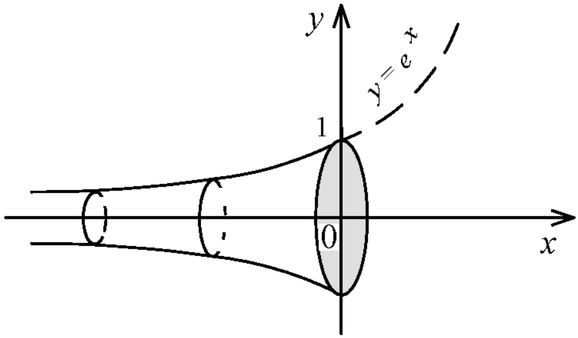


Рисунок 2.16

Решение. Тело бесконечно вытянуто вдоль оси Ox. Поэтому при нахождении его объёма используем несобственный интеграл:

$$V=\pi\int_{-\infty}^0 (e^x)^2 dx=\lim_{a\to-\infty}\pi\int_a^0 e^{2x}d(2x)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\lim_{a\to-\infty}e^{2x}\Bigg|_a^0=\frac{\pi}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(e^0-e^{2a}\right)=\frac{\pi}{2}(1-0)=\frac{\pi}{2}.$$

в) Если кривая $y=f(x)$, $x\in[a;b]$ задана в параметрическом виде $x=x(t);\ y=y(t),\ t\in[t_1;t_2],$ причём $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то объем тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции определятся равенством

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt.$$

г) Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рисунок 2.17), то его объём вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 \, dy.$$

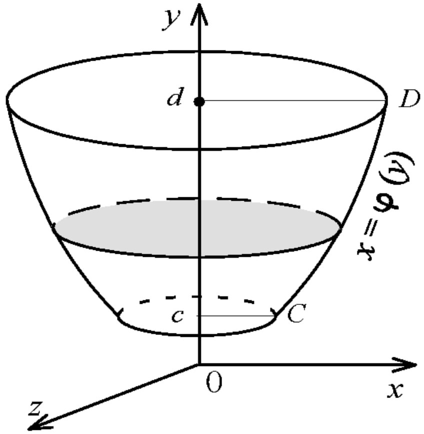


Рисунок 2.17

д) Если криволинейный сектор, образованный кривой $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

З а д а ч и

2.4.1 Вычислить объём пирамиды площадью основания S и высотой H.

2.4.2 Отрезок прямой, соединяющей начало координат с точкой $(a; b)$, вращается вокруг оси Oy. Найти объём полученного конуса.

2.4.3 Найти объём тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \ (b \geq a)$ вокруг оси Ox.

2.4.4 Фигура, ограниченная линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$, вращается вокруг оси Ox. Найти объём тела вращения.

2.4.5 Фигура, ограниченная одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью $Ox,$ вращается вокруг оси $Ox.$ Найти объём тела вращения.

2.6 Вычисление площади поверхности тела вращения

а) Пусть нам дана поверхность, образованная вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $Ox,$ и функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную. Тогда площадь этой поверхности на участке $a\le x\le b$ можно вычислить по формуле

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

б) Если кривая $y=f(x)$, $x\in[a;b],$ задана в параметрическом виде $x=x(t);\ y=y(t),\ t\in[t_1;t_2],$ причём $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то площадь поверхности тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции определятся равенством

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

в) Если криволинейный сектор, образованный кривой $r=r(\varphi),\ \ \varphi\in[\alpha;\beta]$ и лучами $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то площадь поверхности тела вращения может быть вычислена по формуле

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

Пример 12. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2=2px,$ соответствующей изменению x от $x=0$ до $x=a$ (рисунок 2.18).

Решение. $y^2=2px;\ y=\pm\sqrt{2px}.$ Можно считать, что поверхность образована вращением дуги параболы $y=\sqrt{2px}$ вокруг оси $Ox.$ Поэтому

$$y'=\frac{2p}{2\sqrt{2px}}.$$

$$S=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p^2}{2px}}dx=2\pi\int_0^a\sqrt{p^2+2px}dx=2\pi\int_0^a(p^2+2px)^{1/2}d(p^2+2px)\cdot\frac{1}{2p}=$$
$$=\frac{\pi}{p}(p^2+2px)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^a=\frac{2\pi}{3p}\left((p^2+2pa)^{3/2}-p^3\right)=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left((p+2a)^{3/2}-p^{3/2}\right).$$

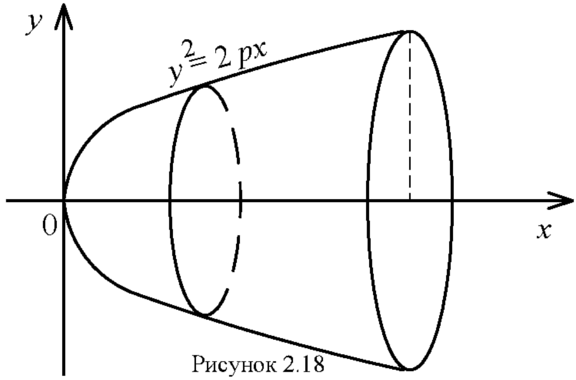


Рисунок 2.18

З а д а ч и

2.5.1 Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2=4ax$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(3a;\,2a\sqrt{3})$ вокруг оси Ox.

2.5.2 Найти площадь поверхности конуса, образованного вращением отрезка прямой $y=2x$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(2;\,4)$ вокруг:

а) оси Ox;

б) оси Oy.

2.5.3 Найти площадь поверхности тора, образованного вращением круга $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a)$ вокруг оси Ox.

2.5.4 Найти площадь поверхности тела, образованного вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox.

2.5.5 Астроида $x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$ вращается вокруг оси Ox. Найти поверхность тела вращения.

2.7 Вычисление работы переменной силы и силы давления жидкости

Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. Рассмотрим случай, когда сила $\vec{F}$ сохраняет постоянное направление, но меняется по модулю. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется точка. Пусть начальная и конечная точки имеют абсциссы $x = a$ и $x = b \quad (a < b)$ соответственно. В каждой точке отрезка [*a*; *b*] модуль силы принимает некоторое значение $F(x)$. Если функция $F(x)$ непрерывна, то работа силы $\vec{F}$ при перемещении из точки *a* в точку *b* может быть вычислена по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Пример 13. Вычислить работу, затраченную на растяжение пружины на 0,1 м, если известно, что для удлинения её на 0,05 м нужно приложить силу в 2 Н.

Решение. По закону Гука модуль силы $\vec{F}$, растягивающей пружину, пропорционален растяжению пружины, т. е. $\left|\vec{F}\right| = kx$, где x – величина растяжения. Из условия $2 = k \cdot 0,05$. Следовательно, $k = \dfrac{2}{0,05} = 40$ (Н/м). Поэтому $\left|\vec{F}\right| = 40x = F(x)$ и $A = \int_0^{0,1} 40x dx = 20x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,2$ (Дж).

Пусть пластина $A_1A_2B_2B_1$, имеющая вид криволинейной трапеции (рисунок 2.19), погружена вертикально в жидкость плотностью ρ таким образом, что её основания параллельны поверхности жидкости и находятся на расстояниях a и b от поверхности жидкости соответственно. Требуется определить силу давления жидкости на пластину.

Сила давления жидкости на пластину может быть вычислена по формуле

$$P = g\int_a^b \rho x\left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx,$$

где g – ускорение свободного падения.

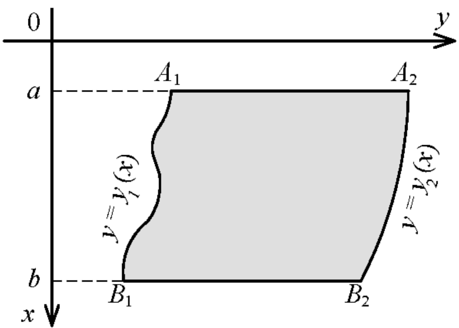


Рисунок 2.19

Пример 14. Вычислить силу, с которой вода давит на пластину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 70$ м, нижнее $b = 50$ м, а высота $h = 20$ м. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.
Решение. Выберем систему координат так, как показано на рисунке 2.20.

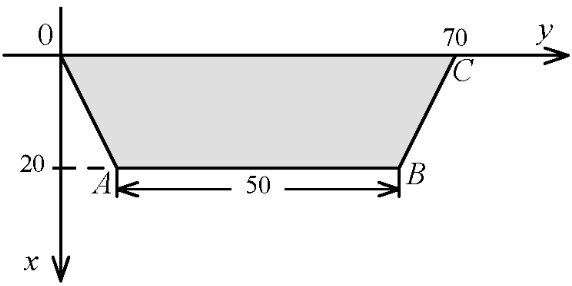


Рисунок 2.20

Координаты точек $A,\ B,\ C$ легко вычисляются из чертежа: $A(20;10)$, $B(20;60)$, $C(0;70)$. Уравнение линии OA: $\dfrac{x-0}{20-0} = \dfrac{y-0}{10-0}$; $y = 0,5x$. Уравнение линии BC: $\dfrac{x-0}{20-0} = \dfrac{y-70}{60-70}$; $y = -0,5x + 70$. Поэтому искомое давление

$$P = g\int_0^{20} \rho x\left((-0,5x+70) - 0,5x\right)dx = \rho g\int_0^{20} x(70-x)dx =$$

$$= \rho g\left(35x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{20} = \rho g\left(35\cdot 400 - \frac{8000}{3}\right) \approx 115\ (\text{Н}).$$

Пример 15. Котёл имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания $R = 3$ м, глубина $H = 5$ м (рисунок 2.21). Котёл наполнен жидкостью, плотность которой $\rho = 800$ кг/м³. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из котла.

Решение. Сечение котла плоскостью Oxy есть парабола $y=ax^2$, проходящая через точку $N(3;\,5)$. Поэтому $5=a\cdot 3^2$, т. е. $a=\frac{5}{9}$. Уравнение параболы $y=\frac{5}{9}x^2$.

Разделим параболоид на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине $5-y$ равна dy. Тогда, принимая приближённо слой за цилиндр, получим, что его объём $\pi x^2 dy=\pi\frac{9}{5}ydy$. Масса слоя будет равна $\pi\frac{9}{5}ydy\cdot\rho$. Работа по поднятию слоя на высоту $5-y$ определится как $dA=\pi\frac{9}{5}ydy\cdot\rho g(5-y)$. Учитывая, что $0\le y\le 5$, получаем

$$A=\int_0^5 dA=\int_0^5\frac{9}{5}\pi y(5-y)\rho g dy=\frac{9}{5}\pi\rho g\int_0^5 y(5-y)\,dy=\frac{9}{5}\pi\rho g\left(\frac{5y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^5=$$

$$=\frac{9}{5}\pi\rho g\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{9}{5}\pi\rho g\frac{125}{6}=\frac{75}{2}\pi\rho g\approx\frac{75}{2}\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 9{,}8\approx 294300$$ (Дж).

Рисунок 2.21

З а д а ч и

2.6.1 Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R=2$ м, а высота $H=3$ м, из однородного строительного материала плотностью $\rho=2500$ кг/м³.
2.6.2 Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погружённый в воду, если известно, что его основание равно 8 м, высота – 12 м, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 5 м. Плотность воды $\rho=1000$ кг/м³.
2.6.3 Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом 5 м.

2.8 Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс дуги плоской кривой

а) Если дуга плоской материальной кривой задана уравнением $y=f(x)$, где $x\in[a;b]$, и имеет плотность $\rho=\rho(x)$, то статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy находят по формулам

$$M_x=\int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx;\quad M_y=\int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Моменты инерции I_x, I_y относительно осей Ox и Oy можно вычислить по формулам

$$I_x=\int_a^b \rho(x)f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx;\quad I_y=\int_a^b \rho(x)x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Координаты центра масс:

$$x_c=\frac{M_y}{M};\quad y_c=\frac{M_x}{M},$$

где M – масса дуги, вычисляемая по формуле

$$M=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

б) Если однородная кривая задана параметрически $x=x(t);\ y=y(t)$, $t\in[t_1;t_2]$, то ее координаты центра масс находятся по формулам

$$x_c=\frac{\int_{t_1}^{t_2}x(t)\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt};\quad y_c=\frac{\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}.$$

в) Если однородная кривая задана в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi),\quad \varphi\in[\alpha;\beta]$, то, совместив декартову систему и полярную, координаты центра масс кривой находят по формулам

$$x_c=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi};\quad y_c=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi}.$$

Пример 16. Вычислить координаты центра масс однородной дуги полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и момент инерции полуокружности относительно оси Ox (рисунок 2. 22).

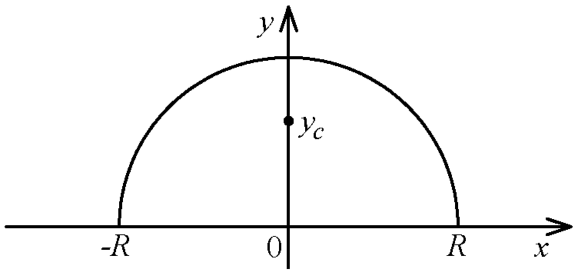


Рисунок 2.22

Решение. Так как дуга однородная, то можно считать, что $\rho(x)=1.$

$$M_x=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=R\int_{-R}^{R}dx=Rx\Big|_{-R}^{R}=2R^2.$$

Так как M – длина дуги полуокружности, то $M=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R=\pi R.$ Значит, $y_c=\frac{M_x}{M}=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi},$ а $x_c=0,$ т.к. центр масс находится на оси симметрии, а полуокружность симметрична относительно оси $Oy.$

$$I_x=\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=2R\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=$$

$$=\left[x=R\sin t;\ dx=R\cos tdt\right]=2R\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\cdot R\cos tdt=2R^3\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 tdt=$$

$$=R^3\int_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=R^3\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=R^3\left(\frac{\pi}{2}+0-0-0\right)=\frac{\pi R^3}{2}.$$

Ответ: $(x_c,y_c)=\left(0;\ \frac{2R}{\pi}\right);\ I_x=\frac{\pi R^3}{3}.$

2.9 Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры

а) Если плоская фигура ограничена снизу линией $y=g(x)$, сверху – линией $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (см. рисунок 2.2), поверхностная плотность фигуры $\rho=\rho(x)$, то статические моменты фигуры M_x и M_y относительно осей Ox и Oy находят по формулам

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\rho(x)\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx;\quad M_y=\int_a^b\rho(x)x\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

Моменты инерции I_x, I_y относительно осей Ox и Oy:

$$I_x=\frac{1}{2}\int_a^b\rho(x)\left(f^3(x)-g^3(x)\right)dx;\quad I_y=\int_a^b\rho(x)x^2\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

Координаты центра масс фигуры вычисляют по формулам

$$x_c=\frac{M_y}{M};\ y_c=\frac{M_x}{M},$$

где масса M фигуры вычисляется по формуле

$$M=\int_a^b\rho(x)\cdot\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

б) Если плоская фигура ограничена линией, заданной в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$, поверхностная плотность фигуры $\rho=\rho(\varphi)$, то статические моменты фигуры M_x и M_y относительно осей Ox и Oy декартовой системы находят по формулам

$$M_x=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\, r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi;\quad M_y=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\, r^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

Моменты инерции I_x, I_y относительно осей Ox и Oy:

$$I_x=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\, r^4(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi;\quad I_y=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\, r^4(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi.$$

Координаты центра масс фигуры вычисляют по формулам

$$x_c=\frac{M_y}{M};\ \ y_c=\frac{M_x}{M},$$

где масса M фигуры находится по формуле

$$M=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cdot r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 17*.* Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=6-x^2$; $y=2$.

Решение. Из однородности и симметричности данной фигуры следует, что $x_c=0$ (рисунок 2.23).

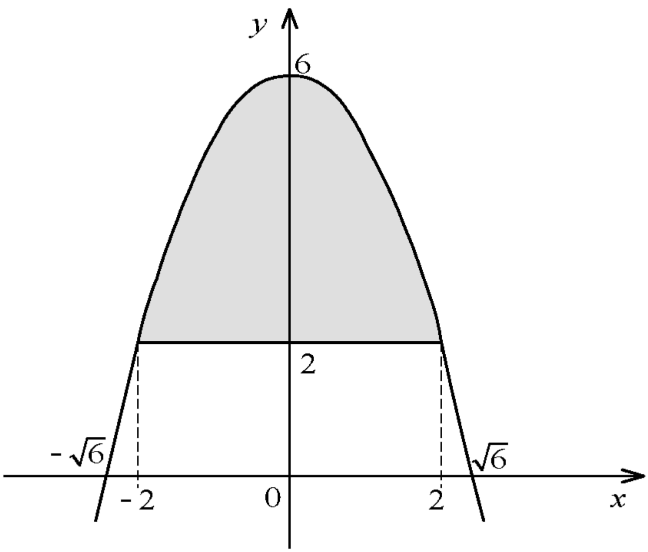


Рисунок 2.23

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left((6-x^2)^2-2^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(32-12x^2+x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(32x-4x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(64-32+\frac{32}{5}+64-32+\frac{32}{5}\right) = \frac{192}{5}.$$

$$M = \int_{-2}^{2}(6-x^2-2)\,dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3} = 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{192}{5}\cdot\frac{3}{32} = 3,6.$$

Ответ: $(0;\ 3,6)$.

З а д а ч и

2.7.1 Найти координаты центра масс дуги астроиды $x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t.$

2.7.2 Найти статический момент синусоиды $y = \sin x$ относительно оси Ox $(0 \le x \le \pi)$.

2.7.3 Найти координаты центра масс однородной $(\rho(x) \equiv 1)$ плоской фигуры, ограниченной дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ лежащей в первом квадранте, и осями координат.

Самостоятельная работа № 3

Каждый вариант состоит из четырех заданий, в которых необходимо вычислить:

1 – площадь фигуры, ограниченной указанными линиями;

2 – длину дуги данной линии;

3 – объём тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат;

4 – площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси.

Вариант 1

1. $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}.$

Вариант 2

1. $y = 2x^2,\ y = 3 - x.$

2. $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t.$

3. $\Phi: y^2=4-x,\ x=0,\ Oy.$

4. L: $y=\dfrac{x^3}{3}$ $(-1/2\le x\le 1/2),\ Ox.$

2. $x=2(\cos t+t\sin t),$

$y=2(\sin t-t\cos t),\ (0\le t\le\pi).$

3. $\Phi: \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2},\ x=0,\ y=0, Ox.$

4. L: $\rho=2\cos\varphi$, полярная ось.

Вариант 3

1. $y=\sqrt{x}, y=x^3.$

2. $\rho=\sin^3(\varphi/3)\ (0\le\varphi\le\pi/2).$

3. $\Phi: x^2/9+y^2/4=1, Oy.$

4. $L: x=10(t-\sin t),\ y=10(1-\cos t)$

$(0\le t\le 2\pi),\ Ox.$

Вариант 4

1. $x=7\cos^3 t, y=7\sin^3 t.$

2. $\rho=2\sin^3(\varphi/3)\ (0\le\varphi\le\pi/2).$

3. $\Phi: y^3=x^2,\ y=1, Ox.$

4. $L: y=x^2/2,$ отсекаемая прямой

$y=3/2,\ Oy.$

Вариант 5

1. $\rho=4\cos 3\varphi.$

2. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9}.$

3. Φ: $x=6(t-\sin t),\ y=6(1-\cos t), Ox.$

4. L: $3y=x^2\ (0\le x\le 2),\ Ox.$

Вариант 6

1. $\rho=3\cos 2\varphi.$

2. $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}.$

3. $\Phi: x=3\cos^2 t,\ y=4\sin^2 t,$

$(0\le t\le\pi/2),\ Ox.$

4. $L: y=\sqrt{x},$ отсекаемая прямой

$y=x,\ Ox.$

Вариант 7

1. $\rho=2(1-\cos\varphi).$

2. $y^2=(x+1)^3,$ отсечённой прямой

$x=4.$

3. $\Phi: y^2=x,\ x^2=y,\ Ox.$

4. $L: x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t)$

$(0\le t\le 2\pi),\ Ox.$

Вариант 8

1. $\rho^2=2\sin 2\varphi.$

2. $y=1-\ln\cos x\ \ (0\le x\le\pi/6).$

3. $\Phi: y^2=(x-1)^3,\ x=2,\ Ox.$

4. $L: x=\cos t,\ y=3+\sin t,\ Ox.$

Вариант 9

1. $x=4(t-\sin t),\ \ y=4(1-\cos t).$

2. $\rho=6\cos^3(\varphi/3)\ \ (0\le\varphi\le\pi/2).$

3. $\Phi: x=\sqrt{1-y^2},\ y=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x,\ y=0,\ Ox.$

Вариант 10

1. $\rho=2(1+\cos\varphi).$

2. $x=4\cos^3 t,\ \ y=4\sin^3 t.$

3. $\Phi: y=\sin x,\ y=0\ (0\le x\le\pi),\ Ox.$

4. $L: y=x^3/3\ (-1\le x\le 1),\ Ox.$

4. $L:\ 3x = y^3\ \ (0 \le y \le 2),\ Oy.$

Вариант 11

1. $\rho = 2\sin 3\varphi.$
2. $y^2 = (x-1)^3$ от т. $A(1;0)$ до т. $B(6;\sqrt{125})$
3. $\Phi:\ y^2 = 4x,\ x^2 = 4y,\ Ox.$
4. $L:\ x = \cos t,\ y = 1 + \sin t,\ Ox.$

Вариант 12

1. $\rho = 2 + \cos\varphi.$
2. $y^2 = x^3,$ отсечённой прямой $x = 5.$
3. $\Phi:\ x = 2\cos t,\ y = 5\sin t,\ Oy.$
4. $L:\ x^2 = 4 + y,$ отсекаемая прямой $y = 2,\ Oy.$

Вариант 13

1. $y = 1/(1+x^2),\quad y = x^2/2.$
2. $\rho = 3\cos\varphi.$
3. $\Phi: y = x^2,\ 8x = y^2,\ Oy.$
4. $L:\ x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi),\ Ox.$

Вариант 14

1. $y^2 = x + 1,\quad y^2 = 9 - x.$
2. $\rho = 3(1 - \cos\varphi).$
3. $\Phi: y = e^x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ Ox.$
4. $L:\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ Ox.$

Вариант 15

1. $y^2 = x^3,\quad x = 0,\quad y = 4.$
2. $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t.$
3. $\Phi: y^2 = 4x/3,\ x = 3,\ Ox.$
4. $L:\ \rho = \sqrt{\cos 2\varphi},$ полярная ось.

Вариант 16

1. $\rho = 4\sin^2\varphi.$
2. $x = 5\cos^2 t,\ y = 5\sin^2 t\,(0 \le t \le \pi/2).$
3. $\Phi: y = 2x - x^2,\ y = 0,\ Ox.$
4. $L:\ y^2 = 4 + x,$ отсекаемая прямой $x = 2,\ Ox.$

Вариант 17

1. $x = 3\cos t,\quad y = 2\sin t.$
2. $9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью $Oy.$
3. $\Phi: \rho = 2(1 + \cos\varphi),$ полярная ось.
4. $L:\ y^2 = 2x,$ отсекаемая прямой $2x = 3,\ Ox.$

Вариант 18

1. $y^2 = 9x,\quad y = x.$
2. $\rho = 3\sin\varphi.$
3. $\Phi: x = 7\cos^3 t,\ y = 7\sin^3 t,\ Oy.$
4. $L:\ 3y = x^3\ \ (0 \le x \le 1),\ Ox.$

Вариант 19

1. $x = 3(\cos t + t\sin t),$ $y = 3(\sin t - t\cos t),(0 \le t \le \pi),\ y = 0.$

Вариант 20

1. $y^2 = 4x,\quad x^2 = 4y.$
2. $x = 9(t - \sin t),\ y = 9(1 - \cos t),$

2. $y = \ln \sin x \quad (\pi/3 \le x \le \pi/2)$.

3. $\Phi: x^2/16 + y^2/1 = 1,\ Ox$.

4. $L:\ \rho^2 = 4\cos 2\varphi$, полярная ось.

$(0 \le t \le 2\pi)$.

3. $\Phi: x^3 = (y-1)^2,\ x = 0,\ y = 0,\ Ox$.

4. $L:\ \rho = 6\sin\varphi$, полярная ось.

Вариант 21

1. $y^2 = x^3, \quad x = 2$.

2. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.

3. $\Phi: xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0,\ Ox$.

4. $L: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t\,(0 \le t \le 2\pi), Ox$.

Вариант 22

1. $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$.

2. $y^2 = (x-1)^3$ от $A(2;-1)$ до $B(5;-8)$.

3. $\Phi: x = \sqrt{3}\cos t,\ y = 2\sin t,\ Oy$.

4. $L:\ \rho = 2\sin\varphi$, полярная ось.

Вариант 23

1. $y^2 = 4 - x^2,\ x = 0$.

2. $x = 7(t - \sin t), y = 7(1 - \cos t), (2\pi \le t \le 4\pi)$.

3. $\Phi: y = 2 - x^2,\ y = x^2,\ Ox$.

4. $L: \rho = \frac{2}{3}\cos\varphi$, полярная ось.

Вариант 24

1. $\rho = 3\sin 4\varphi$.

2. $y = e^{x/2} + e^{-x/2} \quad (0 \le x \le 2)$.

3. $\Phi: y = -x^2 + 8,\ y = x^2,\ Ox$.

4. $L:\ x = 3\cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t,\ Ox$.

Вариант 25

1. $y = x^3, \quad y = 1, \quad x = 0$.

2. $\rho = 2\cos^3(\varphi/3)\ (0 \le \varphi \le \pi/2)$.

3. $\Phi: y^2 = (x+4)^3,\ x = 0,\ Ox$.

4. $L:\ x = 2\cos t,\ y = 3 + 2\sin t,\ Ox$.

Вариант 26

1. $xy = 6, \quad x + y - 7 = 0$

2. $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t$.

3. $\Phi: y = x^3,\ x = 0,\ y = 8,\ Oy$.

4. $L:\ \rho^2 = 9\cos 2\varphi$, полярная ось.

Вариант 27

1. $y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0, \quad x = 2$.

2. $\rho = 5\sin\varphi$.

3. $\Phi: x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ Ox$.

4. $L: y = x^3$ между прямыми $x = \pm\frac{2}{3}$, Ox.

Вариант 28

1. $x^2 = 4y, \quad y = 8/(x^2+4)$.

2. $\rho = 4\cos\varphi$.

3. $\Phi: 2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0,\ Ox$.

4. $L:\ x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ Ox$.

Вариант 29

1. $y = x + 1, \quad y = \cos x, \quad y = 0$.

2. $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$.

3. $\Phi: y = x - x^2,\ y = 0,\ Ox$.

4. $L:\ x = \cos t,\ y = 2 + \sin t,\ Ox$.

Вариант 30

1. $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$.

2. $y^2 = x^3$ от т. $A(0;\,0)$ до т. $B(4;8)$.

3. $\Phi: y = 2 - x^2/2,\ x + y = 2,\ Oy$.

4. $L:\ \rho = 4\sin\varphi$, полярная ось.

Самостоятельная работа № 4

В задании 1 вариантов 1–23 вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара P. Удельный вес воды принять равным 9,81 кН/м^3, π = 3,14. (Результат округлить до целого числа.). В задании 1 вариантов 24–30 вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении сооружения Q из некоторого материала, удельный вес которого γ.

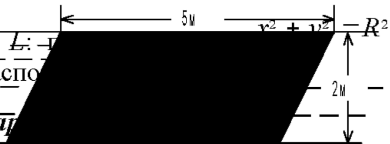
В задании 2 вычислить силу давления воды на пластину, вертикально погруженную в воду. Форма, размеры и расположение пластины указаны на рисунке.

В задании 3 вариантов 1–15 найти координаты центра масс однородной плоской кривой L. В задании 3 вариантов 16–30 найти координаты центра масс плоской однородной фигуры Ф, ограниченной данными линиями.

Вариант 1

1. P: правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 2 м и высотой 5 м.

2. Параллелограмм



3. L: $x^2 + y^2 = R^2$,
распо

Ва

1. P: котёл, имеющий форму сферического сегмента, высота которого 1,5 м и радиус 1 м.

2. Равнобочная трапеция

3. L: дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$,
распо м квадранте.

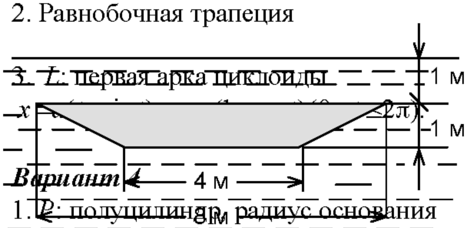
В

1. P: усечённый конус, у которого радиус верхнего основания 1 м, нижнего 2 м, высота 3 м.

Вариант 2

1. P: правильная четырёхугольная пирамида, обращённая вершиной вниз. Сторона основания пирамиды равна 2 м, высота – 6 м.

2. Равнобочная трапеция

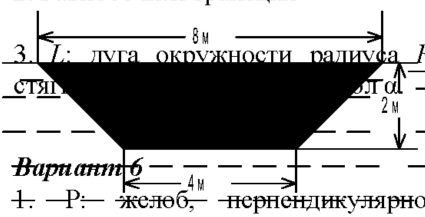


3. L: первая арка циклоиды
$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Вариант 4

1. P: полуцилиндр, радиус основания которого 1 м, длина 5 м.

2. Равнобочная трапеция

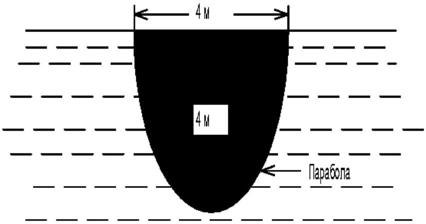


3. L: дуга окружности радиуса R,
стяг ол α.

Вариант 6

1. P: желоб, перпендикулярное сечение которого является параболой. Длина желоба 5 м, ширина 4 м, глубина 4 м.

2. Фигура, ограниченная параболой



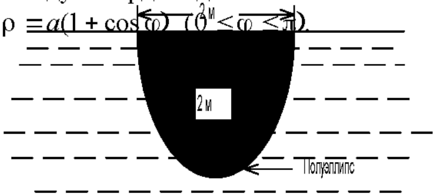
3. L: дуга цепной линии

$y = a\,\mathrm{ch}(x - a)$ $(-a \le x \le a)$.

2. Полуэллипс

3. L: дуга кардиоиды

$\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.



Вариант 7

1. P: цилиндрическая цистерна, радиус основания которой 1 м, длина 5 м.

2. Равнобочная трапеция

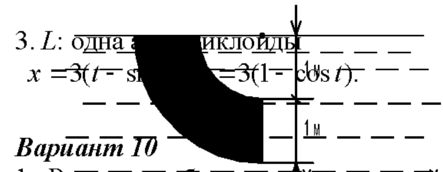
3. L: дуга логарифмической спирали

$\rho = ae^{\varphi}$ $(\pi/2 \le \varphi \le \pi)$.

Вариант 8

1. P: правильная треугольная пирамида с основанием 2 м и высотой 5 м.

2. Четверть кольца



3. L: одна арка циклоиды

$x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.

Вариант 9

1. P: правильная треугольная пирамида, обращённая вершиной вниз, сторона основания которой 4 м, высота 6 м.

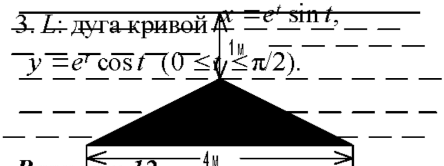
2. Равнобедренный треугольник

3. L: дуга астроиды $x = 2\cos^3(t/4)$, $y = 2\sin^3(t/4)$, расположенная в первом квадранте.

Вариант 10

1. P: конус, обращённый вершиной вниз, радиус основания которого 3 м, высота 5 м.

2. Равнобедренный треугольник



3. L: дуга кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

Вариант 11

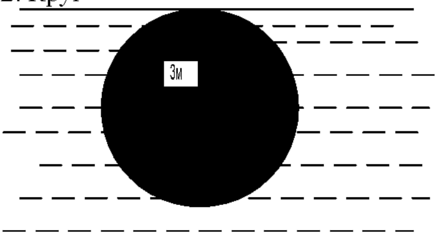
1. P: усечённый конус, у которого радиус нижнего основания 3 м, верхнего – 1 м, высота 3 м.

Вариант 12

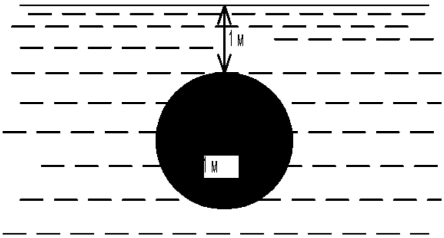
1. P: конус с радиусом основания 2 м и высотой 5 м.

2. Круг

2. Круг



3. L: кардиоида $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.

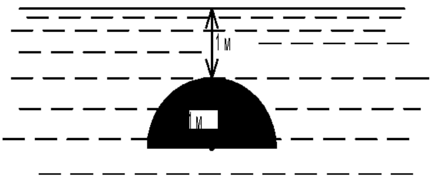


3. L: кривая $\rho = 2\sin\varphi$ от точки (0;0) до точки $(\sqrt{2};\ \pi/4)$.

Вариант 13

1. P: правильная четырёхугольная усечённая пирамида со стороной верхнего основания 8 м, нижнего – 4 м, высотой 2 м.

2. Полукруг

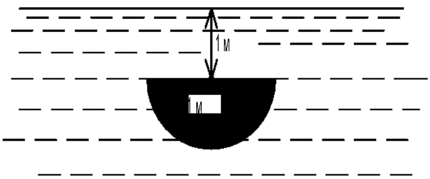


3. L: дуга развёртки окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$.

Вариант 14

1. P: параболоид вращения, радиус основания которого 2 м, глубина 4 м.

2. Полукруг

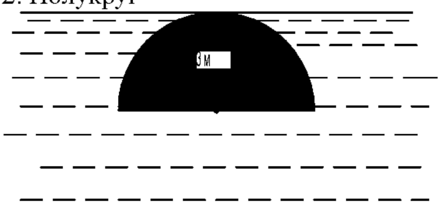


3. L: кривая $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$, заключённая между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$.

Вариант 15

1. P: половина эллипсоида вращения, радиус основания которого 1 м, глубина 2 м.

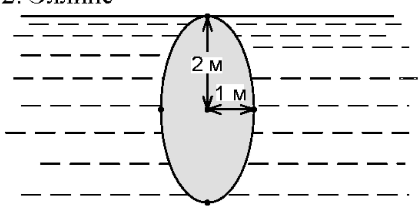
2. Полукруг



Вариант 16

1. P: усечённая четырёхугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания 2 м, нижнего – 4 м, высота 1м.

2. Эллипс



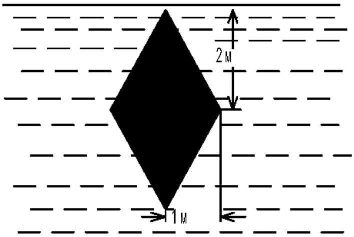
3. L: кривая $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

3. Ф: треугольник, стороны которого лежат на прямых $x + y = a$, $x = 0$ и $y = 0$.

Вариант 17

1. P: правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м.

2. Ромб

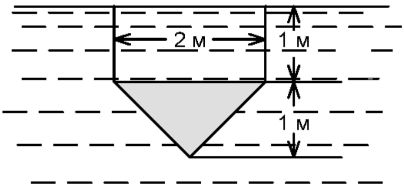


3. Ф ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и осями координат $(x \ge 0,\ y \ge 0)$.

Вариант 18

1. P: правильная шестиугольная пирамида с вершиной, обращённой вниз, сторона основания которой 2 м, высота 6 м.

2. Равнобедренный треугольник

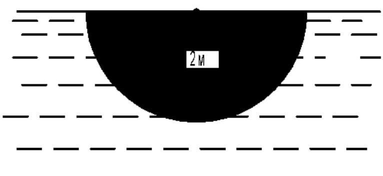


3. Ф ограничена первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

Вариант 19

1. P: цилиндр с радиусом основания 1 м и высотой 3 м.

2. Полукруг

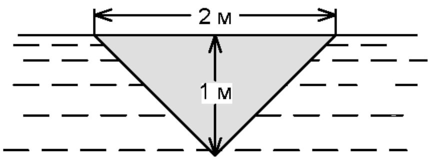


3. Ф ограничена кривыми $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.

Вариант 20

1. P: правильная усечённая шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания 1 м, нижнего – 2 м, высота 2 м.

2. Равнобедренный треугольник



3. Ф ограничена дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси Ox $(0 \le x \le \pi)$.

Вариант 21

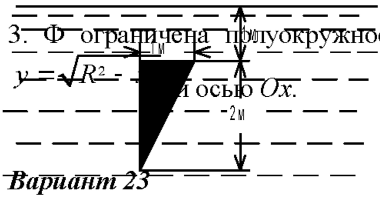
1. P: желоб, в перпендикулярном

Вариант 22

1. P: правильная усечённая

сечении которого лежит полуокружность радиусом 1 м, длина желоба 10 м.

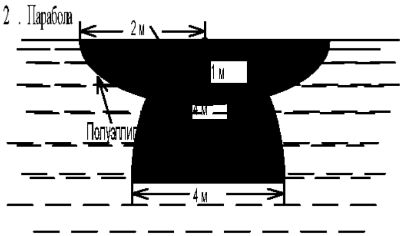
2. Прямоугольный треугольник



3. Ф ограничена полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и осью Ox.

Вариант 23

1. P: полусфера радиусом 2 м.



3. Ф ограничена дугой параболы

$$y=b\sqrt{\frac{x}{a}} \quad (a>0,\ b>0),$$

осью Oy и прямой $y = b$.

Вариант 25

1. Q: правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м; γ = 24 кН/м^3.

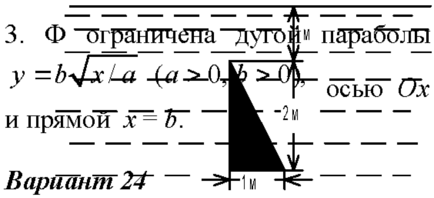
2. Полуэллипс

3. Ф ограничена осями координат и дугой астроиды, расположенной в первом квадранте.

Вариант 27

шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания 2 м, нижнего – 1 м, высота 2 м.

2. Прямоугольный треугольник

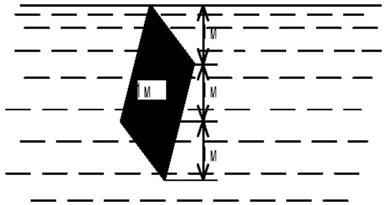


3. Ф ограничена дугой параболы $y=b\sqrt{x/a}$ $(a>0,\ b>0)$, осью Ox и прямой $x = b$.

Вариант 24

1. Q: правильная усечённая четырех–угольная пирамида, сторона верх–него основания которой 2 м, нижнего – 4 м, высота 2 м; γ = 24 кН/м^3.

2.Параллелограмм

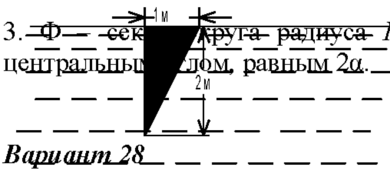


3. Ф ограничена замкнутой линией $y^2=ax^3-x^4$.

Вариант 26

1. Q: правильная четырёхугольная пирамида со стороной 2 м и высотой 4 м; γ = 24 кН/м^3.

2. Прямоугольный треугольник

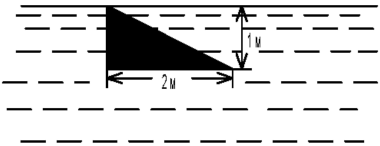


3. Ф — сектор круга радиуса R с центральным углом, равным 2α.

Вариант 28

1. Q: правильная шестиугольная усечённая пирамида, сторона верхнего основания которой 1 м, нижнего – 2 м, высота 2 м; γ = 24 кН/м^3.

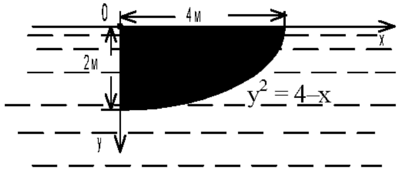
2. Прямоугольный треугольник



3. Ф ограничена кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

1. Q: правильная треугольная пирамида со стороной основания 3 м и высотой 6 м; γ = 20 кН/м^3.

2. Фигура, ограниченная параболой

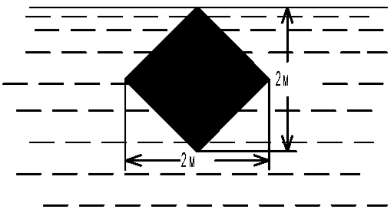


3. Ф ограничена первой петлёй лемнискаты Бернулли
$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Вариант 29

1. Q: конус, радиус основания которого 2 м, высота 3 м; γ = 20 кН/м^3.

2. Квадрат

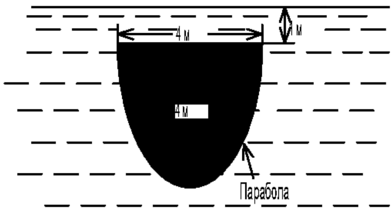


3. Ф ограничена осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Вариант 30

1. Q: усечённый конус, радиус верхнего основания которого 1 м, нижнего – 2 м; γ = 20 кН/м^3.

2. Фигура, ограниченная параболой



3. Ф ограничена полукубической параболой $ay^2 = x^3$ и прямой $x = a$ $(a > 0)$.

3 ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1

а) Найти площадь, заключенную между параболой, касательной к ней в точке $M(x;y)$ и осью ординат. Сделать чертеж.

1. $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3},\ M(-3;-\frac{8}{3}).$
2. $y=x^2+8x+16,\ M(-4;0).$
3. $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-3,\ M(3;4,5).$
4. $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2},\ M(-2;-\frac{3}{2}).$
5. $y=x^2-4x+7,\ M(3;4).$
6. $y=-x^2-4x-1,\ M(-4;-1).$
7. $y=-x^2+6x-7,\ M(3;2).$
8. $y=-x^2+5,\ M(-3;-4).$
9. $y=-x^2+10x-21,\ M(6;3).$
10. $y=x^2+6x+6,\ M(-2;-2).$
11. $y=3x^2+9x+5,\ M(-2;-1).$
12. $y=2x^2+5x+6,\ M(-3;9).$
13. $y=-2x^2+4x+6,\ M(1;8).$
14. $y=x^2+5x,\ M(-2;-6).$
15. $y=-x^2+3x,\ M(1;2).$
16. $y=3x^2-9x-1,\ M(2;-7).$
17. $y=x^2+4x+2,\ M(-1;-1).$
18. $y=\frac{1}{3}x^2+6x+3,\ M(-9;-24).$
19. $y=-\frac{1}{5}x^2+4,\ M(-3;\frac{11}{5}).$
20. $y=\frac{1}{3}x^2-6,\ M(-3;-3).$
21. $y=4x^2+16x,\ M(-1,5;-15).$
22. $y=x^2+8x+16,\ M(-4,6;\ 0,36).$
23. $y=-\frac{1}{5}x^2+4,\ M(3;\frac{11}{5}).$
24. $y=x^2+6x+8,\ M(-3,5;-0,75).$
25. $y=-4x^2+16x,\ M(1;12).$
26. $y=x^2-8x+16,\ M(4,3;\ 0,09).$
27. $y=\frac{1}{3}x^2-6,\ M(4;-\frac{2}{3}).$
28. $y=x^2+6x+8,\ M(-2;0).$
29. $y=x^2+8x+16,\ M(-3;1).$
30. $y=-x^2-4x-1,\ M(-2;3).$

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями. Сделать чертеж.

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2 \ \ (x \ge 2).$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 2 \ \ (y \ge 2).$

3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 4 \ \ (0 < x < 8\pi, \ y \ge 4).$

4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2 \ \ (x \ge 2).$

5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$
$y = 3 \ \ (y \ge 3).$

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3 \ \ (0 < x < 4\pi, \ y \ge 3).$

7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 6\sqrt{3} \ \ (x \ge 6\sqrt{3}).$

8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$
$y = \sqrt{3} \ \ (y \ge \sqrt{3}).$

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3 \ \ (0 < x < 6\pi, \ y \ge 3).$

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4 \ \ (x \ge 4).$

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 3 \ \ (y \ge 3).$

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 9 \ \ (0 < x < 12\pi, \ y \ge 9).$

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4 \ \ (x \ge 4).$

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4 \ \ (y \ge 4).$

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6 \ \ (0 < x < 12\pi, \ y \ge 6).$

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3} \ \ (x \ge 3\sqrt{3}).$

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2\sqrt{3} \ \ (y \ge 2\sqrt{3}).$

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15 \ \ (0 < x < 20\pi, \ y \ge 15).$

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 \ \ (x \ge 1).$

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4 \ \ (y \ge 4).$

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1 \ \ (0 < x < 2\pi, \ y \ge 1).$

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 \ \ (x \ge 1).$

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2 \ \ (y \geq 2)$.

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 12 \ \ (0 < x < 16\pi, \ y \geq 12)$.

25. $\begin{cases} x = 14\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 9\sqrt{3} \ \ (x \geq 9\sqrt{3})$.

26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4\sqrt{3} \ \ (y \geq 4\sqrt{3})$.

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 2 \ \ (0 < x < 4\pi, \ y \geq 2)$.

28. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2 \ \ (x \geq 2)$.

29. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 5 \ \ (y \geq 5)$.

30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6 \ \ (0 < x < 8\pi, \ y \geq 6)$.

в) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах. Сделать чертеж.

1. $r = 4\cos 3\varphi, \ r = 2 \, (r \geq 2)$.

2. $r = \cos 2\varphi$.

3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi, \ r = \sin\varphi$
$(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$.

4. $r = 4\sin 3\varphi, \ r = 2 \, (r \geq 2)$.

5. $r = 2\cos\varphi$,
$r = 2\sqrt{3}\sin\varphi \, (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$.

6. $r = \sin 3\varphi$.

7. $r = 6\sin 3\varphi, \ r = 3 \, (r \geq 3)$.

8. $r = \cos 3\varphi$.

9. $r = \cos\varphi$,
$r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$
$(-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2)$.

10. $r = \sin\varphi$,
$r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$
$(0 \leq \varphi \leq 3\pi/4)$.

11. $r = 6\cos 3\varphi, \ r = 3 \, (r \geq 3)$.

12. $r = 1/2 + \sin\varphi$.

13. $r = \cos\varphi$,
$r = \sin\varphi \ \ (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$.

14. $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$,
$r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)$
$(\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4)$.

15. $r = \cos\varphi, \ r = 2\cos\varphi$.

16. $r = \sin\varphi, \ r = 2\sin\varphi$.

17. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$.

18. $r = \dfrac{1}{2} + \cos\varphi$.

19. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$.

20. $r = \dfrac{5}{2}\sin\varphi, \ r = \dfrac{3}{2}\sin\varphi$.

21. $r = \frac{3}{2}\cos\varphi,\ r = \frac{5}{2}\cos\varphi.$

22. $r = 4\cos 4\varphi.$

23. $r = \sin 6\varphi.$

24. $r = 2\cos\varphi,\ r = 3\cos\varphi.$

25. $r = \cos\varphi + \sin\varphi.$

26. $r = 2\sin 4\varphi.$

27. $r = 2\cos 6\varphi.$

28. $r = \cos\varphi - \sin\varphi.$

29. $r = 3\sin\varphi,\ r = 5\sin\varphi.$

30. $r = 2\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi.$

Задание 2

а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат. Сделать чертеж.

1. $y = \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \le x \le 2.$

3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ 0 \le x \le \frac{7}{9}.$

4. $y = \ln\frac{5}{2x}, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

5. $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6.$

6. $y = e^x + 6,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\ \frac{1}{4} \le x \le 1.$

8. $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3.$

9. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\ 0 \le x \le \frac{8}{9}.$

10. $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le \frac{1}{4}.$

11. $y = 2 + \operatorname{ch} x,\ 0 \le x \le 1.$

12. $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6.$

13. $y = e^x + 13, \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

14. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 0 \le x \le \frac{1}{4}.$

15. $y = 2 - e^x,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

16. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le \frac{15}{16}.$

17. $y = 1 - \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2.$

18. $y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4.$

19. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \le x \le 1.$

20. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \le x \le \frac{9}{16}.$

21. $y = \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2.$

22. $y = \ln 7 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

23. $y = \operatorname{ch} x + 3,\ 0 \le x \le 1.$

24. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le \frac{3}{4}.$

25. $y = \ln\cos x + 2,\ 0 \le x \le \pi/6.$

26. $y = e^x + 26,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

27. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,\ 0 \le x \le 2.$

28. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4,\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}.$

29. $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4},\ 0 \le x \le 2.$

30. $y = e^x + e,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями. Сделать чертеж.

1. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

2. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2.$

4. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

5. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$

6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi.$

8. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi.$

13. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi.$

14. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/6.$

18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/4.$

22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$\pi/6 \le t \le \pi/4.$

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 3\pi/2.$

25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

26. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

27. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

28. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le 3\pi.$

29. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/4.$

30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$\pi/6 \le t \le \pi/4.$

в) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах. Сделать чертеж.

1. $r = 3e^{3\varphi/4}, \ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

2. $r = 2e^{4\varphi/3}, \ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

3. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, \ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

4. $r = 5e^{5\varphi/12}, \ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

5. $r = 6e^{12\varphi/5}, \ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

6. $r = 3e^{3\varphi/4}, \ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

7. $r = 4e^{4\varphi/3},\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

8. $r = \sqrt{2}e^{\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

9. $r = 5e^{5\varphi/12},\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

10. $r = 12e^{12\varphi/5},\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

11. $r = 1 - \sin\varphi,\ -\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6.$

12. $r = 2(1 - \cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\pi/2.$

13. $r = 3(1 + \sin\varphi),\ -\pi/6 \le \varphi \le 0.$

14. $r = 4(1 - \sin\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

15. $r = 5(1 - \cos\varphi),\ -\pi/3 \le \varphi \le 0.$

16. $r = 6(1 + \sin\varphi),\ -\pi/2 \le \varphi \le 0.$

17. $r = 7(1 - \sin\varphi),\ -\pi/6 \le \varphi \le \pi/6.$

18. $r = 8(1 - \cos\varphi),\ -2\pi/3 \le \varphi \le 0.$

19. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 3/4.$

20. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 4/3.$

21. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 5/12.$

22. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 12/5.$

23. $r = 4\varphi,\ 0 \le \varphi \le 3/4.$

24. $r = 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 4/3.$

25. $r = 5\varphi,\ 0 \le \varphi \le 12/5.$

26. $r = 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

27. $r = 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4.$

28. $r = 6\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

29. $r = 2\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

30. $r = 8\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4.$

Задание 3

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций. В вариантах 1–15 ось вращения *Ox*, в вариантах 16–30 ось вращения *Oy*. Сделать чертеж.

1. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

2. $x^2 + (y - b)^2 \le a^2\ (a < b).$

3. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$
   $y = 0\ (0 \le t \le 2\pi).$

4. $xy = 4,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4.$

5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$

6. $y = -x^2 + 5x - 6,\ y = 0.$

7. $y = 3\sin x,\ y = \sin x\ (0 \le x \le \pi).$

8. $y = 5\cos x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ x \ge 0.$

9. $x = \sqrt[3]{y - 2},\ x = 1,\ y = 1.$

10. $y = 2x - x^2,\ y = -x + 2.$

11. $y = 2x - x^2,\ y = -x + 2,\ x = 0.$

12. $y = 1 - x^2,\ x = 0.$

13. $y = x^2,\ y^2 - x = 0.$

14. $y = x^2,\ y = 1,\ x = 2.$

15. $y = e^{1-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1.$

16. $y = \sin x,\ y = 1,\ x = 0.$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0.$

18. $y = x^2,\ x = 2,\ y = 0.$

19. $y = x^2 + 1,\ y = x,\ x = 0,\ x = 1.$

20. $y = \arcsin\dfrac{x}{5},\ y = \arcsin x,\ y = \dfrac{\pi}{2}.$

21. $y = x^2,\ x = 2,\ y = 0.$

22. $y = x^2 + 1,\ y = x,\ x = 0,\ x = 1.$

23. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 0,\ y = 1,\ x = 0{,}5.$

24. $y = \ln x,\ x = 2,\ y = 0.$

25. $y = (x - 1)^2,\ y = 1.$

26. $y^2 = x - 2,\ y = 0,\ y = x^3,\ y = 1.$

27. $y = x^3,\ y = x^2.$

28. $y = \arccos\dfrac{x}{5},\ y = \arccos\dfrac{x}{3},\ y = 0.$

29. $y = x^2 - 2x + 1,\ x = 2,\ y = 0.$

30. $y = x^3,\ y = x.$

Задание 4

Найти центр тяжести плоской однородной фигуры, ограниченной кривыми. Сделать чертеж.

1. $y = \dfrac{2}{\pi}x,\ y = \sin x,\ x \geq 0.$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0.$

3. $y^2 = 20x,\ x^2 = 20y.$

4. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

5. $(y - x)^2 = x^3,\ x = 1.$

6. $y^2 = x^3 - x^2,\ x = 2.$

7. $4x^2 + 9y^2 = 36,\ x^2 + y^2 = 9$, расположенной в I четверти.

8. $y = \sqrt{2x - x^2},\ y = 0.$

9. $y = x^2,\ y = 2x^2,\ x = 1,\ x = 2.$

10. $y = x + 1,\ y = \cos x,\ y = 0.$

11. $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4.$

12. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1.$

13. $y^2 = 4x,\ y = 0,\ x = 4.$

14. $y = 2x - x^2,\ y = 0.$

15. полукруга $x^2 + y^2 = a^2$, расположенного над осью Ox.

16. $x^2 + 4y - 16 = 0,\ y = 0.$

17. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

18. $y=x^2,\ y=\sqrt{x}.$

19. $y=\cos x,\ x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0.$

20. $ay^2=x^3,\ x=a\ (a>0).$

21. $y=\cos x,\ y=\frac{1}{2},\ x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}.$

22. $y=\cos x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}.$

23. $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi.$

24. $y=(x-4)^2,\ y-16=-x^2,\ y=0.$

25. $y=\frac{x^2}{3},\ y=4-\frac{2}{3}x^2.$

26. $y=x^2,\ y=\frac{x^2}{2},\ y=2x.$

27. $x^2+4y^2=4,\ x^2+y^2=4,$

расположенной в I четверти.

28. $y=\ln x,\ y=0,\ x=e.$

29. $x+y=a,\ x=0,\ y=0.$

30. $y=b\sqrt{x/a}\ (a>0, b>0), y=0, x=b.$

Задание 5

1 Вычислить площадь сечения, имеющего форму эллиптического кольца (рисунок 3.1).

2 Вычислить площадь сечения, имеющего форму прямоугольника, из которого вырезан полуэллипс (рисунок 3.2).

3 Вычислить площадь сектора кругового тонкостенного кольца (рисунок 3.3).

4 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугами парабол и отрезками прямой (рисунок 3.4).

5 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугами парабол (рисунок 3.5).

6 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугами парабол (рисунок 3.6).

7 Вычислить площадь сечения, имеющего форму эллиптического треугольника, где a и b полуоси эллипса (рисунок 3.7).

8 Вычислить площадь сечения, имеющего форму параболического сегмента (рисунок 3.8).

9 Вычислить площадь сечения, имеющего форму прямоугольника, дополненного параболическим сегментом (рисунок 3.9).

10 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и полуокружностью (рисунок 3.10).

11 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и прямыми (рисунок 3.11).

12 Вычислить площадь сечения, имеющего форму прямоугольника, из которого вырезан полуэллипс (рисунок 3.12).

13 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугами парабол (рисунок 3.13).

14 Вычислить площадь сечения, имеющего форму кругового сегмента (рисунок 3.14).

15 Вычислить площадь сечения, имеющего форму прямоугольника, завершенного эллипсом (рисунок 3.15).

16 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и прямыми (рисунок 3.16).

17 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и прямыми (рисунок 3.17).

18 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и полуэллипсом (рисунок 3.18).

19 Вычислить площадь сектора кругового кольца (рисунок 3.19).

20 Вычислить площадь сечения, имеющего форму полуокружности, из которой вырезан полуэллипс (рисунок 3.20).

21 Вычислить площадь сечения, ограниченного полуэллипсом и прямыми (рисунок 3.21).

22 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугами парабол и отрезками прямой (рисунок 3.22).

23 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и прямыми (рисунок 3.23).

24 Вычислить площадь сечения, имеющего форму прямоугольника, из которого вырезана полуокружность (рисунок 3.24).

25 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и полуэллипсом (рисунок 3.25).

26 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и полуокружностью (рисунок 3.26).

27 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и прямыми (рисунок 3.27).

28 Вычислить площадь сечения, имеющего форму квадрата, из которого вырезан полуэллипс (рисунок 3.28).

29 Вычислить площадь сечения, ограниченного дугой параболы и полуэллипсом (рисунок 3.29).

30 Вычислить площадь сечения, имеющего форму параболического сегмента (рисунок 3.30).

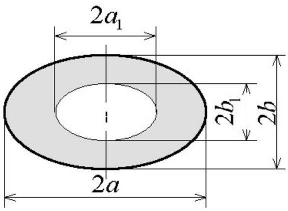


Рисунок 3.1

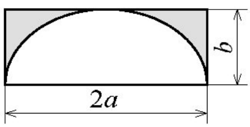


Рисунок 3.2

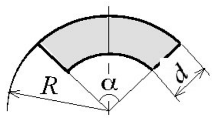


Рисунок 3.3

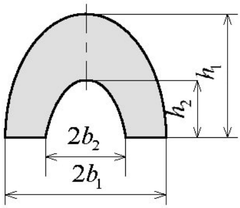


Рисунок 3.4

Рисунок 3.5

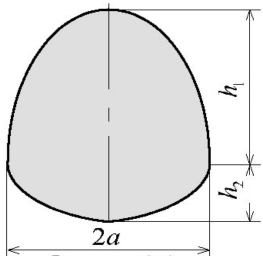


Рисунок 3.6

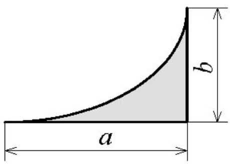


Рисунок 3.7

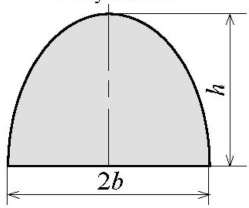


Рисунок 3.8

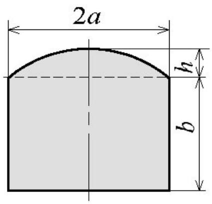
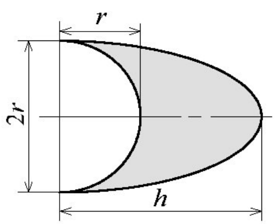
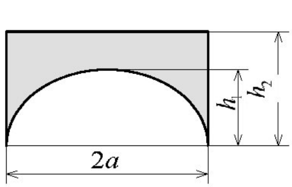


Рисунок 3.9





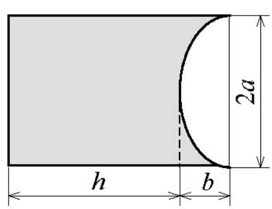
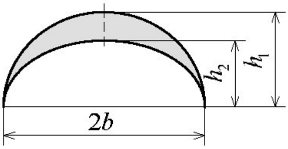
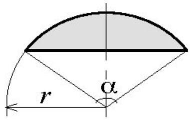


Рисунок 3.10

Рисунок 3.11

Рисунок 3.12





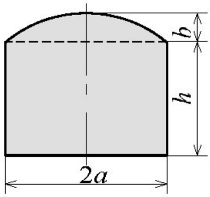
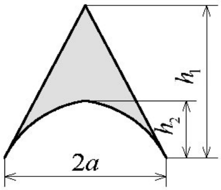
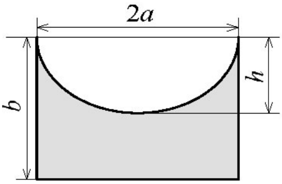


Рисунок 3.13

Рисунок 3.14

Рисунок 3.15





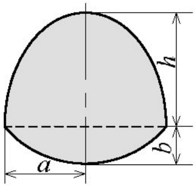
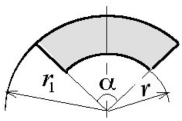
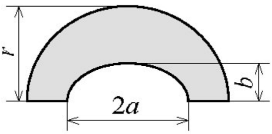


Рисунок 3.16

Рисунок 3.17

Рисунок 3.18





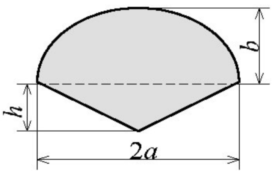
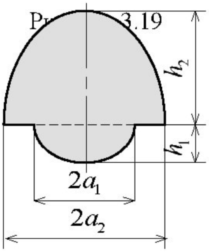
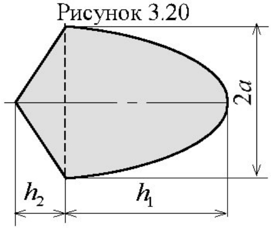


Рисунок 3.19

Рисунок 3.20

Рисунок 3.21





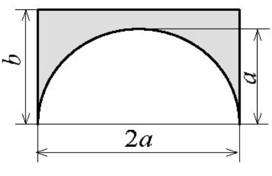
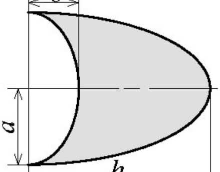
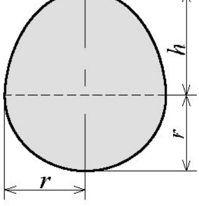


Рисунок 3.22

Рисунок 3.23

Рисунок 3.24





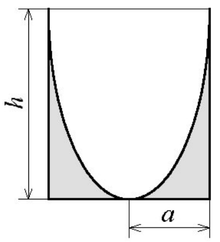


Рисунок 3.25 Рисунок 3.26 Рисунок 3.27

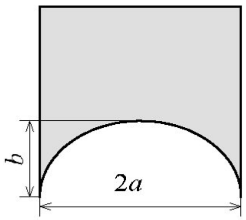


Рисунок 3.28

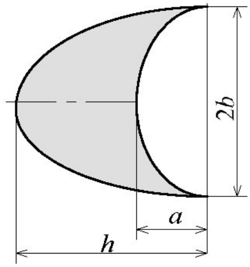


Рисунок 3.29

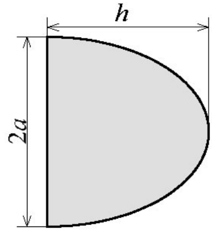


Рисунок 3.30

ОТВЕТЫ

1.2.1. 7/3. **1.2.2.** 1. **1.2.3.** $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$. **1.2.4.** $4e$. **1.2.5.** 8/3. **1.2.6.** 2/3. **1.2.7.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **1.2.8.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **1.2.9.** -3/2. **1.2.10.** $6\ln 2 - 2$. **1.4.1.** 1/2. **1.4.2.** π. **1.4.3.** 2. **1.4.4.** π. **1.4.5.** Расходится.

2.1.1. 1/2. **2.1.2.** $a^2\ln 2$. **2.1.3.** 32/3. **2.1.4.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2.1.5.** 12. **2.1.6.** 2. **2.1.7.** 3/2. **2.1.8.** $4\rho^2/3$. **2.1.9.** $3\pi a^2$. **2.1.10.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2.2.1.** $a^2/4$. **2.2.2.** $\pi a^2/8$. **2.2.3.** $\pi a^2/4$. **2.2.4.** $\pi/4$. **2.2.5.** $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$. **2.3.1.** $6a$. **2.3.2.** $335a/27$. **2.3.3.** $3\pi a/2$. **2.3.4.** $6a$. **2.3.5.** $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi_0} = \frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$. **2.4.1.** $\frac{1}{3}SH$. **2.4.2.** $\frac{1}{3}\pi a^2 b$. **2.4.3.** $2\pi^2 a^2 b$. **2.4.4.** $\pi p a^2$. **2.4.5.** $5\pi^2 a^3$. **2.5.1.** $56\pi a^2/3$. **2.5.2.** а) $8\pi\sqrt{5}$;

б) $4\pi\sqrt{5}$. **2.5.3.** $4\pi^2 ab$. **2.5.4.** $64\pi a^2/3$. **2.5.5.** $12\pi a^2/5$.

2.6.1. $\frac{8}{15}\pi g\rho H^2 R^2 \approx 1477{,}8$ Дж. **2.6.2.** $656g \approx 6428{,}8 \cdot 10^3$ Н.

2.6.3. $250\pi g \cdot 5^4$ Дж. **2.7.1.** $\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$. **2.7.2.** $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

2.7.3. $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 432 с.

2 Герасимович, А. И. Математический анализ. Ч. 1. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. шк., 1989. – 287 с.

3 Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1973. – 640 с.

4 Шипачев, В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – М.: Наука, 1985. – 368 с.

5 Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк. – Ч. 2. – 1985. – 221 с.; Ч. 3. – 1985. – 208 с.

6 Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч. 1. – 446 с.; Ч. 2. – 464 с.

7 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1991. – 352 с.

8 Руководство к решению задач по высшей математике : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1. – 350 с.; Ч. 2. – 400 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ГРИБОВСКАЯ Евгения Евгеньевна
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
НОВИКОВ Сергей Петрович

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Э в е н т о в
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а

Подписано в печать 11.11.2016 г. Формат $60 \times 84\ ^1\!/_{16}$
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,19. Уч.-изд. л. 3,57. Тираж 1000 экз.
Зак. № . Изд. № 58.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель