

УДК 531.8

А. В. ЛОКТИОНОВ

Витебский государственный технологический университет, Беларусь

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Получены расчетные формулы и представлены примеры расчетов по определению кинематических характеристик пространственных исполнительных механизмов, работающих в цилиндрической и сферической системах координат. Предложены аналитические зависимости для расчета матричным методом скорости и ускорения центра схвата робота-манипулятора в подвижной и неподвижной системах координат, необходимые для прочностного расчета и оценки динамических свойств механизма.

Введение. Для оценки технических возможностей промышленных роботов-манипуляторов [1, 2] необходимо знать их кинематические характеристики. Они требуются для решения задач, связанных с прочностным расчетом, конструированием звеньев и оценки динамических свойств механизма. Знание отдельных составляющих вектора абсолютной скорости в подвижной системе координат для оснащенных режущим инструментом исполнительных механизмов позволяет определить кинематические углы резцов [3], которые предопределяют их установку. При проведении силового расчёта исполнительного механизма необходимо определить силы инерции и сопротивления движению звеньев, для чего должны быть известны скорости и ускорения центра схвата робота [2, 4, 5].

Существуют различные методы определения геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Наиболее простой векторный метод расчета целесообразно применять в случаях, при которых звенья расположены в одной плоскости [1, 6]. Методика его применения предполагает определение проекций звеньев, а затем векторов скорости и ускорения на неподвижные оси координат. Установлено, что применительно к двухзвенному исполнительному механизму с тремя степенями подвижности [6] векторный метод достаточно сложен и поэтому не используется для пространственных схем размещения звеньев роботов-манипуляторов.

В пособиях [7, 8, 9] скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} в сферической системе координат находятся как частный случай их расчёта в ортогональных криволинейных координатах. Для расчёта скорости берутся частные производные от декартовых координат x , y , z точки по соответствующим криволинейным координатам q_1 , q_2 , q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1 , H_2 , H_3 . Модуль скорости v точки вычисляется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$. Для

расчёта ускорения также используются коэффициенты Ляме. При этом находятся соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщённым скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 , а затем – полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по \dot{q}_i и q_i . Такая методика расчёта кинематических параметров достаточно трудоёмка, причем искомые \vec{v} и \vec{a} определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, Θ , связанные с движущейся точкой M .

В работах [10, 11] скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление в [10] использовано для перехода от прямоугольной и цилиндрической к сферической системе координат. В статьях [3, 12] предложена методика расчета кинематических характеристик движения точки в проекциях на подвижные оси координат, основанная на матричном представлении формул Эйлера. В таком случае движение твердого тела рассматривается как движение подвижного трехмерного пространства в неподвижном.

Отметим, что тенденция сокращения часов, отведенных в университетах на изучение теоретической механики, привела к отсутствию в программах многих важных разделов кинематики [12]. Задачи, решение которых основано на использовании полярной или цилиндрической систем координат, становятся объектами только научных исследований. Сферические координаты прописаны исключительно в списках компетенций курса математики [9, 12]. При подготовке инженеров в технических вузах практически не используются методы матричной, линейной и тензорной алгебр [13]. В то же время высокая степень формализации операций над матрицами позволяет получить строгие результаты, имеющие физический смысл, путем алгебраических преобразований. Преимущество матричной структуризации пространства проявляется в наибольшей степени при определении ускорений точек движущегося тела [13].

Геометрические и кинематические параметры робота можно определить путем анализа комбинации параллельного переноса и поворота. Скорости точек находятся в результате дифференцирования текущих координат центра схвата. Удобство использования матричного способа заключается в том, что скорость и ускорение центра схвата робота-манипулятора в подвижной системе координат легко определяются с помощью транспонированных матриц перехода. В представленной работе рассматривается методика применения матричного метода для расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов в цилиндрической и сферической системах координат, а также двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности.

Определение матричным методом кинематических параметров в цилиндрических координатах. Рассмотрим особенности выполнения кинематического анализа в цилиндрических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности.

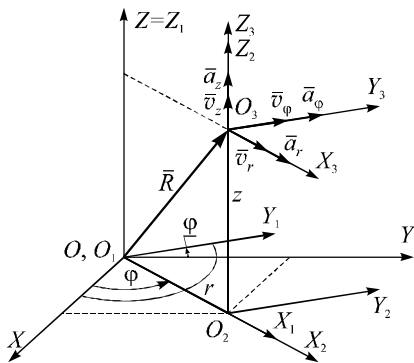


Рисунок 1 – Расчетная схема для цилиндрических координат

Тогда в рассматриваемом случае координаты точки M в неподвижной системе XYZ выражаются через ее же координаты в системе $X_3Y_3Z_3$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Вектор скорости \vec{v} точки M в системе отсчета XYZ при $x_3, y_3, z_3 = \text{const}$ определяется дифференцированием выражения (1) по времени:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{A}'_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \mathbf{A}'_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где \mathbf{A}'_φ – матрица, каждый элемент которой получается дифференцированием по φ элементов матрицы \mathbf{A}_φ .

В случае, при котором точка M совпадает с O_3 , т. е. при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$, выражения проекций вектора ее скорости на неподвижные оси координат XYZ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \dot{y} &= v_y = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \dot{z} &= v_z = \dot{z}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}. \quad (4)$$

Предположим, что текущее положение точки M относительно подвижной системы отсчета $X_3Y_3Z_3$, связанной с точкой O_3 (рисунок 1, точка M на нем не показана), определяется координатами $x_3, y_3, z_3 = \text{const}$. В прямоугольной неподвижной системе отсчета XYZ текущие координаты той же точки равны x, y и z .

Положение точки O_3 с одной стороны задается вектором \vec{R} , с другой – в цилиндрической подвижной системе координат, определяется расстоянием r , углом φ , и отрезком $O_2O_3 = z$.

Положение вектора скорости по отношению к системе осей XYZ определяется через соответствующие направляющие косинусы.

Представим цилиндрическую систему координат в виде схемы манипулятора, звенья которого O_1O_2 , O_2O_3 и O_3M (см. рисунок 1). С целью последовательного преобразования координат схвата манипулятора из системы отсчета, связанной с последним звеном $X_3Y_3Z_3$, к неподвижной системе отсчета XYZ введем в рассмотрение подвижные системы отсчета $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$, начала которых находятся соответственно в точках $O_1 \equiv O$ и O_2 .

Пусть \mathbf{A}_{12} – матрица размерностью 3×3 , элементами a_{ij} которой являются направляющие косинусы углов между i -той осью первой системы отсчета и j -той осью второй. В рассматриваемом случае между осями систем координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$, а также $X_2Y_2Z_2$ и $X_3Y_3Z_3$, углы таковы, что их косинусы образуют единичные матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 . Углы же между осями систем XYZ и $X_1Y_1Z_1$ дают матрицу \mathbf{A}_φ . Тогда общая матрица перехода от XYZ к $X_3Y_3Z_3$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_\varphi.$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_3 точки M в системе $X_3Y_3Z_3$ (r, φ, z)

$$\vec{v}_3 = \mathbf{A}^T \vec{v}, \quad (5)$$

где \mathbf{A}^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке,

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_\varphi^T = \mathbf{A}_\varphi^T.$$

Векторы \vec{v} , \vec{v}_3 в равенствах (2) и (5) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по базисам систем отсчета XYZ и $X_3Y_3Z_3$ соответственно.

С учетом (2) равенство (5) приобретает вид

$$\vec{v}_3 = \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}'_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}'_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из формулы (6) легко определяются проекции вектора скорости точки M на подвижные оси координат $X_3Y_3Z_3$, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид

$$\dot{x}_3 = v_r = \dot{r}, \quad \dot{y}_3 = v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad \dot{z}_3 = v_z = \dot{z}. \quad (7)$$

Модуль скорости точки O_3 определяется из выражений (7) формулой (4), а направление скорости – направляющими косинусами.

Теперь матричным методом определим ускорение в цилиндрической системе координат. Вектор ускорения \vec{a} точки M в системе XYZ определится дифференцированием по времени равенства (2):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{v}} = (\mathbf{A}''_\varphi \dot{\varphi}^2 + \mathbf{A}'_\varphi \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + 2\mathbf{A}'_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + (\mathbf{A}''_\varphi \dot{\varphi}^2 + \mathbf{A}'_\varphi \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Отсюда находим проекции вектора ускорения точки M на неподвижные оси координат XYZ , которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ таковы:

$$\begin{aligned} a_x &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \varphi; \\ a_y &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cos \varphi; \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Соответственно модуль ускорения точки $M \equiv O_3$

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \quad (10)$$

Вектор ускорения \vec{a} точки M в системе $X_3Y_3Z_3$ (или r, φ, z , см. рисунок 1)

$$\vec{a}_3 = \mathbf{A}^T \vec{a}.$$

С учетом (8) проекции вектора ускорения точки M на подвижные цилиндрические оси координат $X_3Y_3Z_3$ при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{x_3} &= a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \\ a_{y_3} &= a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}; \\ a_{z_3} &= a_z = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Как и в случае со скоростями, направление ускорения по отношению к рассматриваемым системам осей определяется через направляющие косинусы.

Полученные расчетные формулы (3), (4), (7), (9), (10), (11) в частном случае применимы для движения, заданного в полярных координатах. Они позволяют найти проекции скорости и ускорения на радиальное и поперечное направления.

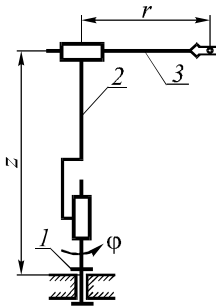


Рисунок 2 – Схема робота-манипулятора, работающего в цилиндрических координатах

Изложенную методику расчета скорости и ускорения целесообразно использовать для роботоманипуляторов, работающих в цилиндрической системе координат. Рассмотрим пример расчета кинематических параметров исполнительного механизма робота-манипулятора, который состоит из поворотного устройства, колонны для вертикального перемещения и выдвигаемой руки со схватом (рисунок 2) [14, задача 12.38].

Применительно к заданной схеме координаты центра схвата робота-манипулятора в неподвижной системе XYZ при известных $\varphi(t), z(t), r(t)$, выражаются формулой (1), в которой $x_3 = y_3 = z_3 = 0$. Выражение для расчета скорости центра схвата имеет вид (4), а ее проекции скорости на подвижные цилиндрические оси координат определяются из (7). Формула для расчета ускорения центра схвата имеет вид (10), а его проекции на оси цилиндрической системы координат определяются из (11).

При заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$ уравнения траектории центра схвата в системе отсчета XYZ получаются в параметрической форме из формулы (1), где роль параметра играет время t . Они имеют вид

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (12)$$

В цилиндрической системе координат уравнения траектории центра схвата находятся из формулы (1) с использованием транспонированной матрицы \mathbf{A}_φ^T

$$r = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad z = z. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$, так и при $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Расчёт матричным методом кинематических параметров в сферических координатах. Определим проекции абсолютной скорости \vec{v} и ускорения \vec{a} точки M (рисунок 3, а) на оси неподвижной системы отсчета XYZ и на подвижные сферические оси $X_R Y_\varphi Z_\theta$ (R, φ, θ).

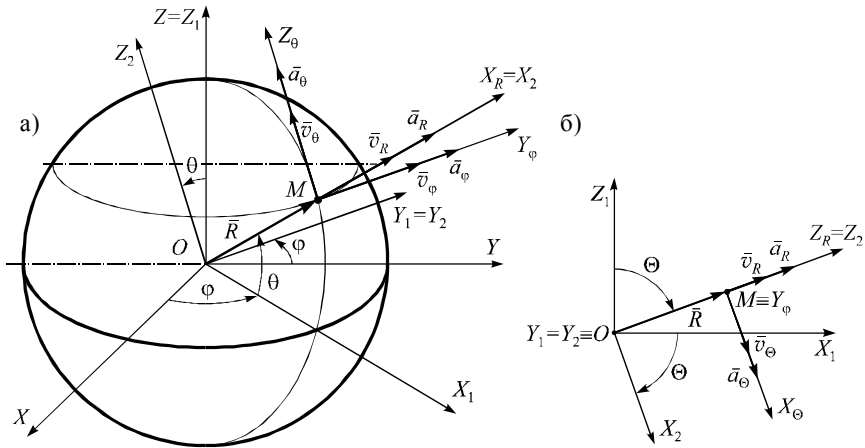


Рисунок 3 – Схема для случая сферических координат: аксонометрия (а) и проекция (б)

В прямоугольной неподвижной системе координат XYZ положение вектора \vec{R} определяется текущими координатами x, y, z точки M . В сферической подвижной системе координат положение той же точки M определяется расстоянием R , углами φ и θ . Введём также подвижные системы координат $X_1 Y_1 Z_1$; $X_2 Y_2 Z_2$, первая из которых получается путем поворота на угол φ вокруг оси Z , а вторая – в результате поворота системы $X_1 Y_1 Z_1$ на угол θ вокруг оси Y_1 .

Координаты некоторой точки M_3 (на рисунке 3, а не показана) в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой же точки в системе $X_R Y_\varphi Z_\theta$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} x_R \\ y_\varphi \\ z_\theta \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для точки M имеем $x_R, y_\varphi, z_\theta = 0$. Поэтому вектор ее скорости \vec{v} в системе XYZ определяется выражением

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}'_\varphi \mathbf{A}_\theta \dot{\varphi} + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}'_\theta \dot{\theta}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Из формулы (16) выражаем проекции вектора скорости точки M на неподвижные оси координат XYZ , которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= \dot{R} \cos \varphi \cos \theta - R \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi - R \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta; \\ \dot{y} = v_y &= \dot{R} \sin \varphi \cos \theta + R \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi - R \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta; \\ \dot{z} = v_z &= \dot{R} \sin \theta + R \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_M точки M в системе $X_R Y_\varphi Z_\theta$ (R, φ, θ)

$$\vec{v}_M = \mathbf{A}^T \vec{v}, \quad (18)$$

где \mathbf{A}^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_\theta^T \cdot \mathbf{A}_\varphi^T$.

Векторы \vec{v} и \vec{v}_M в равенствах (16) и (18) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по разным базисам систем координат XYZ и $X_R Y_\varphi Z_\theta$. С учётом (16) формула (18) будет иметь вид

$$\vec{v}_M = (\mathbf{A}^T \mathbf{A}'_\varphi \mathbf{A}_\theta \dot{\varphi} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}'_\theta \dot{\theta}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда определяются проекции вектора скорости точки M на подвижные сферические оси координат $X_R Y_\varphi Z_\theta$:

$$\dot{x}_R = v_R = \dot{R}, \quad \dot{y}_\varphi = v_\varphi = R \dot{\varphi} \cos \theta, \quad \dot{z}_\theta = v_\theta = R \dot{\theta}. \quad (19)$$

Модуль скорости точки M можно получить из формул (17) или (19):

$$v = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + R^2 \dot{\theta}^2}.$$

Положение вектора скорости как относительно осей X, Y, Z , так и X_R, Y_φ, Z_θ теперь можно получить по направляющим косинусам.

Вектор ускорения \bar{a} точки M в системе XYZ определится дифференцированием по времени выражения (16)

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = [(\mathbf{A}'_\varphi \dot{\varphi}^2 + \mathbf{A}'_\varphi \ddot{\varphi})\mathbf{A}_\theta + 2\mathbf{A}'_\varphi \mathbf{A}'_\theta \dot{\varphi} \dot{\theta} + \mathbf{A}_\varphi (\mathbf{A}''_\theta \dot{\theta}^2 + \mathbf{A}'_\theta \ddot{\theta})] \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2(\mathbf{A}'_\varphi \mathbf{A}_\theta \dot{\varphi} + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}'_\theta \dot{\theta}) \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} \ddot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Из приведенной формулы определяются проекции вектора ускорения точки M на неподвижные оси координат XYZ , которые для краткости с учётом полученных далее выражений (22) можно записать в виде

$$a_x = \ddot{x}_R \cos \varphi \cos \theta - \ddot{y}_\varphi \sin \varphi - \ddot{z}_\theta \cos \varphi \sin \theta;$$

$$a_y = \ddot{x}_R \sin \varphi \cos \theta + \ddot{y}_\varphi \cos \varphi - \ddot{z}_\theta \sin \varphi \sin \theta;$$

$$a_z = \ddot{x}_R \sin \theta + \ddot{z}_\theta \cos \theta.$$

Вектор ускорения \bar{a}_M точки M в системе $X_R Y_\varphi Z_\theta$ (R, φ, θ , см. рисунок 3, *a*)

$$\bar{a}_M = \mathbf{A}^T \bar{a}. \quad (21)$$

С учётом (20) из равенства (21) получим проекции вектора ускорения точки M на подвижные сферические оси координат $X_R Y_\varphi Z_\theta$:

$$\ddot{x}_R = a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta;$$

$$\ddot{y}_\varphi = a_\varphi = R\ddot{\varphi} \cos \theta + 2(\dot{R} \cos \theta - R\dot{\theta} \sin \theta)\dot{\varphi}; \quad (22)$$

$$\ddot{z}_\theta = a_\theta = R\ddot{\theta} + R\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta + 2\dot{R}\dot{\theta}.$$

Модуль ускорения точки M определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_R^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2}, \quad (23)$$

а направление – по направляющим косинусам.

В тех задачах, где ось Z является осью вращения, угол $\Theta = 90^\circ - \theta$ удобно отсчитывать от положительного направления этой оси Z (рисунок 3, *б*). В таком случае выражение (15) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\Theta \begin{pmatrix} x_\Theta \\ y_\varphi \\ z_R \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Матрица A_φ сохраняется, а матрица A_Θ по рисунку 3, б получается транспонированием матрицы A_Θ (формула (15)), соответствующей рисунку 3, а, относительно главной диагонали. При этом определить скорость и ускорение точки M в сферических координатах можно по описанной выше методике.

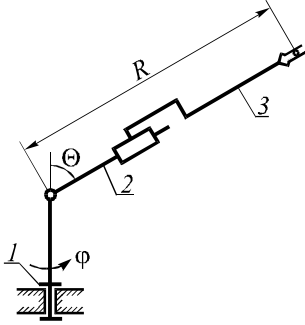


Рисунок 4 – Робот в сферической системе координат

Рассмотрим пример расчета кинематических параметров исполнительного механизма [14, задача 12.39], в котором вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ , как это показано на рисунке 4. Рука со схватом поворачивается на угол Θ и выдвигается на расстояние R . Определим скорость и ускорение центра схвата при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$.

Применительно к этой задаче координаты центра схвата (точка M) в неподвижной системе координат XYZ при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$ выражаются формулой (24).

Скорость и ускорения центра схвата в проекциях на оси XYZ и $X_\Theta Y_\varphi Z_R$ определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= R\dot{\Theta} \cos \varphi \cos \Theta - R\dot{\varphi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{R} \cos \varphi \sin \Theta; \\ \dot{y} = v_y &= R\dot{\Theta} \sin \varphi \cos \Theta + R\dot{\varphi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{R} \sin \varphi \sin \Theta; \\ \dot{z} = v_z &= -R\dot{\Theta} \sin \Theta + \dot{R} \cos \Theta; \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2 \dot{\Theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{R}^2}; \\ \dot{x}_\Theta = v_\Theta &= R\dot{\Theta}; \quad \dot{y}_\varphi = v_\varphi = R\dot{\varphi} \sin \Theta; \quad \dot{z}_R = v_R = \dot{R}. \\ a_x &= \ddot{x}_\Theta \cos \varphi \cos \Theta - \ddot{y}_\varphi \sin \varphi + \ddot{z}_R \cos \varphi \sin \Theta; \\ a_y &= \ddot{x}_\Theta \sin \varphi \cos \Theta + \ddot{y}_\varphi \cos \varphi + \ddot{z}_R \sin \varphi \sin \Theta; \\ a_z &= -\ddot{x}_\Theta \sin \Theta + \ddot{z}_R \cos \Theta; \\ \ddot{x}_\Theta &= a_\Theta = R\ddot{\Theta} + 2\dot{R}\dot{\Theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin \Theta \cos \Theta; \\ \ddot{y}_\varphi &= a_\varphi = R\ddot{\varphi} \sin \Theta + 2(\dot{R} \sin \Theta - R\dot{\Theta} \cos \Theta)\dot{\varphi}; \\ \ddot{z}_R &= a_R = \ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned}$$

Модуль ускорения точки M найдётся по формуле (23).

При заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме можно получить из формулы (24), где роль параметра играет время t . Они имеют вид

$$x = R \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \Theta. \quad (25)$$

При заданных $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу A^T , получим из формулы (24). Они имеют вид

$$R = x \cos \varphi \sin \Theta + y \sin \varphi \sin \Theta + z \cos \Theta;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right); \quad \Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right). \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$, так и при $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Расчёт матричным методом кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности.

Исполнительный механизм (его схема приведена на рисунке 5) состоит из поворотного устройства с вертикальной осью вращения, угол поворота которой φ , и двух звеньев l_1 , l_2 , расположенных в вертикальной плоскости Y_1OZ_1 (углы поворота звеньев – θ_1 и θ_2).

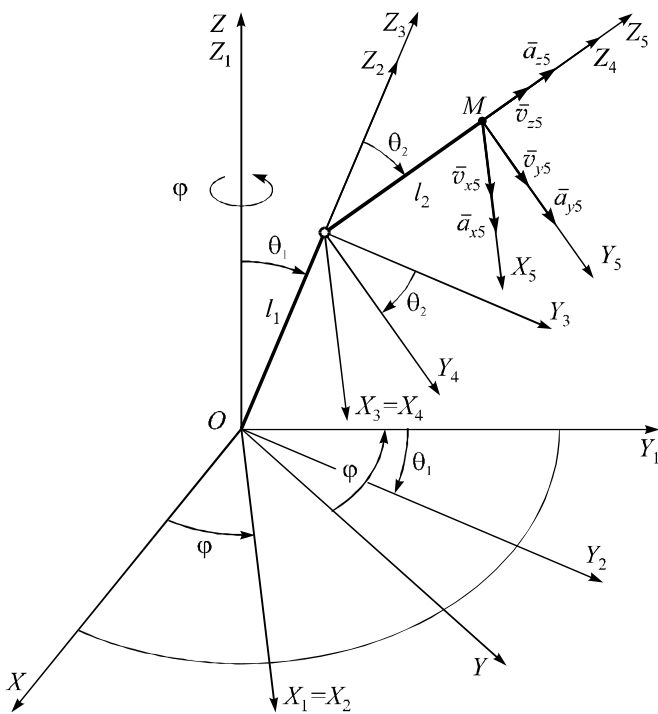


Рисунок 5 – Расчетная схема двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности

Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае могут быть связаны с координатами этой же точки в системе $X_5Y_5Z_5$ путем следующих преобразований. Система XYZ поворотом на угол φ переводится в подвижную систему $X_1Y_1Z_1$ таким образом, что механизм размещается в вертикальной плоскости Y_1OZ_1 . Следующим преобразованием переводим систему координат $X_1Y_1Z_1$ в систему $X_2Y_2Z_2$ поворотом вокруг оси OX_1 на угол θ_1 . Затем, перемещая начало координат $X_2Y_2Z_2$ на длину l_1 , получим систему $X_3Y_3Z_3$. Поворотом системы $X_3Y_3Z_3$ вокруг оси OX_3 на угол θ_2 приходим к системе отсчета $X_4Y_4Z_4$, которую перемещаем на длину l_2 и окончательно получим систему $X_5Y_5Z_5$. Для каждого поворота по описанному выше правилу составляются матрицы \mathbf{A}_{θ_1} , \mathbf{A}_{θ_2} , \mathbf{A}_{φ} , с помощью которых определяются координаты точки M . В результате выполненного анализа установлено, что при других способах преобразования координат усложняются матрицы перехода и, следовательно, в целом весь расчёт.

Координаты точки M_5 (на рисунке 5 не показана) в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой же точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

Принимая $x_5, y_5, z_5 = 0$, и для точки M получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Отсюда определяются проекции радиус-вектора точки M на неподвижные оси координат XYZ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} x_M &= -l_1 \sin \varphi \sin \theta_1 - l_2 \sin \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ y_M &= l_1 \cos \varphi \sin \theta_1 + l_2 \cos \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ z_M &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (28)$$

Вектор скорости \vec{v} точки M в системе XYZ определяется дифференцированием текущих координат равенства (27) по времени из выражения

$$\begin{aligned} \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ &+ (\mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}'_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда проекции вектора скорости точки M на неподвижные оси координат XYZ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x = -l_1(\cos \varphi \sin \theta_1 \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos \theta_1 \dot{\theta}_1) - \\ &\quad - l_2(\cos \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)), \\ \dot{y} &= v_y = l_1(-\sin \varphi \sin \theta_1 \dot{\varphi} + \cos \varphi \cos \theta_1 \dot{\theta}_1) + \\ &\quad + l_2(-\sin \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\varphi} + \cos \varphi \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)), \\ \dot{z} &= v_z = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2(-\sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2))\end{aligned}\quad (30)$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_M точки M в системе $X_5Y_5Z_5$

$$\vec{v}_M = \mathbf{A}^T \vec{v}, \quad (31)$$

где \mathbf{A}^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_{\theta_2}^T \mathbf{A}_{\theta_1}^T \mathbf{A}_{\varphi}^T$.

Векторы \vec{v} и \vec{v}_M в равенствах (29) и (31) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по разным базисам систем координат XYZ и $X_5Y_5Z_5$. С учётом (29) равенство (31) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \mathbf{A}^T \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \mathbf{A}^T (\mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}'_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отсюда определяются проекции вектора скорости точки M на подвижные оси координат $X_5Y_5Z_5$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_5 &= v_{x_5} = 0, \\ \dot{y}_5 &= v_{y_5} = l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2, \\ \dot{z}_5 &= v_{z_5} = l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}\quad (32)$$

Модуль скорости точки M определяется из равенств (30) или (32):

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \sqrt{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2))^2}.\end{aligned}$$

Направление скорости снова находится через направляющие косинусы.

Вектор ускорения \bar{a} точки M в системе координат XYZ определится дифференцированием равенства (29):

$$\begin{aligned} \bar{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = & (\mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}^2 + \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi} + 2\mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi} + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}''_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \ddot{\theta}_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ & + (2\mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi} + 2\mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}''_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1^2 + 2\mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \mathbf{A}'_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\ & + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}'_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_1 + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}'_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi} + \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}'_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \\ & + \mathbf{A}''_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}^2 + \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}'_{\theta_2} \dot{\varphi} \dot{\theta}_2 + \mathbf{A}'_{\varphi} \mathbf{A}_{\theta_1} \mathbf{A}_{\theta_2} \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из полученной формулы определяются проекции вектора ускорения точки M на неподвижные оси координат XYZ .

Вектор ускорения \bar{a}_M точки M в системе $X_5Y_5Z_5$ (см. рисунок 5)

$$\bar{a}_M = \mathbf{A}^T \bar{a}. \quad (34)$$

С учётом (33) из равенства (34) получаем проекции вектора ускорения точки M на подвижные оси координат $X_5Y_5Z_5$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_5 = a_{x_5} &= 0, \\ \ddot{y}_5 = a_{y_5} &= l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \\ \ddot{z}_5 = a_{z_5} &= l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_1 \dot{\varphi} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \dot{\varphi} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin 2(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (35)$$

Модуль ускорения точки M определяется по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_5^2 + \ddot{y}_5^2 + \ddot{z}_5^2} = \sqrt{a_{x_5}^2 + a_{y_5}^2 + a_{z_5}^2}.$$

Как и во всех рассмотренных ранее случаях направление ускорения определяется направляющими косинусами.

Полученные расчётные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки M двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения можно использовать для двухзвенных и многозвенных исполнительных механизмов с тремя и более степенями подвижности, имеющие исходные расчетные кинематические и конструктивные параметры роботов-манипуляторов в виде $\varphi = \varphi(t)$, $l_1, l_2, \dots, l_k, \theta_1 = \theta_1(t), \theta_2 = \theta_2(t), \dots, \theta_k = \theta_k(t)$.

Рассмотрим пример расчета кинематических параметров исполнительного механизма [14, задача 12.40], в котором вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ . Рука со схватом состоит из двух звеньев, каждый из которых может поворачиваться на свой угол, первое звено на угол θ_1 , второе – на угол θ_2 (рисунок 6). Требуется найти скорость и ускорение центра схвата при заданных законах движения $\varphi(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$.

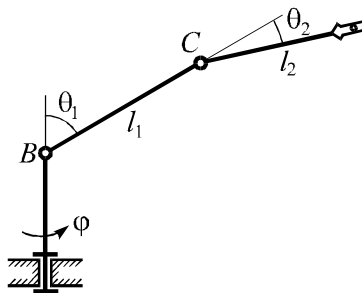


Рисунок 6 – Расчетная схема исполнительного механизма

Применительно к рассматриваемой задаче координаты центра схвата (точка M) в неподвижной системе координат XYZ при заданных $\varphi(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ выражаются формулой (27). Скорость и ускорения центра схвата определяются из (32) и (35).

При заданных $\varphi = \varphi(t)$, $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (28), где роль параметра играет роль t . Используя транспонированную матрицу A^T , при заданных $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ получим траекторию центра схвата в подвижных координатных осях $X_5Y_5Z_5$.

Выводы:

1 Проанализированы методика и методы расчета кинематических параметров исполнительных механизмов. Получены расчетные формулы и представлены примеры расчета для определения кинематических характеристик пространственных исполнительных механизмов, работающих в цилиндрической и сферической системах координат.

2 Предложены аналитические зависимости для расчета матричным методом скорости и ускорения центра схвата робота-манипулятора в подвижной и неподвижной системах координат. Они могут быть использованы для прочностного расчета и оценки динамических свойств механизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Фролов, К. В. Механика промышленных роботов Ч. 1. Кинематика и динамика / К. В. Фролов, Е. И. Воробьев. – М.: Высшая школа, 1988. – 304 с.
- 2 Козырев, Ю. Г. Промышленные роботы: справочник / Ю. Г. Козырев. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
- 3 Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, О. С. Лысова // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2009. – № 24. – С. 293–299.

4 Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол. – М.: Наука, 1976. – 104 с.

5 Чернышева, И. Н. Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов: учеб. пособие для студ. вузов / И. Н. Чернышева, А. К. Мусатов, Н. А. Глухов. – М.: МГТУ, 1990. – 80 с.

6 Локтионов, А. В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Современные методы проектирования машин: республ. межведомств. сб. науч. тр. Вып. 2. В 7 т. Т. 2. Качество изделий машиностроения. Проектирование материалов и конструкций / под общ. ред. П. А. Витязя. – Минск: УП «Технопринт», 2004. – С. 132–136.

7 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики. Т. 1 / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

8 Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1 / Н. Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 468 с.

9 Федута, А. А. Теоретическая механика и методы математики: уч. пособие / А. А. Федута, А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск: УП «Технопринт», 2000. – 504 с.

10 Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров в цилиндрических координатах матричным методом / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2003. – Вып. 16. – С. 59–63.

11 Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2004. – Вып. 17. – С. 115–118.

12 Рощева, Т. А. Универсальные алгоритмы кинематики точки и твердого тела / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов, О. С. Киселева // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2012. – Вып. 6. – С. 221–227.

13 Рощева, Т. А. Методические возможности использования теории линейных преобразований при изложении курса теоретической механики / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2009. – Вып. 3. – С. 197–205.

14 Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

A. V. LOKTIONOV

CALCULATION OF KINEMATIC PARAMETERS OF SPATIAL EXECUTIVE MECHANISMS

The calculation formulas are received and the examples of calculations for the spatial executive mechanisms' kinematic characteristics in cylindrical and spherical systems of coordinates are presented. There were proposed the analytical dependences for matrix method calculation of speed and acceleration of the robot-manipulator gripper center in the mobile and motionless systems of the coordinates. These dependences are necessary for strength calculation and for the estimation of mechanism dynamic properties.

Получено 04.02.2014