ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 9. Гомель, 2016

УДК 378.141.2/.5:531

А. О. ШИМАНОВСКИЙ, И. Е. КРАКОВА
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

О МЕЖДУНАРОДНЫХ ОЛИМПИАДАХ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ 2014 и 2015 гг.

Представлена информация о X и XI Международных олимпиадах по теоретической механике, которые проводились в Белорусском государственном университете транспорта. Приведены условия и решения задач, сведения о результатах олимпиад.

Международная олимпиада по теоретической механике организуется БелГУТом, начиная с 2005 года. Информацию о предыдущих таких мероприятиях можно найти в изданных нами предыдущих аналогичных сборниках [1, 2]. Организаторы из года в год расширяют представительство участниках, приглашая для участия большее количество вузов не только из стран ближнего зарубежья, но и иных государств. В 2014 г. нашими участниками впервые стали представители Китая и Турции.

Олимпиады традиционно включали два конкурса: теоретический (личнокомандный) и «Брейн-ринг» (командный). Информацию о некоторых особенностях их организации можно найти в статье [3].

На теоретических конкурсах участникам олимпиады предлагались восемь задач (две по статике, две по кинематике и четыре по динамике), на решение которых отводилось 4 часа. Проверка работ осуществлялась жюри, в состав которого были включены преподаватели вузов – участников олимпиады. Победитель в командном зачете определялся по сумме трех лучших результатов представителей вуза. Студенты, не согласные с оценкой их решений задач теоретического конкурса, могли доказать правильность решений во время апелляции.

В конкурсе «Брейн-ринг» командам, состоящим из трех студентов, на 60 минут предлагались для решения тридцать мини-задач – по десять соответственно по статике, кинематике и динамике. Особенностью данного конкурса является то, что победитель определяется только на основе правильных ответов (решения не проверяются). Если команды набирали равное количество правильных ответов, то им присуждалось одинаковое место.

Предложенные студентам для решения на теоретических конкурсах задания включали разработанные А. О. Шимановским комплекты задач, далее представленные в сборнике. Каждая задача оценивалась, исходя из максимального балла 10. Отметим, что сложность задач в целом соответствовала уровню подготовки участников. Об этом свидетельствуют результаты соревнований. Так абсолютный победитель, студент Белорусского государственного университета (БГУ) Лобач И. Л., два года подряд набирал по 79 баллов из 80 возможных. При этом большая группа участников набрала 30 баллов и более.

На сей раз эффективность решения задач статики, кинематики и динамики была приблизительно одинаковой. Это говорит о том, что при разработке заданий удалось найти баланс сложности между разделами, позволивший студентам проявить свои умения в решении разных задач.

В командном зачете два года подряд первенствовала команда БГУ, причем в 2015 г. она разделила первое место с командой МФТИ. Призовые места заняли команды Санкт-Петербургского, Хохайского (Китай) и Туркменского государственного университетов. В конкурсе «Брейн-Ринг» оба раза победила команда Уфимского государственного нефтяного технического университета. Более подробную информацию об олимпиадах можно найти в приложении, а также на сайте http://www.engmech.by.

Параллельно проведению олимпиад ежегодно проходили научно-методические семинары преподавателей, на которых они могли обменяться опытом организации учебно-методической и научной работы на кафедрах теоретической механики вузов разных государств.

Организаторы надеются, что накопившийся опыт проведения олимпиад по теоретической механике будет положен в основу организации очередных состязаний студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Механика. Теория, задачи, учебно-методические разработки** : сб. науч. тр.– Гомель : БелГУТ, 2006. – 144 с.

2 **Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки**: междунар. сб. науч. тр. / М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2007. – Вып. 1. – 107 с.; 2008. – Вып. 2. – 148 с.; 2009. – Вып. 3. – 242 с.; 2010. – Вып. 4. – 226 с.; 2011. – Вып. 5. – 299 с.; 2012. – Вып. 6. – 291 с.; 2013. – Вып. 7. – 283 с. – Вып. 8. – 290 с.

3 **Shimanovsky, A. O.** The holding of contests in engineering mechanics / A. O. Shimanovsky // International Journal of Mechanical Engineering Education. – Vol. 41, № 2. – 2013. – P. 107–114.

A. O. SHIMANOVSKY, I. E. KRAKAVA
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

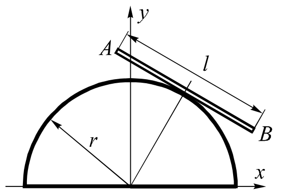
ABOUT INTERNATIONAL ENGINEERING MECHANICS CONTESTS 2014 AND 2015

There is the information about 10th and 11th International Engineering Mechanics Contest in Belarusian State University of Transport: problem situations and solutions, some Contest results.

Получено 30.04.2016

1 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА (2014 г.)

Задача С1–2014



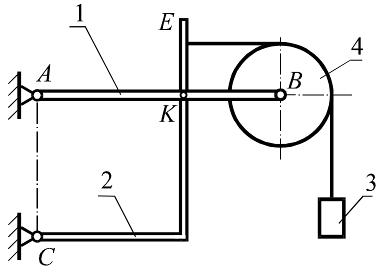
Однородный тонкий стержень AB длиной l опирается на полуцилиндр с радиусом r. Коэффициент трения сцепления между стержнем и полуцилиндром равен f, коэффициент трения качения δ.

Найти максимально возможное значение координаты x крайней точки B стержня при его равновесии.

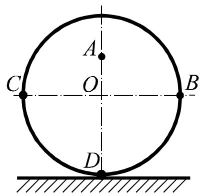
Задача С2–2014

Изображенная на рисунке конструкция состоит из невесомых стержней 1 и 2, соединенных в точке K с помощью шарнира. Груз 3 связан со стержнем 2 с помощью невесомой нити, переброшенной через блок 4. Силы тяжести груза 3 и блока 4 одинаковы. Радиус блока 4 равен r, $KB = 2r$, $AK = 3r$.

Определить, при каком расстоянии AC реакции в точках A и C будут отличаться в 2 раза.



Задача К1–2014



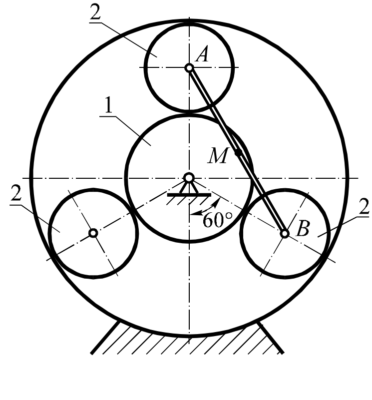
Диск радиуса r катится по горизонтальной поверхности с проскальзыванием, имея постоянную угловую скорость. При этом точки A и B имеют одинаковые скорости и ускорения. $OA = r/2$.

Найти отношения скоростей и ускорений точек C и D.

Задача К2–2014

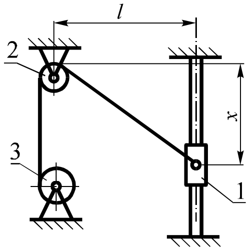
В изображенном на рисунке планетарном механизме центральное колесо 1 имеет в данный момент угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1. Радиусы колес 1 и 2 равны r_1 и r_2 соответственно.

Точка M движется вдоль стержня AB и в данный момент находится в его центре. Найти относительную скорость точки M, если известно, что вектор ее абсолютного ускорения в рассматриваемый момент времени направлен вдоль стержня AB.

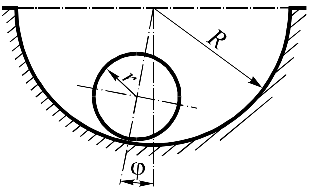


Задача Д1–2014

Груз 1 массы m поднимается по вертикальному стержню при помощи троса, перекинутого через блок *2* (его размерами можно пренебречь), отстоящий от стержня на расстоянии l. Коэффициент трения между грузом и стержнем равен f. Определить зависимость силы натяжения T от расстояния x, если трос наматывается на равномерно вращающийся барабан 3 с линейной скоростью v_0.



Задача Д2–2014

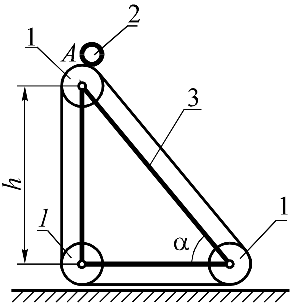


Сплошной однородный диск радиуса r, катится без скольжения по дуге окружности радиуса R. Найти, какую скорость надо сообщить центру диска в нижнем положении, чтобы при достижении угла $\varphi = 60°$ сила нормального давления цилиндра на поверхность уменьшилась в 1,5 раза.

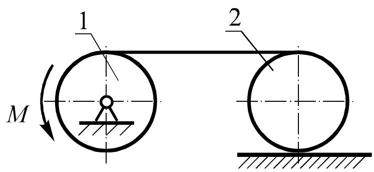
Задача Д3–2014

Через три одинаковых однородных цилиндра 1, имеющих массы m и радиусы r каждый, перекинута невесомая нерастяжимая лента (конвейер). Материальная точка 2 массы $2m$ располагается на неподвижном конвейере в самой высокой точке A, после чего система начинает движение. Тело 2 не скользит по ленте и отрывается от нее сразу после соприкосновения с правым нижним цилиндром. Трение в шарнирах, а также между лентой и горизонтальной плоскостью пренебрежимо мало.

Определить максимальную скорость корпуса 3, если его масса равна $3m$. Известны также расстояние h и угол α.



Задача Д4–2014

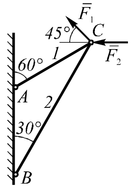
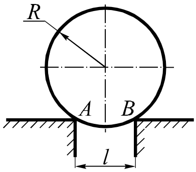
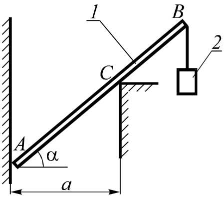
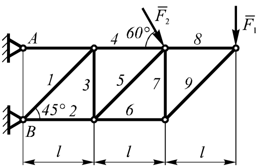
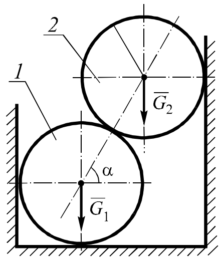
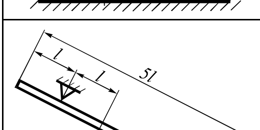


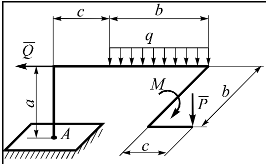
Однородный цилиндр 1, вращающийся вокруг неподвижной оси под действием пары сил, с помощью нерастяжимой нити связан с таким же цилиндром, катящимся по горизонтальной поверхности.

Возможны два случая: а) цилиндр 2 катится по плоскости без проскальзывания; б) трение между цилиндром 2 и плоскостью отсутствует. Найти, для какого из этих случаев угловое ускорение цилиндра 1 больше и во сколько раз.

2 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ КОНКУРСА «БРЕЙН-РИНГ» (2014 г.)

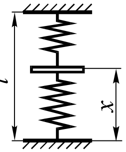
СТАТИКА

<table>
<tr><td>
</td><td>1. Дано: $F_1 = 5$ Н; $F_2 = 30$ Н. Стержни невесомы.
Определить силу в стержне 2.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Однородный шар веса 30 Н и радиуса $R = 20$ см опирается на поверхность в точках A и B. Найти реакцию в точке A, если $l = 20$ см.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>3. Невесомый стержень 1 длины l, к концу которого прикреплен груз 2 веса G, опирается в точке A на вертикальную плоскость, а в точке C – на уступ. Определить, пренебрегая трением, угол α, если известно расстояние a.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>4. Найти силу, действующую в стержне 5 фермы, если F_1 =10 кН, F_2 =20 кН.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>5. Дано: $G_1 = 15$ Н; $G_2 = 30$ Н, α = 60°.
Определить силу давления шара 1 на стенку</td></tr>
<tr><td>
</td><td>6. Найти минимальное значение коэффициента трения, при котором однородный стержень будет в равновесии в изображенном положении. α = 30°</td></tr>
</table>

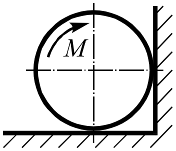


7. Дано: $P = 5$ Н; $Q = 30$ Н, $q = 2$ Н/м, $M = 10$ кН м, $a = 4$ м, $b = 5$ м, $c = 3$ м.

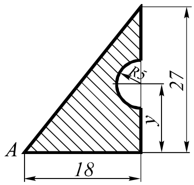
Найти момент заделки в точке A.



8. Тонкая пластинка массы m зажата между двумя вертикальными пружинами. Длина каждой пружины в свободном состоянии равна l. Под действием силы P верхняя пружина сжимается на Δl_1, нижняя – на Δl_2. Определить размер x при равновесии.



9. Диск веса P и радиуса R лежит на шероховатой горизонтальной плоскости и соприкасается с шероховатой вертикальной стенкой. При каком моменте M пары сил, приложенной к диску, он будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения скольжения диска по плоскости и стенке равны f.



10. Из прямоугольного треугольника вырезали полукруг. Определить y_2, если центр тяжести полученной фигуры находится на расстоянии a от точки A.

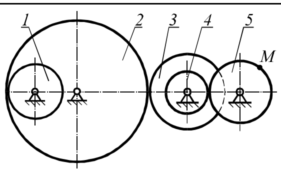
КИНЕМАТИКА

11. Найти радиус кривизны траектории точки A, координаты которой изменяются по законам: $x(t)=5-2\sin(\pi t/2)$; $y(t)=4\cos^2(\pi t/4)-9$.

12. Точка движется так, что пройденное расстояние s пропорционально разности начальной скорости v_0 и скорости v в данный момент. Коэффициент пропорциональности равен k. Определить зависимость скорости от времени

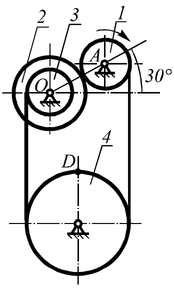
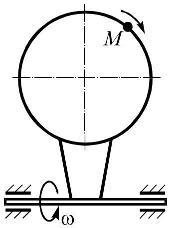
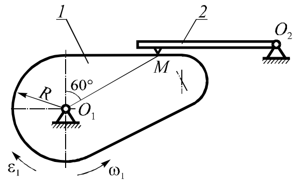
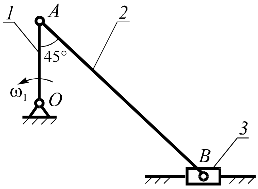
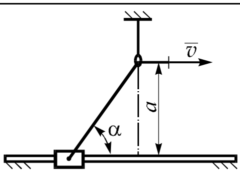
13. Точка движется по окружности радиуса $r = 200$ м из состояния покоя с постоянным касательным ускорением 1 м/с^2. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 20$ с.

14. Касательное ускорение точки, удаленной от оси вращающегося тела на 5 см, изменяется в зависимости от времени согласно соотношению $a_\tau = 2\pi t$ см/с^2. Определить ее нормальное ускорение через 3 секунды после начала движения тела.



15. Даны радиусы колес r_1, r_2, r_3, r_4, r_5.

Определить отношение угловых скоростей $\dfrac{\omega_5}{\omega_1}$.

	**16.** Определить скорость точки D, находящейся на ободе колеса 4, если $r_1 = 0{,}2$ м; $r_2 = 1{,}0$ м; $r_3 = 0{,}3$ м; $\omega_1 = 4$ рад/с.
	**17.** Точка М перемещается по вращающемуся телу с постоянной относительной скоростью u. Угловая скорость тела ω. Найти максимальное ускорение Кориолиса
	**18.** Дано: $R = 5$ см, $O_2M = 10$ см. Определить: ω_2.
	**19.** Дано: $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 0$, $OA = 12$ см, $AB = 30$ см, $DC = 10$ см. Определить: a_B.
	**20.** К ползуну, который может перемещаться по направляющей рейке, прикреплен шнур, продетый через кольцо. Шнур выбирают со скоростью $v = \text{const}$. Определить ускорение ползуна в момент, когда шнур составляет с направляющей угол α. Расстояние между кольцом и рейкой **a**.

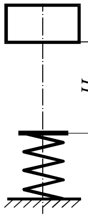
ДИНАМИКА

21. Три постоянные силы F_1, F_2, F_3, модули которых соотносятся как 1:2:3, одновременно действуют на материальную точку массы 3 кг в одном и том же направлении и сообщают ускорение 3 м/с^2. Найти значение силы F_3.

22. Динамическое уравнение движения материальной точки $2\ddot{x}+2\dot{x}+cx=0$.

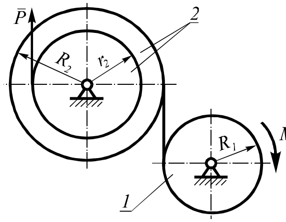
Определить минимальное значение коэффициента жесткости c, при котором происходят затухающие колебания.

23. Определить время, по истечении которого тело, брошенное под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью v_0, достигает максимальной высоты?



24. Груз M массы m = 0,5 кг падает без начальной скорости с высоты H = 1,2 м на пружину, имеющую коэффициент жесткости c = 196 Н/м.

Определить величину h максимального сжатия пружины.



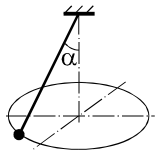
25. Дано: m_1, m_2,

Найти угловое ускорение тела 2.

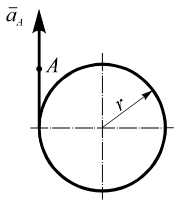
26. Гиря часового механизма имеет массу 6 кг и за сутки опускается на 120 см. Определить мощность силы тяжести гири.

27. Ракета движется вертикально вверх с постоянным ускорением a. Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая относительную скорость газов u постоянной, определить время, за которое масса ракеты уменьшится в три раза.

28. Молоток, имеющий массу 0,6 кг, ударяет по наковальне со скоростью v = 10 м/с. Длительность удара оказалась равной 0,0003 с. Определить среднюю силу удара, если он неупругий.



29. Материальная точка массы m описывает окружность в горизонтальной плоскости. Длина нити l, угол ее отклонения от вертикали α. Найти скорость движения точки.

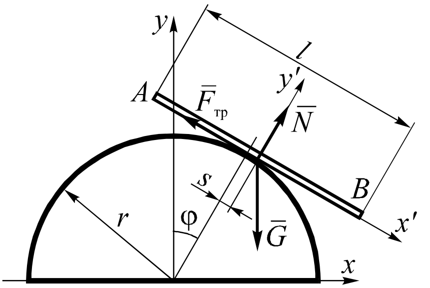


30. На однородный цилиндр намотана нить, свободный конец A которой движется вверх с постоянным ускорением a_A.

Определить ускорение центра цилиндра, если масса его равна m, а радиус r.

3 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА (2014 г.)

Задача С-1–2014



Запишем уравнения равновесия стержня в проекциях на оси $x'y'$:

$$\sum F_{ix'} = 0\ ;\ G\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0\ ;$$

$$\sum F_{iy'} = 0\ ;\ N - G\cos\alpha = 0\ .$$

Отсюда $F_{\text{тр}} = G\sin\alpha$; $N = G\cos\alpha$.

При равновесии $F_{\text{тр}} \le fN$, поэтому

$G\sin\alpha \le fG\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\varphi \le f$.

Координата точки B в системе осей xy с учетом обусловленного наличием сопротивления качению смещения точки приложения силы N на величину s

$$x_B = r\sin\varphi + \left(s + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi\ . \qquad (1)$$

Для определения максимальной координаты x_B проанализируем ее частные производные по обобщенным координатам s и φ.

$\dfrac{\partial x_B}{\partial s} = \cos\varphi > 0$, поэтому x_B максимальна при $s = s_{\max} = \delta$;

$$\frac{\partial x_B}{\partial \varphi} = r\cos\varphi + \left(\delta + \frac{l}{2}\right)(-\sin\varphi) = 0.$$

Из последнего уравнения получаем, что максимум координаты будет иметь место при $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{r}{\delta + l/2}$.

Возможны два варианта:

– если $\dfrac{r}{\delta + l/2} \le f$, то условия равновесия выполняются, следовательно,

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + tg^2\varphi} = \frac{\delta + l/2}{r^2 + (\delta + l/2)^2}\ ;\ \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = \frac{r^2}{r^2 + (\delta + l/2)^2}\ ,$$

и подстановка в (1) с учетом $s = \delta$ дает

$$x_{B\max} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (\delta + l/2)^2}} + \frac{(\delta + l/2)^2}{\sqrt{r^2 + (\delta + l/2)^2}} = \sqrt{r^2 + (\delta + l/2)^2}\ ;$$

– если же $\dfrac{r}{\delta + l/2} > f$, то при $\operatorname{tg}\varphi > \dfrac{r}{\delta + l/2}$ имеет место проскальзывание, поэтому максимальное значение координаты будет иметь место при наибольшем угле φ, для которого выполняется равновесие, и аналогично первому случаю находим

$$tg\varphi = f\ ;\ \cos^2\varphi = \frac{1}{1+f^2}\ ;\ \sin^2\varphi = \frac{f^2}{1+f^2}\ ;$$

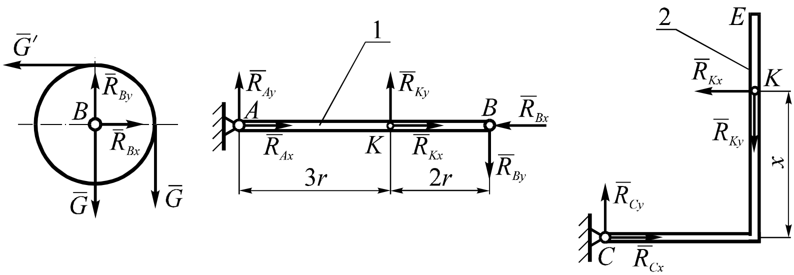
$$x_{B\max} = \frac{rf}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{\delta + l/2}{\sqrt{1+f^2}} = \frac{rf + \delta + l/2}{\sqrt{1+f^2}}\ .$$

Задача С-2–2014

Анализ равновесия блока 4 дает:

$$\sum F_{ix} = 0\ ;\ R_{Bx} = G' = G\ ;$$

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\ R_{By} = 2G\ .$$



Тогда, рассматривая равновесие стержня 1, получаем:

$$\sum M_{iA} = 0\ ;\ R_{Ky}\cdot 3r - R_{By}\cdot 5r = 0\ ;\ \ R_{Ky} = \frac{5}{3}R_{By} = \frac{10}{3}G\ ;$$

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\ R_{Ky} + R_{Ay} - R_{By} = 0\ ;\ \ R_{Ay} = R_{By} - R_{Ky} = 2G - \frac{10}{3}G = -\frac{4}{3}G\ ;$$

$$\sum F_{ix} = 0\ ;\ R_{Kx} + R_{Ax} - R_{Bx} = 0\ . \qquad (2)$$

Условия равновесия стержня 2 дают:

$$\sum M_{iC} = 0\ ;\ R_{Kx}x - G(x+r) - R_{Ky}3r = 0\ ;$$

$$R_{Kx} = \frac{R_{Ky}3r + Gx + Gr}{x} = \frac{10Gr + Gx + Gr}{x} = \frac{11Gr + Gx}{x}\ ;$$

$$\sum F_{ix} = 0\ ;\ R_{Cx} - R_{Kx} + G = 0\ ;\ \ R_{Cx} = R_{Kx} - G = \frac{11Gr + Gx}{x} = \frac{11Gr}{x}\ ;$$

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\ R_{Cy} - R_{Ky} = 0\ ;\ R_{Cy} = R_{Ky} = \frac{10}{3}G\ .$$

Следовательно, реакция цилиндрического шарнира C

$$R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2} = \sqrt{\frac{121G^2r^2}{x^2} + \frac{100}{9}G^2}\ .$$

Для шарнира A с учетом соотношения (2) получаем

$$R_{Ax} = R_{Bx} - R_{Kx} = G - \frac{11Gr}{x} - G = -\frac{11Gr}{x};$$

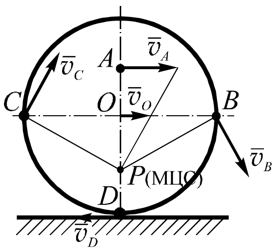
$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{\frac{121G^2r^2}{x^2} + \frac{16G^2}{9}}\ .$$

Очевидно, что $R_C > R_A$, поэтому, исходя из условия, имеем $R_C = 2R_A$. Подстановка полученных выше выражений реакций дает:

$$\frac{121G^2r^2}{x^2} + \frac{100}{9}G^2 = 4\cdot\left(\frac{121G^2r^2}{x^2} + \frac{16G^2}{9}\right);\ \frac{3\cdot 121r^2}{x^2} = \frac{100}{9} - \frac{64}{9} = \frac{36}{9};$$

$$x^2 = \frac{9\cdot 3\cdot 121r^2}{36} = \frac{3\cdot 11^2\cdot r^2}{4};\ \ x = \frac{11\sqrt{3}r}{2}.$$

Задача К-1–2014



Поскольку диск катится с проскальзыванием, и $v_A = v_B$, то мгновенный центр скоростей P находится между точками O и D, как это показано на схеме. Найдем расстояние OP.

$v_A = \omega AP$; $v_B = \omega BP$, поэтому $AP = BP$;

Из схемы следует, что $AP = OP + r/2$, $BP = \sqrt{OP^2 + r^2}$, поэтому

$$OP^2 + OP\cdot r + \frac{r^2}{4} = OP^2 + r^2;\ \ OP\cdot r = \frac{3}{4}r^2;\ \ OP = \frac{3}{4}r.$$

Поскольку скорости точек C и D $v_C = \omega CP$, $v_D = \omega DP$, то

$$\frac{v_C}{v_D} = \frac{CP}{CD} = \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{3}{4}r\right)^2}}{\frac{1}{4}r} = \frac{\frac{5}{4}r}{\frac{1}{4}r} = 5.$$

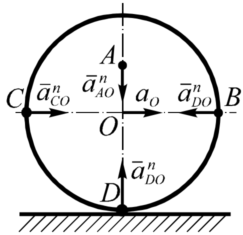
При составлении выражений ускорений точек колеса в качестве полюса примем точку O и учтем, что угловая скорость постоянна, т. е. относительные касательные ускорения отсутствуют.

Тогда ускорение точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}_{BO}^n;\quad a_B = a_O - a_{BO}^n = a_O - \omega^2 r.$$

Аналогично ускорение точки A:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^n;\quad a_A = \sqrt{a_O^2 + {a_{AO}^n}^2} = \sqrt{a_O^2 + \omega^4\left(\frac{r}{2}\right)^2}.$$



Поскольку по условию $a_B = a_A$, то получаем

$$a_O^2 - 2a_O\omega^2 r + \omega^4 r^2 = a_O^2 + \omega^4\frac{r^2}{4};$$

$$\frac{3}{4}\omega^4 r^2 = 2\omega^2 r a_O;\ a_O = \frac{3}{8}\omega^2 r.$$

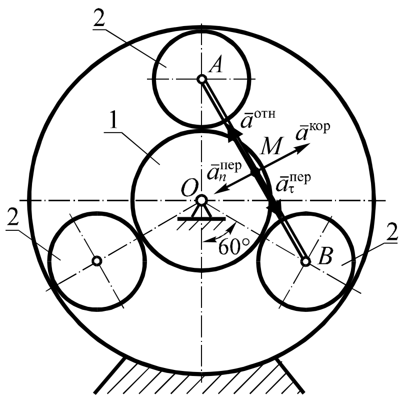
Соответственно, для точек C и D находим:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_O + \bar{a}_{CO}^n;\quad a_C = a_O + a_{CO}^n = \frac{3}{8}\omega^2 r + \omega^2 r = \frac{11}{8}\omega^2 r;$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_O + \bar{a}_{DO}^n;\quad a_D = \sqrt{a_O^2 + \left(a_{DO}^n\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{64}\omega^4 r^2 + \omega^4 r^2} = \sqrt{\frac{73}{64}\omega^4 r^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}\omega^2 r.$$

Следовательно, $$\frac{a_C}{a_D} = \frac{11\omega^2 r\cdot 8}{8\sqrt{73}\omega^2 r} = \frac{11}{\sqrt{73}}.$$

Задача К-2–2014



Ускорение точки M в соответствии с теоремой Кориолиса:

$$\bar{a}_M = \bar{a}^{\text{пер}} + \bar{a}^{\text{отн}} + \bar{a}^{\text{кор}}.$$

Если точки A и B соединить стержнями с шарниром O, то получившийся треугольник OAB будет совершать вращательное движение. Поэтому траектория переносного движения точки M – окружность, а ее соответствующее ускорение

$$\bar{a}^{\text{пер}} = \bar{a}_\tau^{\text{пер}} + \bar{a}_n^{\text{пер}}.$$

Вектор относительного ускорения $\bar{a}^{\text{отн}}$ направлен вдоль стержня, а ускорения Кориолиса $\bar{a}^{\text{кор}}$ – перпендикулярно ему.

Поэтому ускорение точки M направлено вдоль стержня AB, если $a_n^{\text{пер}} = a^{\text{кор}}$. Поскольку $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{AO} = \dfrac{\omega_1 r_1}{2(r_1 + r_2)}$, то

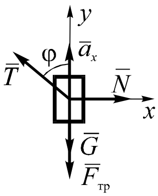
$$a_n^{\text{пер}} = \omega_{AB}^2 OM = \omega_{AB}^2 (r_1 + r_2)\sin 30^\circ = \frac{\omega_1^2 r_1^2}{4(r_1+r_2)^2}(r_1+r_2)\frac{1}{2} = \frac{\omega_1^2 r_1^2}{8(r_1+r_2)};$$

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} v_{\text{отн}} = 2\omega_{AB} v_{\text{отн}}.$$

Приравнивая ускорения, получаем

$$\frac{\omega_1^2 r_1^2}{8(r_1+r_2)} = 2\frac{\omega_1 r_1}{2(r_1+r_2)} v_{\text{отн}}; \qquad v_{\text{отн}} = \frac{\omega_1 r_1}{8}.$$

Задача Д-1–2014



Запишем уравнения движения груза 1.

$$ma_x = -T\sin\varphi + N = 0;$$

$$ma_y = T\cos\varphi - G - F_{\text{тр}}.$$

Поскольку $F_{\text{тр}} = fN = fT\sin\varphi$, то

$$T = \frac{ma_x + mg}{\cos\varphi + f\sin\varphi}. \qquad (3)$$

Из схемы конструкции следует, что $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}$; $\sin\varphi = \dfrac{l}{\sqrt{x^2+l^2}}$.

Для определения ускорения продифференцируем уравнение связи по времени

$$x^2 + l^2 = s^2; \; 2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}.$$

Здесь $\dfrac{ds}{dt} = -v_O$, поэтому $x\dfrac{dx}{dt} = -v_O s$; $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{v_O s}{x}$.

Второе дифференцирование дает

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{s' v_O x - s v_O x'}{x^2} = -\frac{-v_O^2 x - s v_O\left(-\frac{s v_O}{x}\right)}{x^2} = \frac{v_O^2 x - \frac{s^2 v_O^2}{x}}{x^2} =$$

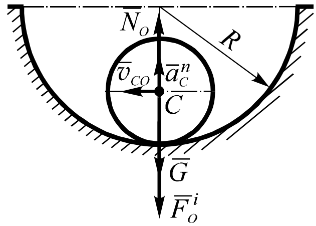
$$= \frac{v_O^2}{x^3}\left(x^2 - s^2\right) = \frac{v_O^2}{x^3}\left(x^2 - x^2 - l^2\right) = -\frac{v_O^2 l^2}{x^3}.$$

Подставляя в формулу (3), окончательно получаем

$$T = \frac{\left(mg - \frac{m v_O^2 l^2}{x^3}\right)\sqrt{x^2+l^2}}{x + fl}.$$

Задача Д-2–2014

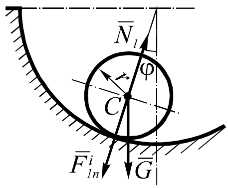
Нормальная составляющая силы инерции в нижнем положении диска



$$F_O^i = ma_c^n = \frac{mv_{C0}^2}{R-r}.$$

В соответствии с принципом Даламбера сила давления на поверхность

$$N_O = G + F_O^i = mg + \frac{mv_{C_0}^2}{R-r}. \qquad (4)$$



При отклонении на угол φ аналогично определяем:

$$N_1 = G\cos\varphi + F_{1n}^i = mg\cos\varphi + \frac{mv_{C1}^2}{R-r}. \qquad (5)$$

В начальный момент времени кинетическая энергия равна

$$T_0 = \frac{mv_{C0}^2}{2} + \frac{I_C\omega_0^2}{2} = \frac{mv_{C0}^2}{2} + \frac{mr^2}{2\cdot 2}\frac{v_{C0}^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv_{C0}^2.$$

Аналогично в конечном положении $T_1 = \frac{3}{4}mv_{C1}^2$.

Работа силы тяжести на перемещении до положения, определяемого углом $\varphi = 60°$:

$$\sum A_i = A_G = -mg\left[(R-r)-(R-r)\cos\varphi\right] = -mg\frac{R-r}{2}.$$

Подставляем в выражение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T_1 - T_0 = \sum A_i; \quad \frac{3}{4}m(v_{C1}^2 - v_{C0}^2) = -mg\frac{R-r}{2}; \quad v_{C1}^2 = v_{C0}^2 - \frac{2}{3}g(R-r).$$

Учитывая, что сила нормального давления цилиндра на поверхность уменьшилась в 1,5 раза, в результате подстановки в (4) и (5) находим:

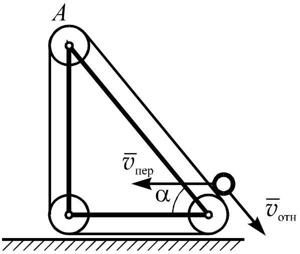
$$N_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{m}{R-r}\left(v_{C0}^2 - \frac{2}{3}g(R-r)\right) = \frac{2}{3}N_0;$$

$$\frac{3}{2}mg + \frac{3m}{R-r}v_{C0}^2 - 2mg = 2mg + 2\frac{mv_{C0}^2}{R-r}; \quad \frac{mv_{C0}^2}{R-r} = \frac{5}{2}mg; \quad v_{C0}^2 = \frac{5}{2}g(R-r).$$

Окончательно получаем

$$v_{C0} = \sqrt{2{,}5g(R-r)}.$$

Задача Д-3–2014



По теореме о сохранении количества движения материальной системы

$$m_2(v_{\text{отн}}\cos\alpha - v_{\text{пер}}) = (3m_1 + m_3)v_{\text{пер}};$$

$$2m(v_{\text{отн}}\cos\alpha - v_{\text{пер}}) = 6mv_{\text{пер}};$$

$$v_{\text{пер}} = \frac{v_{\text{отн}}\cos\alpha}{4}. \qquad (6)$$

Для определения скорости корпуса применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы

$$T - T_0 = \sum A_i .$$

В начальный момент времени $T_0 = 0$. Для конечного положения имеем

$$T = 3T_1 + T_2 + T_3 ,$$

где кинетические энергии тел

$$T_1 = \frac{mv_{\text{пер}}^2}{2} + \frac{I_C\omega_1^2}{2} = \frac{mv_{\text{пер}}^2}{2} + \frac{mr^2v_{\text{отн}}^2}{2\cdot 2r^2} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_{\text{отн}}\cos\alpha}{4}\right)^2 + \frac{mv_{\text{отн}}^2}{4} =$$

$$= \frac{mv_{\text{отн}}^2}{32}(\cos^2\alpha + 8);$$

$$T_2 = \frac{m_2((v_{\text{отн}}\cos\alpha - v_{\text{пер}})^2 + v_{\text{отн}}^2\sin^2\alpha)}{2} = \frac{m_2(v_{\text{отн}}^2 - 2v_{\text{отн}}v_{\text{пер}}\cos\alpha + v_{\text{пер}}^2)}{2} =$$

$$= \frac{m_2\left(v_{\text{отн}}^2 - 2v_{\text{отн}}\cos\alpha\frac{v_{\text{отн}}\cos\alpha}{4} + \frac{(v_{\text{отн}}\cos\alpha)^2}{4^2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{m_2\left(v_{\text{отн}}^2 - \frac{v_{\text{отн}}^2\cos^2\alpha}{2} + \frac{v_{\text{отн}}^2\cos^2\alpha}{16}\right)}{2} = mv_{\text{отн}}^2\left(1 - \frac{17}{16}\cos^2\alpha\right);$$

$$T_3 = \frac{3mv_{\text{пер}}^2}{2} = \frac{3m}{2}\left(\frac{v_{\text{отн}}\cos\alpha}{4}\right)^2 = \frac{3mv_{\text{отн}}^2\cos^2\alpha}{32}.$$

Тогда кинетическая энергия системы в целом

$$T = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{32}(\cos^2\alpha + 8) + mv_{\text{отн}}^2\left(1 - \frac{17}{16}\cos^2\alpha\right) + \frac{3mv_{\text{отн}}^2\cos^2\alpha}{32} =$$

$$= \frac{mv_{\text{отн}}^2}{32}(3\cos^2\alpha + 24 + 32 - 14\cos^2\alpha + 3\cos^2\alpha) = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{32}(56 - 8\cos^2\alpha). \qquad (7)$$

Работу совершает только сила тяжести тела 2:

$$\sum A_i = A_G = 2mg\left(h + r - r\cos\alpha\right). \qquad (8)$$

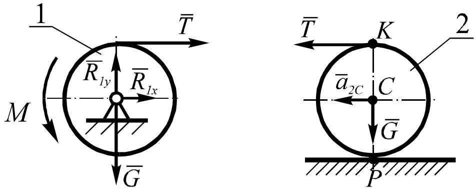
Подставляя (7) и (8) в выражение теоремы об изменении кинетической энергии, с учетом (6) получаем:

$$\frac{mv_{\text{отн}}^2}{32}\left(56 - 8\cos^2\alpha\right) = 2mg\left(h + r - r\cos\alpha\right); \quad \frac{16v_{\text{пер}}^2}{4\cos^2\alpha}\left(7 - \cos^2\alpha\right) = 2g\left(h + r - r\cos\alpha\right);$$

$$v_{\text{пер}} = \sqrt{\frac{g\left(h + r - r\cos\alpha\right)\cos^2\alpha}{2(7 - \cos^2\alpha)}}.$$

Задача Д-4–2014

Вариант *а*): цилиндр 2 катится по плоскости без проскальзывания.



Динамическое уравнение вращательного движения тела 1

$$I_1\varepsilon_1 = M - Tr. \qquad (9)$$

Так как цилиндр катится без проскальзывания, то МЦС находится в точке P контакта его с поверхностью. Динамическое уравнение вращательного движения относительно P имеет вид

$$I_{2P}\varepsilon_2 = T2r. \qquad (10)$$

Расстояние до МЦС не меняется в процессе движения, поэтому угловые ускорения тел системы связаны соотношением $\varepsilon_1 r = \varepsilon_2 \cdot 2r$ или $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{2}$. Поскольку $I_1 = \dfrac{mr^2}{2}$ $I_{2P} = \dfrac{3mr^2}{2}$, то решая систему уравнений (9) и (10), находим

$$\begin{cases} \dfrac{mr^2}{2}\varepsilon_1 = M - Tr; \\ \dfrac{3mr^2\varepsilon_1}{8} = Tr; \end{cases} \quad \frac{7mr^2}{8}\varepsilon_1 = M; \quad \varepsilon_1 = \frac{8M}{7mr^2}.$$

Вариант *б*): трение между цилиндром 2 и плоскостью отсутствует.

Динамическое уравнение вращательного движения тела 1 имеет такой же вид как и в случае *а*) (формула (9)).

Динамические уравнения плоскопараллельного движения цилиндра 2 приобретают вид

$$\begin{cases} m_2 a_{2C} = T; \\ I_{2C}\varepsilon_2 = T\cdot r; \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} m_2 a_{2C} = T; \\ \dfrac{m_2 r_2^2}{2}\varepsilon_2 = T\cdot r. \end{cases}$$

В этом случае связь между угловыми ускорениями тел системы определяется соотношением

$$\varepsilon_1 r = a_K^\tau = a_C + \varepsilon_2 r .$$

Отсюда $$\varepsilon_1 r = \frac{T}{m} + \frac{2Tr}{mr^2} r = \frac{3T}{m}; \quad T = \frac{m\varepsilon_1 r}{3}.$$

Подставляем в уравнение (9) и находим

$$\frac{mr^2}{2}\varepsilon_1 = M - \frac{m\varepsilon_1 r^2}{3}; \quad \frac{5mr^2}{6}\varepsilon_1 = M; \quad \varepsilon_1 = \frac{6}{5}\frac{M}{mr^2}.$$

Таким образом, угловое ускорение колеса 1 при движении цилиндра с проскальзыванием ($\varepsilon_{1б}$) больше, чем при качении без проскальзывания ($\varepsilon_{1а}$). Искомое отношение угловых ускорений:

$$\frac{\varepsilon_{1б}}{\varepsilon_{1а}} = \frac{6}{5}\bigg/\frac{8}{7} = \frac{21}{20} = 1{,}05 .$$

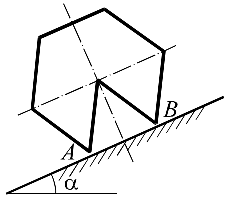
4 ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ КОНКУРСА «БРЕЙН-РИНГ»

1. $S_2 = 39{,}66$ Н. **2.** $R_A = \dfrac{G}{\sqrt{3}}$ Н. **3.** $\alpha = \arccos\sqrt[3]{\dfrac{a}{l}}$. **4.** $S_5 = 38{,}64$ Н. **5.** 17,32 Н·м. **6.** f = 0,289. **7.** 25 Н·м. **8.** $\dfrac{(Pl - G\Delta l_2)\Delta l_1 \Delta l_2}{P\Delta l_2(\Delta l_1 + \Delta l_2)}$. **9.** $\dfrac{PR(f + f^2)}{1 + f^2}$. **10.** 4,4. **11.** $\rho = 2$ м. **12.** $v = v_0 e^{-t/k}$. **13.** $a = \sqrt{5}$ м/с^2. **14.** $a_n = 159{,}73$ м/с^2. **15.** $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{R_1 R_4}{R_3 R_5}$. **16.** $v_D = 0{,}54$ м/с. **17.** $2\omega u$. **18.** $\omega_2 = 3{,}46$ рад/с. **19.** 48. **20.** $a_1 = \dfrac{v^2}{a} tg^3\alpha$. **21.** $F_3 = 4{,}5$ Н. **22.** $c_{min} = 0{,}5$ Н/м. **23.** $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$. **24.** $x = 0{,}27$ м. **25.** $\dfrac{Pr_2}{m_2 i_{2x}^2}$. **26.** $N_G = 8{,}2\cdot 10^{-4}$ Вт. **27.** $\dfrac{u \ln 3}{a + g}$. **28.** $F_{ср} = 20$ кН. **29.** $v = \sqrt{gl\,\mathrm{tg}\alpha \sin\alpha}$. **30.** $a_C = \dfrac{1}{3}\left|a_A - 2g\right|$.

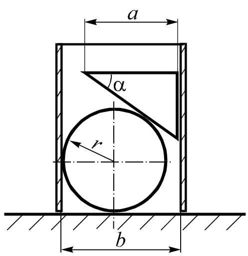
5 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА (2015 г.)

Задача С1–2015

На наклонной плоскости расположена призма, в основании которой находится правильный шестиугольник с вырезом в форме равностороннего треугольника. Коэффициент трения в точке A равен f, а в точке B – $3f$. Определить, при каких значениях угла α наклона плоскости изображенное тело будет находиться в равновесии.



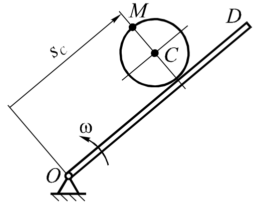
Задача С2–2015



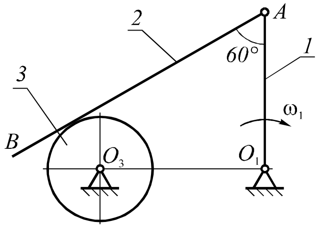
На горизонтальной поверхности стоит однородный короб веса P и шириной b, симметричный относительно вертикальной плоскости. В нем размещены однородные тела: цилиндр радиуса r и призма, для которой известны длина ребра a ($a < b$) и угол α. Определить, при каких значениях силы тяжести призмы система будет оставаться в равновесии. Силами трения пренебречь.

Задача К1–2015

Диск радиуса $R = 0{,}2$ м катится без скольжения по прямолинейному стержню OD так, что перемещение точки C $s_C = 2t$ м. Стержень OD вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Определить при $t_1 = 0{,}5$ с абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M диска, если известно, что в этот момент времени отрезок CM перпендикулярен OD. Найти, как изменится результат в случае, если стержень OD будет вращаться с той же угловой скоростью, но в противоположном направлении.

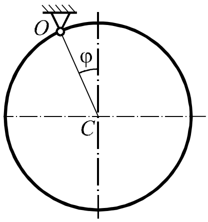


Задача К2–2015



В изображенном на рисунке механизме стержень 1 длиной l вращается с постоянной угловой скоростью ω_1. Стержень 2 приводит во вращение диск 3 радиуса r, причем проскальзывание между ними отсутствует. Для показанного на схеме положения определить угловую скорость и угловое ускорение диска 3.

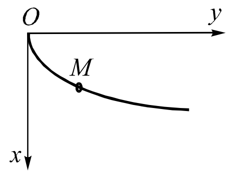
Задача Д1–2015



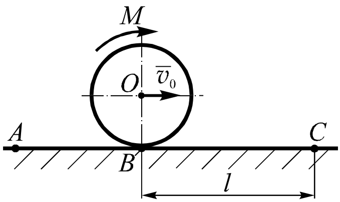
Неоднородный диск колеблется в вертикальной плоскости вокруг оси O. Плотность диска пропорциональна расстоянию до оси C, проходящей через центр диска. Определить, во сколько раз отличаются периоды малых колебаний рассматриваемого диска и однородного диска, имеющего одинаковые с ним радиус и массу.

Задача Д2–2015

По гладкой проволоке, имеющей форму параболы и расположенной в вертикальной плоскости, перемещается кольцо M массы m. Кольцо начинает двигаться из вершины O параболы без начальной скорости. Определить максимальную силу взаимодействия кольца с проволокой, форма которой описывается уравнением $y = x^2$.



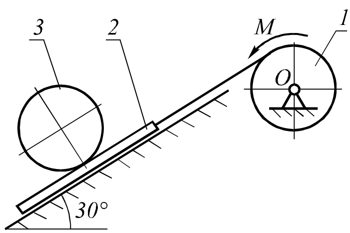
Задача Д3–2015



Сплошной однородный цилиндр массы m и радиуса r катится по горизонтальной плоскости под действием постоянного момента M. На участке AB качение происходит без проскальзывания и в момент наезда на точку B скорость центра колеса равна v_0. На участке BC, имеющем длину l, коэффициент трения между колесом и плоскостью убывает по линейному закону от f_0 в точке B до нуля в точке C. Определить скорость центра колеса в момент переезда точки C.

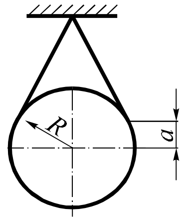
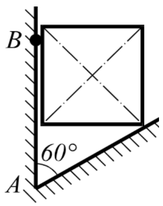
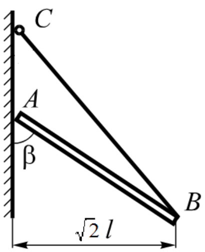
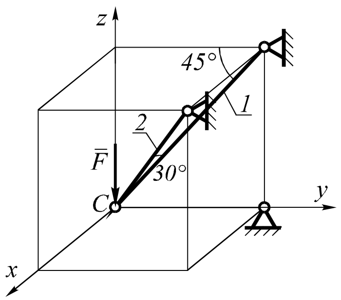
Задача Д4–2015

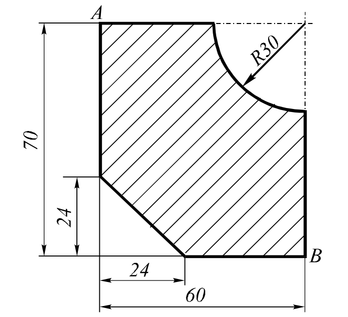
Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из однородного цилиндра 1, соединенного нитью с доской 2, по которой катится без скольжения однородный цилиндр 3. Массы тел одинаковы и равны m. Радиусы цилиндров 1 и 3 также одинаковы и равны r. Определить ускорение центра масс цилиндра 3 для случая, при котором к телу 1 приложен момент $M = \dfrac{mgr}{3}$. Трением между доской и наклонной плоскостью, а также в шарнире O пренебречь.



6 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ КОНКУРСА «БРЕЙН-РИНГ» (2015 г.)

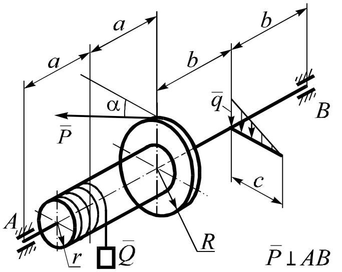
СТАТИКА

<table>
<tr><td colspan="2">1. Определить модуль равнодействующей системы сил: $\overline{F}_1 = 3\overline{i} - 2\overline{j}$ Н; $\overline{F}_2 = 6\overline{j}$ Н; $\overline{F}_3 = 5\overline{i} + 8\overline{k}$ Н.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Труба веса G = 90 кН и радиуса R = 0,55 м охвачена веревочной петлей, прикрепленной к неподвижной точке A. Определить размер a, определяющий положение точки схода веревки с цилиндра, если натяжения ветвей петли $T_1 = T_2$ = 75 кН.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>3. Куб веса 200 Н удерживается в равновесии при помощи двух гладких плоскостей. Определить расстояние AB от вершины угла до точки приложения реакции вертикальной плоскости, если длина ребра куба $6\sqrt{3}$ см.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>4. Верхний конец однородного стержня AB массы m упирается в шероховатую вертикальную стену, а к нижнему его концу прикреплен трос BC. Определить минимальное значение угла β, при котором стержень будет находиться в равновесии, если в одном из возможных положений системы $AC = 1{,}5l$; $CB = 4l$; $f = 0{,}2$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>5. Определить значение равнодействующей реакций стержней 1 и 2, действующих на узел C, если F = 40 Н.</td></tr>
</table>

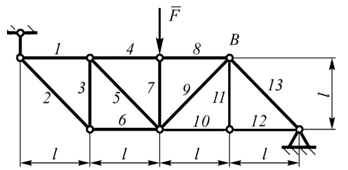


6. Определить расстояние от центра тяжести изображенной плоской фигуры до диагонали *AB*.

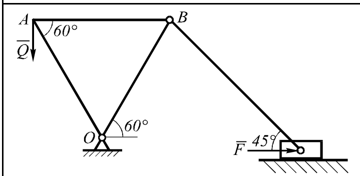
(Для справки: центр тяжести кругового сектора находится на расстоянии $\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$ от центра дуги с центральным углом 2α).



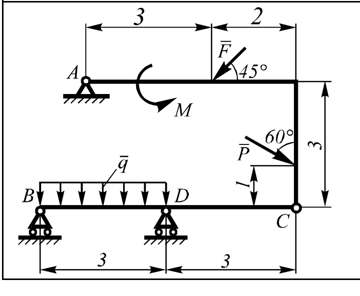
7. Определить значение угла α, при котором конструкция находится в равновесии, если $Q = 0{,}6P$, $q = \dfrac{Q}{3R}$, $a = 2R = 6r$, $b = 3R$, $c = 4{,}5r$.



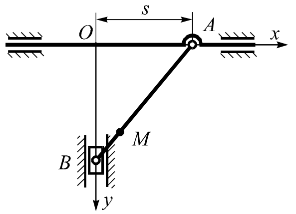
8. Укажите номера стержней, которые можно заменить тросами, если на ферму действует только сила *F*.



9. В изображенном на рисунке механизме $OA = OB = l$, $BC = 2l$. К механизму приложены две силы *Q* и *F*. Определить отношение $\dfrac{Q}{F}$, при котором механизм будет находиться в равновесии.



10. Определить реакцию шарнира *C*, если $F = 10$ кН; $P = 5$ кН; $q = 4$ кН/м; $M = 20$ кН м.



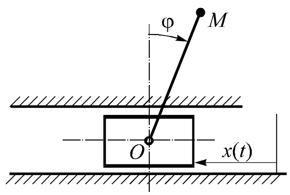
11. Определить при $t = 0$ скорость точки M, находящейся на стержне AB, если $s = 3\sin 2t$ м, $AB = 5$ м, $BM = 1$ м.

12. Определить зависимость радиуса кривизны траектории точки от времени, если координаты точки изменяются по следующим законам: $x(t) = 3\cos(\pi t/2) - 7$ м; $y(t) = 5 + 4\sin^2(0{,}25\pi t)$ м.

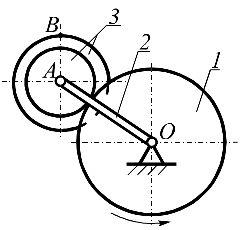
13. Определить время действия фотографического затвора, если при фотографировании шарика, падающего вдоль вертикальной сантиметровой шкалы без начальной скорости, на негативе была получена полоска, простирающаяся от 25-го до 28-го деления шкалы?

14. Дуговая координата точек обода диска радиуса 0,3 м изменяется по закону $s(t) = 0{,}6t^2$ м. Определить угол между векторами скорости и ускорения точки обода диска через 0,5 с после начала движения.

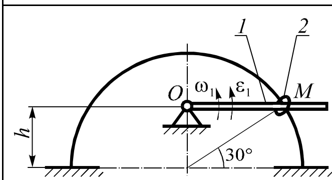
15. Начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, вал совершает 3600 оборотов за 0,2 часа. Определить угловое ускорение вала.



16. Определить скорость движения ползуна O при $t = 1$ с, если известно, что $OM = 4$ м, $x_0 = 0$, абсолютная скорость точки M в два раза больше скорости ползуна O, $\varphi = \pi\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{4}$ рад .

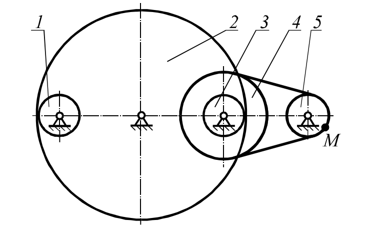


17. Определить скорость точки B (AB в данный момент времени вертикальна), находящейся на ободе колеса 3, если известно, что угловая скорость первого тела $\omega_1 = \omega$, $OA = 4r$, АВ $= 2r$, $\omega_2 = 2\omega_1$. Стержень 2 в рассматриваемый момент составляет с горизонталью угол 60°.



18. Определить абсолютную скорость колечка M для момента времени, при котором стержень занимает горизонтальное положение, показанное на рисунке, если $\omega_1 = 2$ рад/с, $h = 10$ см.

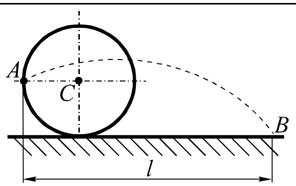
19. Точка движется в плоскости по окружности радиуса R = 10 см согласно уравнению $s(t) = 12\pi t – 2\pi t^2$ см. Определить полное ускорение точки в тот момент, когда ее дуговая координата будет равна половине длины окружности.



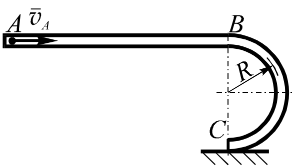
20. Определить ускорение точки M, находящейся на ободе колеса 5, при t = 0,5 с, если $\varphi_1 = 2\ln\dfrac{1}{t-1}$ рад, $r_1 = r_3 = r_5 = 0{,}2r_2 = 0{,}5r_4 =$ = 0,8 м.

ДИНАМИКА

21. Молоток массы m = 0,6 кг при ударе о шляпку гвоздя имел скорость v = 4 м/с. В процессе движения гвоздь испытывает силу сопротивления $F = a + bx$, где x – его перемещение, a = 10 Н, b = 2 Н/м. Определить, сколько ударов необходимо нанести, чтобы вбить гвоздь длиной L = 0,2 м.

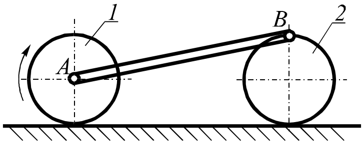


22. Определить дальность полета l точки M, отделившейся от колеса велосипеда радиуса R в положении A. Движение точки происходит в вертикальной плоскости. Скорость центра масс колеса, катящегося без проскальзывания, равна 5 м/с.

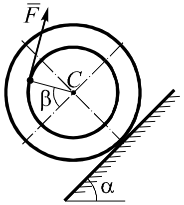


23. Шарик движется внутри изогнутой трубки, имея в положении A скорость v_A = 0,5 м/с. Определить скорость прохождения шариком положения C, если на шарик на криволинейном участке действует переменная сила $F = 2mg\sqrt{s}$, сонаправленная с вектором скорости, если R = 0,2 м.

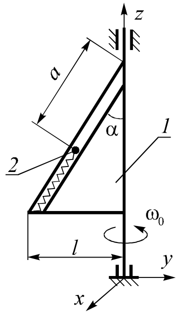
24. Лыжник массы 75 кг вследствие толчка приобретает начальную скорость 1 м/с и скользит по склону, составляющему угол 30° с горизонтом. Сила сопротивления, возникающая при движении лыжника, пропорциональна скорости. Определить скорость лыжника через 5 секунд после начала движения, если при скорости 0,5 м/с сила сопротивления равна 10 Н.



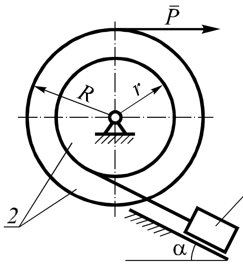
25. Два однородных цилиндрических катка радиуса r и массы $4m$ каждый связаны однородным стержнем AB массы $2m$. Они могут катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Для указанного на рисунке положения определить кинетическую энергию системы, если угловая скорость катка 1 равна ω.



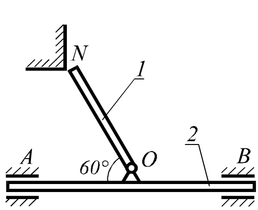
26. Колесо массой m катится по шероховатой поверхности под действием силы тяжести и активной силы $F = 4mg$. Радиусы колеса равны соответственно R и r, причем $R = 1{,}5r$. Радиус инерции колеса $i_C = 1{,}2\,r$. Коэффициент сопротивления качению δ, коэффициент трения сцепления f. Определить ускорение центра масс колеса, если $\alpha = \beta = 60°$.



27. Однородная тонкая пластина 1 массы $m_1 = m$ свободно вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0. Шарик 2 массы $m_2 = 0{,}5m$ расположен в желобе на пластине и удерживается затвором на расстоянии a. После открытия затвора шарик начинает перемещаться вдоль желоба и сжимает пружину на величину λ. Определить угловую скорость пластины в этот момент. Расстояние l известно.



28. Механическая система состоит из двух тел с массами $m_1 = 2m$ и $m_2 = 3m$. На тело 2 действует движущая сила P, коэффициент трения скольжения между соприкасающимися поверхностями равен f. Определить ускорение тела 1, если $R = 2{,}5r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$; $P = 6mg$.

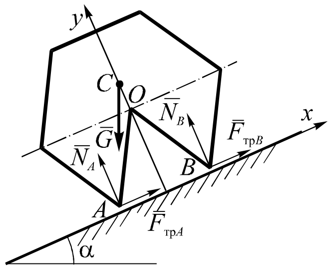


29. Однородный стержень 1 массы m расположен в вертикальной плоскости и шарнирно связан со стержнем 2 массы $3m$, который может двигаться в горизонтальных направляющих AB. Стержень 1 срывается с выступа N и падает на горизонтальный стержень 2, который при этом смещается на величину s. Пренебрегая трением, определить длину стержня 1.

30. Динамическое уравнение движения материальной точки $\ddot{x} + b\dot{x} + 100x = 0$. Определить значения коэффициента сопротивления упругой среды b, при которых движение не будет колебательным.

7 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА (2015 г.)

Задача С-1–2015



Призма может выйти из состояния равновесия либо при скольжении по поверхности, либо в результате опрокидывания.

Предварительно определим положение центра тяжести тела:

$$OC=\frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}l\frac{\sqrt{3}}{2}}{5l^2\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{l\sqrt{3}}{15}.$$

Запишем уравнения равновесия призмы

$$\sum F_{ix}=0;\ F_{трA}+F_{трB}=G\sin\alpha;$$

$$\sum F_{iy}=0;\ N_A+N_B=G\cos\alpha;$$

$$\sum M_{iA}=0;\ N_B\cdot l+G\sin\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{15}\right)l-G\cos\alpha\cdot\frac{l}{2}=0.$$

Поэтому

$$N_B=\frac{G\cos\alpha}{2}-G\sin\alpha\frac{17\sqrt{3}}{30};\quad N_A=\frac{G\cos\alpha}{2}+G\sin\alpha\frac{17\sqrt{3}}{30}.$$

При опрокидывании в случае отрыва от поверхности $N_B = 0$, отсюда

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{15}\right)}=\frac{15}{17\sqrt{3}}.$$

При угле α, соответствующем началу скольжения, $F_{трA}=fN_A$, $F_{трB}=fN_B$. Подставляя в уравнение проекций на ось y, получаем

$$f\frac{G\cos\alpha}{2}+fG\sin\alpha\frac{17\sqrt{3}}{30}+3fG\frac{\cos\alpha}{2}-3fG\sin\alpha\cdot\frac{17\sqrt{3}}{30}=G\sin\alpha.$$

Отсюда

$$2fG\cos\alpha=G\sin\alpha+\frac{2fG\sin\alpha\cdot 17\sqrt{3}}{30};$$

$$60f=30\mathrm{tg}\alpha+2f\,\mathrm{tg}\alpha\cdot 17\sqrt{3};$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2f}{1+f\frac{17\sqrt{3}}{15}}.$$

Определим максимальный коэффициент трения, при котором граница скольжения совпадает с началом опрокидывания

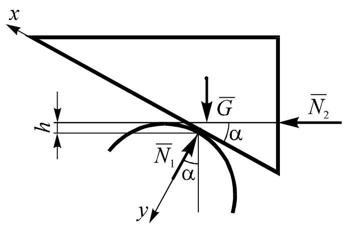
$$\frac{2f}{1+f\,\dfrac{17\sqrt{3}}{15}}=\frac{15}{17\sqrt{3}}\,;\;\; f=\frac{15}{17\sqrt{3}}\,.$$

Таким образом, окончательно получаем:

Если $f<\dfrac{15}{17\sqrt{3}}$, то $\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{2f}{1+f\,\dfrac{17\sqrt{3}}{15}}$;

если $f\geq\dfrac{15}{17\sqrt{3}}$ то $\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{15}{17\sqrt{3}}$.

Задача С-2–2015



Рассмотрим равновесие призмы:

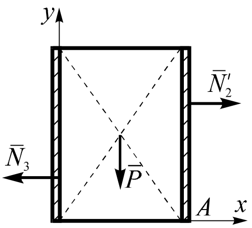
$\sum F_{ix}=0$; $N_2\cos\alpha-G\sin\alpha=0$,

$\sum M_{iC}=0$; $N_2\cdot h-G(b-r-r\sin\alpha-\frac{1}{3}a)=0$.

Из этих уравнений находим

$$N_2=G\,\mathrm{tg}\alpha,$$

$$h=\frac{G\left(b-r-r\sin\alpha-\dfrac{a}{3}\right)}{G\mathrm{tg}\alpha}=\left(b-r-r\sin\alpha-\frac{a}{3}\right)\mathrm{ctg}\alpha\,.$$



Рассмотрим равновесие короба

$\sum M_{iA}=0$; $P\dfrac{b}{2}+N_3r-N_2'(r+r\cos\alpha+h)=0$;

$\sum F_{ix}=0$; $N_2'-N_3=0$,

Соответственно $N_2'=N_3=G\mathrm{ctg}\alpha$.

Подставляя в уравнение моментов, получаем

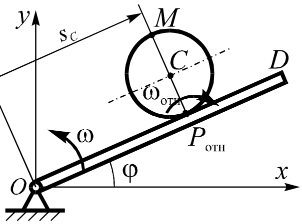
$$P\frac{b}{2}=G\mathrm{tg}\alpha(r\cos\alpha+h)\,.$$

Отсюда находим

$$G=\frac{Pb}{2\mathrm{tg}\alpha(r\cos\alpha+(b-r-r\sin\alpha-a/3)\mathrm{ctg}\alpha)}=\frac{Pb}{2\mathrm{tg}\alpha(b-r-a/3)\mathrm{ctg}\alpha}\,;$$

$$G=\frac{Pb}{2(b-r-a/3)}\,.$$

Задача К-1–2015



Введем неподвижную систему отсчета xOy. В ней координаты центра масс цилиндра:

$$x_C = s_C\cos\varphi - R\sin\varphi = 2t\cos\varphi - R\sin\varphi\,,$$
$$y_C = s_C\sin\varphi + R\cos\varphi = 2t\sin\varphi + R\cos\varphi\,.$$

Рассматриваем движение диска как сложное. Переносное движение обусловлено вращением стержня с угловой скоростью $\omega_{\text{пер}} = \omega$. В таком случае относительное движение связано с качением диска по стержню. При этом относительная скорость центра масс диска $v_C^r = \dfrac{ds_C}{dt} = 2$ м/с, угловая скорость $\omega_{\text{отн}} = \dfrac{v_C^r}{P_{\text{отн}}C} = \dfrac{2}{0{,}2} = 10$ рад/с.

В соответствии с теорией сложения вращений относительно параллельных осей $\overline{\omega}_{\text{абс}} = \overline{\omega}_{\text{пер}} + \overline{\omega}_{\text{отн}}$. С учетом направлений вращения получаем

$$\omega_{\text{абс}} = \omega_{\text{пер}} - \omega_{\text{отн}} = 10 - 10 = 0\,.$$

Следовательно, колесо движется поступательно, а $v_C = v_M$, $a_C = a_M$.

Дифференцируя по времени выражения координат, определяем проекции вектора абсолютной скорости центра масс диска:

$$v_{Cx} = 2\cos\varphi - 2t\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - R\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\,;$$
$$v_{Cy} = 2\sin\varphi + 2t\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - R\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Учитывая, что $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const}$, находим

$$v_{Cx} = 2\cos\varphi - 2t\sin\varphi\omega - R\cos\varphi\omega = -2t\sin\varphi\omega;$$
$$v_{Cy} = 2\sin\varphi + 2t\cos\varphi\omega - R\sin\varphi\omega = 2t\cos\varphi\omega\,.$$

Соответственно модуль скорости

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = 2\omega t\,.$$

Подставляя заданное время t = 0,5 с, находим

$$v_M = v_C = 10\cdot 2\cdot 0{,}5 = 10 \text{ м/с}.$$

Теперь определим проекции вектора ускорения центра масс диска:

$$a_{Cx} = -2\omega\sin\varphi - 2\omega^2 t\cos\varphi\ ,$$

$$a_{Cy} = 2\omega\cos\varphi - 2\omega^2 t\sin\varphi\,.$$

Следовательно, модуль ускорения

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{(-2\omega\sin\varphi - 2\omega^2 t\cos\varphi)^2 + (2\omega\cos\varphi - 2\omega^2 t\sin\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{4\omega^2 + 4\omega^4 t^2} = 2\omega\sqrt{1+\omega^2 t^2}.$$

При $t = 0{,}5$ с получаем

$$a_M = a_C = 2\cdot 10\sqrt{1+10^2\cdot 0{,}5^2} = 20\sqrt{26} = 102 \text{ м/с.}$$

Если угловая скорость ω направлена в противоположную сторону, то

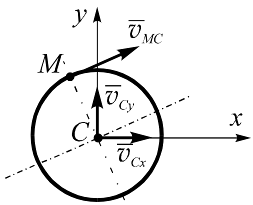
$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega = \text{const},\quad \omega_{\text{абс}} = \omega_{\text{пер}} + \omega_{\text{отн}} = 10+10 = 20\,\text{рад/с}.$$

В этом случае проекции вектора скорости центра масс диска

$$v_{Cx} = 2\cos\varphi + 2t\sin\varphi\,\omega + R\cos\varphi\,\omega = 4\cos\varphi + 2t\sin\varphi\,\omega\,,$$

$$v_{Cy} = 2\sin\varphi - 2t\cos\varphi\,\omega + R\sin\varphi\,\omega = 4\sin\varphi - 2t\cos\varphi\,\omega\,.$$

При $t = 1$ с имеем: $v_{Cx1} = 4\cos\varphi + 10\sin\varphi$, $v_{Cy1} = 4\sin\varphi - 10\cos\varphi$.



Определяем скорость точки M, принимая за полюс точку C:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_C + \overline{v}_{MC}\,.$$

Скорость точки M при ее движении вокруг полюса

$$v_{MC} = \omega_{\text{абс}} R = 20\cdot 0{,}2 = 4 \text{ м/с}.$$

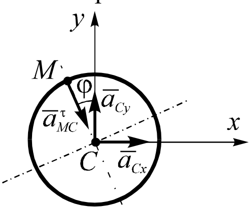
Проецируя выражение скорости $\overline{v}_M$, находим:

$$v_{Mx1} = v_{Cx1} + v_{MC}\cos\varphi = 8\cos\varphi + 10\sin\varphi,$$

$$v_{My1} = v_{Cy1} + v_{MC}\sin\varphi = 8\sin\varphi - 10\cos\varphi.$$

$$v_{M1} = \sqrt{v_{Mx1}^2 + v_{My1}^2} = \sqrt{8^2+10^2} = \sqrt{164} = 12{,}8 \text{ м/с.}$$

Ускорение точки M в соответствии с теорией плоского движения



$$\overline{a}_M = \overline{a}_C + \overline{a}^{\tau}_{MC} + \overline{a}^{n}_{MC}.$$

Проекции ускорения точки C:

$$a_{Cx} = 6\omega\sin\varphi - 2\omega^2 t\cos\varphi,$$

$$a_{Cy} = -6\omega\cos\varphi - 2\omega^2 t\sin\varphi.$$

Определим касательную и нормальную составляющие ускорения точки M при движении ее вокруг полюса (точки C). Так как $\omega_{абс} = \mathrm{const}$, то $a^{\tau}_{MC} = \varepsilon_{абс} R = 0$.

$$a^{n}_{MC} = \omega^{2}_{абс} R = 20^2 \cdot 0{,}2 = 80 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, получаем

$$a_{Mx} = a_{Cx} + a^{n}_{MC}\sin\varphi = 6\omega\sin\varphi - 2\omega^2 t\cos\varphi + 80\sin\varphi\ ;$$

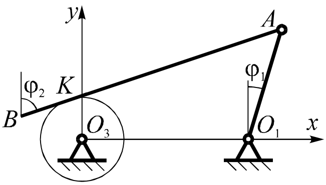
$$a_{My} = a_{Cy} - a^{n}_{MC}\cos\varphi = -6\omega\cos\varphi - 2\omega^2 t\sin\varphi - 80\cos\varphi\ ;$$

$$a_M = \sqrt{(6\omega + 80)^2 + 4\omega^4 t^2}.$$

Тогда при $t = 0{,}5$ с находим

$$a_M = \sqrt{(60+80)^2 + 4\cdot 10^4 0{,}5^2} = \sqrt{140^2 + 10000} = \sqrt{29600} = 172 \text{ м/с}^2.$$

Задача К-2–2015



Рассмотрим произвольное положение механизма. Введем неподвижную систему координатных осей xy с началом в точке O_3 и запишем выражения координат точки A:

$$x_A = AK\sin\varphi_2 - r\cos\varphi_2 = O_1A\sin\varphi_1 + O_1O_3\,,$$

$$y_A = AK\cos\varphi_2 + r\sin\varphi_2 = O_1A\cos\varphi_1\,,$$

где $AK = AK_0 - r\varphi_2 + r\varphi_3$. Здесь K_0 – некоторое начальное положение точки K; φ_3 – угол поворота диска 3, который не равен углу φ_2.

В заданном положении механизма получаем

$$\begin{cases} AK\dfrac{\sqrt{3}}{2} - r\dfrac{1}{2} = O_1O_2; \\ AK\dfrac{1}{2} + r\dfrac{\sqrt{3}}{2} = l. \end{cases}$$

Следовательно, $AK = 2l - r\sqrt{3}$.

Дифференцированием по времени определяем проекции вектора скорости точки A:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= \frac{dx_A}{dt} = \frac{d(AK)}{dt}\sin\varphi_2 + AK\cos\varphi_2\frac{d\varphi_2}{dt} + r\sin\varphi_2\frac{d\varphi_2}{dt} = O_1A\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}; \\ v_{Ay} &= \frac{dy_A}{dt} = \frac{d(AK)}{dt}\cos\varphi_2 - AK\sin\varphi_2\frac{d\varphi_2}{dt} + r\cos\varphi_2\frac{d\varphi_2}{dt} = -O_1A\sin\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\dfrac{d(AK)}{dt} = -r\omega_2 + r\omega_3$, $\dfrac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$, $\dfrac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$.

Подставляя в систему уравнений (1), получаем:

$$\begin{cases} (-\omega_2 r + \omega_3 r)\sin\varphi_2 + AK\cos\varphi_2\omega_2 + r\sin\varphi_2\omega_2 = O_1A\cos\varphi_1\omega_1; \\ (-\omega_2 r + \omega_3 r)\cos\varphi_2 - AK\sin\varphi_2\omega_2 + r\cos\varphi_2\omega_2 = -O_1A\sin\varphi_1\omega_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_3 r\sin\varphi_2 + AK\cos\varphi_2\omega_2 = O_1A\cos\varphi_1\omega_1; \\ \omega_3 r\cos\varphi_2 - AK\sin\varphi_2\omega_2 = -O_1A\sin\varphi_1\omega_1. \end{cases} \qquad (2)$$

В заданном положении механизма $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 60°$. С учетом подстановки в систему уравнений (2) имеем:

$$\begin{cases} \omega_3 r\dfrac{\sqrt{3}}{2} + AK\dfrac{1}{2}\omega_2 = l\omega_1; \\ \omega_3 r\dfrac{1}{2} - AK\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда выражаем угловые скорости ω_2 и ω_3.

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 AK\sqrt{3}}{r}, \quad \frac{\omega_2 AK\sqrt{3}}{r}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2} + \omega_2 AK\frac{1}{2} = \omega_1 l,$$

$$2\omega_2 AK = \omega_1 l, \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 l}{2AK},$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 AK\sqrt{3}}{r} = \frac{\omega_1 l}{2AK}\cdot\frac{AK\sqrt{3}}{r} = \frac{\omega_1 l\sqrt{3}}{2r}.$$

Для нахождения углового ускорения ε_3 продифференцируем по времени уравнения системы (2)

$$\begin{cases} \varepsilon_3 r\sin\varphi_2 + \omega_3 r\cos\varphi_2\omega_2 + (-\omega_2 r + \omega_3 r)\cos\varphi_2\omega_2 + AK(-\sin\varphi_2)\omega_2^2 + \\ + AK\cos\varphi_2\varepsilon_2 = -\omega_1^2 O_1A\cos\varphi_1; \\ \varepsilon_3 r\cos\varphi_2 - \omega_3 r\sin\varphi_2\omega_2 - (-\omega_2 r + \omega_3 r)\sin\varphi_2\omega_2 - AK\cos\varphi_2\omega_2^2 - \\ - AK\sin\varphi_2\varepsilon_2 = -\omega_1^2 O_1A\cos\varphi_1. \end{cases}$$

Для заданного положения механизма ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 60°$) получаем

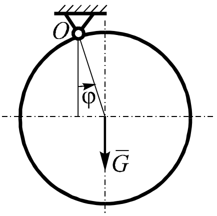
$$\begin{cases} \varepsilon_3 r\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \omega_3 r\dfrac{1}{2}\omega_2 - \omega_2^2 r\dfrac{1}{2} + \omega_2\omega_3 r\dfrac{1}{2} - \omega_2^2 AK\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon_2 AK\dfrac{1}{2} = 0; \\ \varepsilon_3 r\dfrac{1}{2} - \omega_3 r\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_2 + \omega_2^2 r\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \omega_2\omega_3 r\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \omega_2^2 AK\dfrac{1}{2} - \varepsilon_2 AK\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\omega_1^2 OA. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_3 r\sqrt{3}-\omega_2^2 r+2\omega_2\omega_3 r-\omega_2^2 AK\sqrt{3}+\varepsilon_2 AK=0; \\ \varepsilon_3 r+\omega_2^2 r\sqrt{3}-2\omega_2\omega_3 r\sqrt{3}-\omega_2^2 AK-\varepsilon_2 AK\sqrt{3}+2\omega_1^2 OA=0. \end{cases}$$

Отсюда $\quad 4\varepsilon_3 r-4\omega_2^2 AK+2\omega_1^2 l=0, \quad 4\varepsilon_3 r=4\dfrac{\omega_1^2 l^2}{4AK^2}AK-\omega_1^2 l,$

$$\varepsilon_3=\frac{\omega_1^2 l}{4r}\left(-2+\frac{l}{AK}\right)=\frac{\omega_1^2 l}{4r}\left(-2+\frac{l}{2l-r\sqrt{3}}\right)=\frac{\omega_1^2 l}{4r}\frac{(2r\sqrt{3}-3l)}{2l-r\sqrt{3}}.$$

Задача Д-1–2015



Запишем динамическое уравнение вращательного движения диска, учитывая, что на него действует сила тяжести

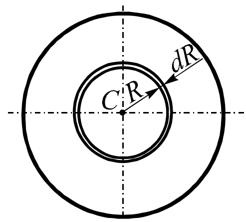
$$I_O\varepsilon=\sum M_{Oi}^{\text{внеш}}\ ; \quad I_O\varepsilon=-Gr\sin\varphi\ .$$

При $\varphi\to 0$ можно принять $\sin\varphi=\varphi$. Отсюда имеем:

$$I_O\ddot{\varphi}+mgr\varphi=0 \ \text{ или } \ \ddot{\varphi}+\frac{mgr}{I_O}\varphi=0.$$

Введем обозначение $\dfrac{mgr}{I_O}=k^2$. Тогда период малых колебаний диска

$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\sqrt{I_O}}{\sqrt{mgr}}\ .$$



Определим момент инерции неоднородного диска, выделив бесконечно малый элемент в форме кольца:

$$dI_C=dmR^2, \ \ dm=\rho dV=2\pi\rho RdR\cdot\Delta,$$

где Δ – толщина диска, ρ – плотность материала, $\rho=k_\rho R$.

В таком случае $dm=2\pi k_\rho\Delta\cdot R^2 dR,$ а масса диска может быть записана в виде

$$m=\int\limits_{(V)}dm=\int\limits_0^r 2\pi k_\rho\Delta\cdot R^2 dR=2\pi k_\rho\Delta\frac{r^3}{3}.$$

Соответственно момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,

$$I_C=\int\limits_0^r 2\pi k_\rho\Delta\cdot R^2 dR\cdot R^2=2\pi k_\rho\Delta\frac{r^5}{5}.$$

Используя теорему о связи между моментами инерции тела, вычисленными относительно параллельных осей, получаем

$$I_O = I_C + mr^2 = 2\pi k_\rho \Delta \frac{r^5}{5} + 2\pi k_\rho \Delta \frac{r^3}{3} \cdot r^2 = \frac{8}{15} 2\pi k_\rho \Delta r^5.$$

Следовательно, период колебаний неоднородного диска

$$T_{\text{неодн}} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{8}{15} 2\pi k_\rho \Delta r^5}}{\sqrt{2\pi k_\rho \Delta \frac{r^3}{3} \cdot gr}} = 2\pi r \sqrt{\frac{24}{15 gr}} = 2\pi r \sqrt{\frac{8r}{5g}}.$$

Для однородного диска момент инерции относительно оси, проходящей через точку O

$$I_O = I_C + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2.$$

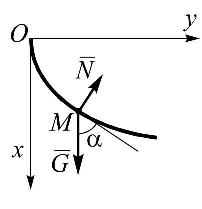
Поэтому период колебаний

$$T_{\text{однор}} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{3}{2} mr^2}}{\sqrt{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

Соответственно отношение периодов колебаний рассматриваемых дисков

$$\frac{T_{\text{неодн}}}{T_{\text{однор}}} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{8r}{5g}}}{2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{16}{15}} = 1{,}03.$$

Задача Д-2–2015



По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i .$$

Работу совершает только сила тяжести, поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = mgx; \; v^2 = 2gx .$$

Радиус кривизны траектории кольца можно найти по формуле

$$\rho = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|} .$$

Поскольку $y' = 2x$, $y'' = 2$, то

$$\rho = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}.$$

Динамическое уравнение движения кольца в проекции на нормаль имеет вид

$$ma_n = N - G\sin\alpha,$$

где $$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{2gx\cdot 2}{(1+4x^2)^{3/2}}.$$

Отсюда сила взаимодействия кольца с проволокой

$$N = ma_n + G\sin\alpha = m\frac{4gx.}{(1+4x^2)^{3/2}} + mg\sin\alpha. \qquad (3)$$

Определим значение sin α из тригонометрического тождества

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\sin^2\alpha}.$$

Учитывая, что $\mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = 2x$, получаем

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+4x^2} = \frac{4x^2}{1+4x^2}, \quad \sin\alpha = \frac{2x}{\sqrt{(1+4x^2)}}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (3), находим

$$N = \frac{4mgx + mg\cdot 2x\cdot(1+4x^2)}{(1+4x^2)^{3/2}} = \frac{6mgx + 8mgx^3}{(1+4x^2)^{3/2}}. \qquad (4)$$

Исследуем полученную функцию на максимум.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(6mg + 24mgx^2)((1+4x^2)^{3/2} - (6mgx + 8mgx^3)\frac{3}{2}(1+4x^2)^{1/2}\cdot 8x}{(1+4x^2)^3} = 0;$$

$$6mg(1+4x^2)^{1/2}\cdot\left[(1+4x^2)(1+4x^2) - (x+\frac{4}{3}x^3)\cdot 12x\right] = 0;$$

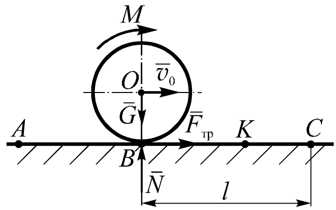
$$1+8x^2+16x^4-12x^2-16x^4 = 0 \quad \text{или} \quad 1 = 4x^2$$

Поэтому сила N максимальна в момент, при котором $x = \frac{1}{2}$.

В таком случае подстановка в (4) дает

$$N_{\max} = \frac{6mg\cdot\frac{1}{2} + 8mg\cdot\frac{1}{8}}{(1+4x^2)^{3/2}} = \frac{4mg}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}mg.$$

Задача Д-3–2014



Динамические уравнения качения колеса имеют вид:

$$ma_O = F_{тр};$$
$$I_O\varepsilon = M - F_{тр}r.$$

При качении без проскальзывания $a_O = \varepsilon r$, поэтому, учитывая, что $I_O = m\dfrac{r^2}{2}$, имеем

$$m\varepsilon r = F_{тр}, \quad m\frac{r^2}{2}\varepsilon = M - F_{тр}r;$$

$$\frac{3F_{тр}r}{2} = M; \quad F_{тр} = \frac{2M}{3r}.$$

Скольжение отсутствует в случае, если $F_{тр} \le fN = fmg$. Отсюда

$$\frac{2M}{3r} \le fmg; \quad f \ge \frac{2M}{3mgr}.$$

Исходя из полученного соотношения определяем положение точки K, до которой качение проходит без проскальзывания.

По условию $f = f_0\left(1 - \dfrac{s}{l}\right)$. Поэтому получаем

$$\frac{2M}{3mrg} = f_0\left(1 - \frac{s_K}{l}\right); \quad \frac{2M}{3f_0mgr} = 1 - \frac{s_K}{l}; \quad s_K = l\left(1 - \frac{2M}{3f_0mgr}\right).$$

Находим скорость в конце участка движения без проскальзывания:

$$a_O = \frac{F_{тр}}{m} = \frac{2M}{3mr}; \quad a_O = \frac{dv}{dt} = \frac{vdv}{ds}; \quad vdv = \frac{2M}{3mr}ds;$$

$$\int\limits_{v_0}^{v_K} vdv = \int\limits_0^{s_K} \frac{2M}{3mr}ds; \quad \frac{mv_K{}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{2M}{3mr}s_K; \quad v_K^2 = v_0^2 + \frac{4M}{3mr}s_K.$$

Подставляя найденное ранее значение s_K, имеем

$$v_K^2 = v_0^2 + \frac{4M}{3mr}l\left(1 - \frac{2M}{3f_0mgr}\right).$$

По участку KC колесо катится с проскальзыванием. Для него

$$ma_O = F_{тр} = f_0\left(1 - \frac{s}{l}\right)mg; \quad mvdv = f_0\left(1 - \frac{s}{l}\right)mgds;$$

$$\int_{v_K}^{v_C} mvdv = \int_{s_K}^{l} f_0\left(1-\frac{s}{l}\right)mgds\ ;$$

$$\frac{v_C^2}{2}-\frac{v_K^2}{2}=f_0(s-\frac{s^2}{2l})g\Bigg|_{l\left(1-\frac{2M}{3f_0mgr}\right)}^{l}\ ;$$

$$v_C^2=v_K^2+2f_0gl\frac{2M^2}{(3f_0mfr)^2}\ .$$

Подставляя ранее найденное значение v_K, находим

$$v_C^2=v_0^2+\frac{4Ml}{3mr}\left(1-\frac{2M}{3f_0mgr}\right)+2f_0gl\frac{2M^2}{(3f_0mfr)^2}\ ;$$

$$v_C^2=v_0^2+\frac{4Ml}{3mr}-\frac{8M^2l}{(3f_0mgr)^2}+\frac{4M^2l}{(3f_0mfr)^2}=v_0^2+\frac{4Ml}{3mr}-\frac{4M^2l}{9f_0m^2fr^2}\ .$$

Таким образом, если $f>\frac{2M}{3mgr}$, то $v_C=\sqrt{v_0^2+\frac{4Ml}{3mr}-\frac{4M^2l}{9f_0m^2gr^2}}$

Если же $f_0<\frac{2M}{3mgr}$, то скольжение начинается сразу при достижении точки B, поэтому получаем

$$ma_O=f_0\left(1-\frac{s}{l}\right)mg;$$

$$vdv=f_0g\left(1-\frac{s}{l}\right)ds\ ;\ \int_{v_0}^{v_C}vdv=\int_0^l f_0g\left(1-\frac{s}{l}\right)ds\ ;$$

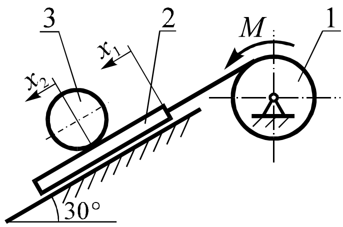
$$\frac{v_C^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=f_0g\left(s-\frac{s^2}{2l}\right)\Bigg|_0^l=f_0\left(l-\frac{l^2}{2l}\right)=\frac{f_0l}{2}\ ;$$

$$v_C^2=v_0^2+f_0gl\ ;\ v_C=\sqrt{v_0^2+f_0gl}\ .$$

Задача Д-4–2015

Применим к решению задачи уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\ .$$



Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем $q_1 = x_1$ – перемещение платформы и $q_2 = x_2$ – перемещение центра масс цилиндра.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 .$$

Здесь T_1 – кинетическая энергия вращательного движения диска 1

$$T_1 = \frac{I_{z1}\omega_1^2}{2}.$$

Момент инерции $I_{z1} = \dfrac{mr^2}{2}$, угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{v_1}{r} = \dfrac{\dot{x}_1}{r}$, поэтому

$$T_1 = \frac{mr^2\dot{x}_1^2}{2\cdot 2r^2} = \frac{m\dot{x}_1^2}{4}.$$

Кинетическая энергия платформы 2

$$T_2 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m\dot{x}_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия цилиндра, движущегося плоско

$$T_3 = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega_2^2}{2} .$$

Момент инерции $I_C = \dfrac{mr^2}{2}$, скорость центра масс $v_C = \dot{x}_2 + \dot{x}_1$, угловая скорость цилиндра $\omega_2 = \dfrac{\dot{x}_2}{r}$. Следовательно,

$$T_3 = \frac{m(\dot{x}_2 + \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{mr^2\dot{x}_2^2}{4r^2}.$$

Поэтому кинетическая энергия системы в целом

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{4} + \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m(\dot{x}_2 + \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{mr^2\dot{x}_2^2}{4r^2} = \frac{5}{4}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2.$$

Определяем частные производные кинетической энергии системы по обобщенным скоростям и обобщенным перемещениям:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{5}{2}m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_1 + \frac{3}{2}m\dot{x}_2\ ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0\ .$$

Находим полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{5}{2}m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2\ ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 .$$

Обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам,

$$Q_1 = \frac{M}{r} + 2mg\sin\alpha\ ; \quad Q_2 = mg\sin\alpha.$$

Подстановка в уравнения Лагранжа II рода дает:

$$\begin{cases} \frac{5}{2}m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = \frac{M}{r} + 2mg\sin\alpha; \\ m\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 = mg\sin\alpha. \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений относительно $\ddot{x}_1$.

$$m\ddot{x}_2 = \frac{2}{3}mg\sin\alpha - \frac{2}{3}m\ddot{x}_1\ ;$$

$$\frac{5}{2}m\ddot{x}_1 + \frac{2}{3}mg\sin\alpha - \frac{2}{3}m\ddot{x}_1 = \frac{M}{r} + 2mg\sin\alpha\ ;$$

$$\frac{11}{6}m\ddot{x}_1 = \frac{M}{r} + \frac{4}{3}mg\sin\alpha\ .$$

Отсюда

$$\ddot{x}_1 = \frac{2}{11}\left(\frac{3M}{mr} + 4g\sin\alpha\right) = \frac{2}{11}\left(\frac{3mgr}{3mr} + \frac{4g}{2}\right) = \frac{6}{11}g.$$

Проверим, натянута ли нить. Для определения силы натяжения F запишем динамическое уравнение вращательного движения диска 1

$$I_1\varepsilon_1 = M + Fr\ .$$

Угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{\ddot{x}_1}{r} = \frac{6g}{11r}.$ Поэтому

$$\frac{mr^2}{2}\frac{6g}{11r} = \frac{mgr}{3} + Fr\ ;$$

$$F = \left(\frac{3}{11} - \frac{1}{3}\right)mg < 0\ .$$

Полученный результат показывает, что при имеющихся исходных данных нить провисает. Следовательно, диск и цилиндр движутся независимо друг от друга. Для этого случая кинетическая энергия системы тел 2, 3 и ее производные:

$$T=m\dot{x}_1^2+m\dot{x}_1\dot{x}_2+\frac{3}{4}m\dot{x}_2^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=2m\dot{x}_1+m\dot{x}_2;\quad \frac{\partial T}{\partial x_1}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_1+\frac{3}{2}m\dot{x}_2;\quad \frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

Обобщенные силы в рассматриваемом случае будут равны:

$$Q_1=2mg\sin\alpha;\quad Q_2=mg\sin\alpha.$$

Таким образом, уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1+m\ddot{x}_2=+2mg\sin\alpha; \\ m\ddot{x}_1+\frac{3}{2}m\ddot{x}_2=mg\sin\alpha. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$m\ddot{x}_2=\frac{2}{3}mg\sin\alpha-\frac{2}{3}m\ddot{x}_1;$$

$$2m\ddot{x}_1+\frac{2}{3}mg\sin\alpha-\frac{2}{3}m\ddot{x}_1=2mg\sin\alpha;$$

$$\frac{4}{3}m\ddot{x}_1=\frac{4}{3}mg\sin\alpha.$$

Отсюда окончательно получаем искомое ускорение

$$\ddot{x}_1=g\sin\alpha=\frac{g}{2}.$$

8 ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ КОНКУРСА «БРЕЙН-РИНГ»

1. 12 Н. **2.** 0,44 м. **3.** 15 см. **4.** 42°. **5.** 56,57 Н. **6.** 3 мм. **7.** $\cos\alpha=0{,}225$, $\alpha=77°$. **8.** 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12. **9.** 2,73. **10.** 1,01 кН. **11.** $v_M=1{,}2$ м/с. **12.** $\rho=\infty$. **13.** $t=$ 0,0132 с. **14.** $\frac{\pi}{4}$ рад. **15.** $\frac{\pi}{36}$ рад/с^2. **16.** π^2 м/с или $\frac{\pi^2}{3}$ м/с. **17.** 17,4ωr м/с или 29,2ωr м/с (в зависимости от направления вращения звена 2). **18.** $v_M=40$ см/с. **19.** 27,3 см/с^2. **20.** 14,3 м/с^2. **21.** 1 раз. **22.** $\frac{5}{g}(5+\sqrt{25+2gR})$. **23.** 4,6 м/с. **24.** 13,78 м/с. **25.** $\frac{19}{4}m\omega^2R^2$. **26.** $3g$. **27.** $\frac{l^2+3a^2\sin^2\alpha}{l^2+3(a+\lambda)^2\sin^2\alpha}\omega_0$. **28.** $a=g\frac{15-2f\cos\alpha-2\sin\alpha}{8}$. **29.** 16 s. **30.** $b\ge 20$.

9 РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ КОНКУРСОВ (ЛИЧНЫЙ ЗАЧЕТ)

По результатам X Международной олимпиады по теоретической механике (2014 г.) наибольшее число баллов набрали.

Фамилия, имя, отчество участника	Команда	Сумма баллов	Место
Лобач Игорь Леонидович	БГУ	79	1
Александров Иван Александрович	СПбГУ	71	2
Li Junpu	HoHai	70	3
Самойленко Альберт Владимирович	БГУ	70	3
Yu Li	ShangHai	68	4
Кравцов Павел Сергеевич	СПбГУ	68	4
Хабиров Андрей Фаритович	ЮУрГУ	68	4
Свиридов Алексей Сергеевич	УГНТУ	67	5
Карусейчик Илья Леонидович	БГУ	67	5
Lei Zhou Qun	HoHai	67	5
Рубанов Дмитрий Геннадьевич	ХНУ	66	6
Брязгин Александр Сергеевич	УрФУ	65	7
Галиев Даниил Игоревич	УрФУ	63	8
Yuan Tianyu	ShangHai	60	9
Федорцов Юрий Владимирович	БРУ	54	10
Трофимов Максим Сергеевич	УГНТУ	52	11
Wang Bin	ShangHai	52	11
Hu Linyuan	HoHai	52	11
Шигапов Рустам Рамилевич	УГНТУ	50	12
Zhang Mei	HoHai	50	12
Лавров Николай Александрович	УрФУ	47	13
Астапов Юрий Владимирович	ТулГУ	47	13
Иевлев Евгений Альбертович	СПбГУ	47	13
Высоцкий Владимир Степанович	УрФУ	47	13
Пузырев Павел Иванович	ЮУрГУ	45	14
Сулеманов Ренат Маратович	ЮУрГУ	45	14
Дородный Марк Александрович	СПбГУ	45	14
Пильник Владимир Сергеевич	ЮУрГУ	44	15
Тухватуллин Рустем Рауфович	УГНТУ	41	16
Кирьянов Роман Евгеньевич	БелГУТ	41	16
Нгуен Тхань Зием	ТулГУ	40	17
Акишев Александр Алекандрович	УрФУ	38	18
Палто Сергей Павлович	БелГУТ	37	19
Хабибуллин Азат Айдарович	КФУ	36	20
Брызгалов Андрей Иванович	БГУ	36	20
Ханнанов Айнур Ильшатович	УГНТУ	35	21
Останин Михаил Андревич	УрГУПС	33	22

Участники олимпиады, показавшие лучшие результаты по результатам теоретического конкурса в 2015 году.

Фамилия, имя, отчество участника	Команда	Сумма баллов	Место
Лобач Игорь Леонидович	БГУ	79	1
Куренков Михаил Александрович	МФТИ	74	2
Дидин Максим Александрович	МФТИ	66	3
Аннаев Мухамметгелди Овезгелдиевич	ТГУ	62	4
Рубанов Дмитрий Геннадьевич	ХНУ	61	5
Карусейчик Илья Леонидович	БГУ	59	6
Маликов Мейлис	ТГУ	59	6
Самойленко Альберт Владимирович	БГУ	57	7
Кравцов Павел Сергеевич	СПбГУ	54	8
Тойджанов Мекан	ТГУ	53	9
Хвалюк Антон Виктрович	МФТИ	53	9
Загвоздкин Андрей Вячеславович	МФТИ	52	10
Бойко Станислав Игоревич	УГНТУ	50	11
Галиев Даниил Игоревич	УрФУ	47	12
Савченко Олег Сергеевич	ХНУ	46	13
Zhencheng Jiang	HOHAI	44	14
Сухов Александр Дмитриевич	УрФУ	44	14
Яфаев Булат Маратович	УГНТУ	44	14
Лавров Николай Александрович	УрФУ	42	15
Реут Вадим Сергеевич	БГУ	42	15
Сальникова Анастасия Николаевна	Киев	40	16
Сейидов Пальван Ходжагелдиевич	ТГУ	40	16
Мазур Сергей Юрьевич	Киев	39	17
Пильник Владимир Сергеевич	ЮУрГУ	36	18
Палюх Алексей Леонидович	БарГУ	36	18
Матюшевский Денис Дмитриевич	БГУ	35	19
Рубаненко Мария Александровна	ХНУ	34	20
Wang Jia Chen	HOHAI	33	21
Акишев Александр Александрович	УрФУ	33	21
Куриленко Вадим Геннадьевич	ХНУ	33	21
Нгуен Тхань Зием	Тула	33	21
Карамов Радмир Ильгизович	УГНТУ	33	21
Костелов Максим Александрович	УГНТУ	33	21
Сагитов Вильдан Булатович	УГНТУ	32	22
Амбаров Александр Васильевич	УрФУ	31	23
Сулейманов Ренат Маратович	ЮУрГУ	31	23
Congrui Yang	HOHAI	31	23
Кирьянов Роман Евгеньевич	БелГУТ	31	23
Панкова Екатерина Константиновна	ЮУрГУ	29	24
Брызгалов Андрей Иванович	БГУ	29	24

10 РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ КОНКУРСОВ (КОМАНДНЫЙ ЗАЧЕТ)

Команда	2014 год		2015 год	
	Сумма баллов	Место	Сумма баллов	Место
HoHai	189	**2**	108	7
SGGW	48	15	26	23
ShangHai	180	**4**	–	–
Trakya	21	21	–	–
БарГУ	14	24	55	14
БГСХА	4	28	–	–
БГУ	216	**1**	194	**1**
БелГУТ	107	10	67	11
БНТУ	29	20	–	–
БрГТУ	59	13	31	20
БРУ	59	13	13	25
ВОЕНМЕХ	35	18	48	15
ГГТУ	42	17	15	24
ГГУ	20	22	8	27
ГИИ МЧС	7	26	–	–
ИАТЭ МИФИ	31	19	30	21
ИГЭУ	6	27	–	–
КИИ МЧС	49	14	–	–
КНИТУ	–	–	43	17
КНУ	–	–	97	9
КубГАУ	12	25	–	–
КФ ГосУНПК	2	29	2	29
КФУ	66	12	35	19
МГВАК	1	30	–	–
МГУП	7	26	7	28
МФТИ	–	–	192	**2**
ПГУ	42	17	29	22
СВФУ	69	11	–	–
СамГАУ	43	16	56	13
СибГАУ	–	–	43	17
СПбГУ	186	**3**	101	8
ТамбГТУ	–	–	9	26
ТвГТУ	18	23	–	–
ТуркмГУ	–	–	173	**3**
ТулГУ	119	9	44	16
УГНТУ	169	**6**	127	**6**
УрГУПС	66	12	38	18
УрФУ	175	**5**	133	**5**
ХНУ	129	8	141	**4**
ЮЗГУ	–	–	59	12
ЮУрГУ	158	7	96	10

11 РУКОВОДИТЕЛИ КОМАНД – УЧАСТНИЦ ОЛИМПИАД

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова (ВОЕНМЕХ) – Илихменев Андрей Львович.

Барановичский государственный университет (БарГУ) – Гавриленя Андрей Константинович, Сотник Леонид Леонидович.

Белорусский государственный университет транспорта (БелГУТ) – Шимановский Александр Олегович, Кузнецова Марина Григорьевна.

Белорусский государственный университет (БГУ) – Круподеров Андрей Валентинович, Мармыш Сергей Евгеньевич.

Белорусский национальный технический университет (БНТУ) – Скляр Ольга Николаевна.

Белорусско-Российский университет (БРУ) – Леванович Николай Андреевич.

Брестский государственный технический университет (БрГТУ) – Веремейчик Андрей Иванович.

Брянская сельскохозяйственная академия (БГСХА) – Блохин Валерий Николаевич.

Варшавский университет естественных наук (SGGW) – Марек Халецкий.

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого (ГГТУ) – Кроль Дмитрий Григорьевич.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ГГУ) – Герман (Астафьева) Анастасия Владимировна.

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь (ГИИ МЧС) – Шныпарков Александр Валерьевич.

Ивановский государственный энергетический университет (ИГЭУ) – Круглов Аркадий Владимирович.

Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ) – Муштари Айрат Ильдарович.

Казанский Федеральный университет (КФУ).

Карачевский филиал Госуниверситета–УНПК (КФ ГосУНПК) – Ветчинников Дмитрий Александрович.

Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко (КНУ).

Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь (КИИ МЧС) – Камлюк Андрей Николаевич.

Кубанский государственный аграрный университет (КубГАУ) – Богус Шумаф Нухович.

Минский государственный высший авиационный колледж (МГВАК) – Музыченко Павел Витальевич.

Могилевский государственный университет продовольствия (МГУП) – Покатилов Алексей Евгеньевич.

Московский физико-технический институт (государственный университет) (МФТИ) – Сандуляну Штефан Васильевич.

Национальный исследовательский Южно-Уральский государственный университет (ЮУрГУ) – Щевелёва Мария Петровна, Слепова Светлана Владимировна.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» Обнинский институт атомной энергетики (ИАТЭ МИФИ) – Кучерявый Сергей Иванович.

Полоцкий государственный университет (ПГУ) – Коренский Валерий Федорович.

Самарский государственный аэрокосмический университет (СамГАУ) – Ашихмина Дарья Андреевна.

Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) – Кальницкий Вячеслав Степанович.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова (СВФУ) – Алексеев Александр Алексеевич.

Сибирский государственный аэрокосмический университет (СибГАУ) – Фалькова Екатерина Владимировна, Фисенко Елена Николаевна.

Тамбовский государственный технический университет (ТамбГТУ) – Поляков Дмитрий Вадимович.

Тверской государственный технический университет (ТвГТУ) – Сергеев Дмитрий Александрович.

Тульский государственный университет (ТулГУ) – Тарасов Виктор Куприянович.

Туркменский государственный университет им. Махтумкули (ТуркмГУ) – Оразов Клычмамед.

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС) – Тарасян Владимир Сергеевич.

Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина (УрФУ) – Рощева Татьяна Анатольевна.

Уфимский государственный нефтяной технический университет (УГНТУ) – Тихонов Александр Юрьевич.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (ХНУ) – Пославский Сергей Александрович.

Юго-Западный государственный университет (ЮЗГУ) – Лупехина Ирина Владимировна.

HoHai University (HoHai) – Wenxiong Huang, Xiaochen Mao, Ji Lin.

Shanghai University (ShangHai) – Shi Dongli.

Trakya University (Trakya) – Metin Aydogdu.

12 КОМАНДЫ, ПОКАЗАВШИЕ ЛУЧШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В КОНКУРСЕ «БРЕЙН-РИНГ»

2014 год

1 УГНТУ-1 – Шигапов Р. Р., Свиридов А. С., Тухватуллин Р. Р. (24 балла).
2 БГУ-1 – Самойленко А. В., Карусейчик И. Л., Млечко И. Р. (22 балла).
3 СПбГУ-2 – Александров И. А., Иевлев Е. А., Кравцов П. С. (20 баллов).
HoHai-2 – Hu Llinyuan, Lei Zhou Qun (20 балла).
4 УрФУ-1 Брязгин А. С., Галиев Д. И., Высоцкий В. С. (19 баллов).
Shang Hai – Yuan Tianyu, Yu Li, Wang Bin (19 баллов).
5 ЮУрГУ-1 – Хабиров А. Ф., Пузырев П. И. (18 баллов).
HoHai -1 – ZHANG Mei, LI Junpu (18 баллов).
Сборная -1 – Трофимов М. С., Ханнанов А. И., (УГНТУ), Терентьева Т. В. (УрФУ) (18 баллов).
6 ХНУ – Рубаненко М. А., Кормилец А. Е. (15 баллов).
СПбГУ-1 – Костенко М. М., Иванов А. М., Дородный М. А. (15 баллов).

2015 год

1 УГНТУ – Карамов Р. И., Костенов М. А., Бойко С. И. (14 баллов).
2 Сборная -1 – Congrui Yang, Zhencheng Jiang (HoHai), Бурухина О. С. (УрФУ) (12 баллов).
БГУ-2 – Карусейчик И. Л., Лобач И. Л., Самойленко А. В. (12 баллов).
УрФУ – Акишев А. А., Галиев Д. И., Лавров Н. А. (12 баллов).
3 МФТИ – Куренков М. А., Хвалюк А. В., Дидин М. А. (11 баллов).
СПбГУ – Баляев И. А., Кравцов П. С., Соловьев И. А. (11 баллов).
УрФУ-2 – Сухов А. Д., Амбаров А. В., Соколов А. С. (11 баллов).
ХНУ – Рубаненко М. А., Рубанов Д. Г., Савченко О. С. (11 баллов).
ЮУрГУ-1 – Такиев Р. И., Панкова Е. К., Кучер М. И. (11 баллов).
Сборная-2 – Hongchen Li, Wang Jia Chen (HoHai), Palvan Seyidov (ТГУ) (11 баллов).
ЮУрГУ-2 – Михайлов Е. А., Пильник В. С., Сулейманов Р. М. (11 баллов).
4. БГУ-1 – Реут В. С., Матюшевский Д. Д., Брызгалов А. И. (9 баллов).
ТГУ – Тойджанов М., Маликов М., Аннаев М. (9 баллов).
ЮЗГУ – Бобров В. Е., Скрыльников Н. Е., Сабау К. (9 баллов).
КНИТУ – Азизов А. И., Шайхутдинов Р. К., Ворончихин Н. Д. (9 баллов).
Сборная-3 – Куриленко В. Г., Шимкив Д. В. (ХНУ), Загвоздкин А. В. (МФТИ) (9 баллов).
5. ВОЕНМЕХ – Понамарев А. П., Ивлев А. Д., Нигматулин Р. Р. (8 баллов).
КФУ – Ибрагимов А. В., Ибрагимов И. З., Камалетдинов Р. Р. (8 баллов).
УрГУПС-2 – Останин М. А., Калинин А. В., Курулюк А. Д. (8 баллов).
6. СибГАУ-2 – Калинин Е. Ф., Скрябин В. В., Шевчугов В. О. (6 баллов).
БарГУ – Стецкий Е. С., Наливко О. И., Помох А. Л. (6 баллов).
SGGW – Duchmak M., Sulej W., Szustkiewicz K. (6 баллов).
КНУ – Сальникова А. Н., Мазур С. Ю., Абрамов В. В. (6 баллов).