

УДК 531.1:534

А. И. ТЕСЕЛЬКО, Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Разработана упрощенная методика определения параметров и коэффициентов подобия для электрической модели механической колебательной системы. Предложены варианты использования такой методики для составления учебных задач при изучении электромеханической аналогии студентами механических и электротехнических специальностей. Указано на возможность развития методики для моделирования сложных колебательных систем.

Введение. Одним из наиболее распространенных способов описания колебаний в сложных механических системах является использование электромеханической аналогии [1]. При этом в соответствии с теоремами теории подобия [2] строится и анализируется электрическая модель исследуемой механической системы. В настоящее время в рамках учебных планов большинства технических вузов не уделяется должного внимания подобной разновидности моделирования. Ни в курсе «Теоретическая механика», ни в курсе «Электротехника» об электромеханической аналогии не упоминается. Учебная дисциплина «Основы научных исследований и инновационной деятельности» дает общее представление о моделировании по аналогии [3], однако ни расчетно-теоретические, ни прикладные задачи при этом не решаются. Вместе с тем, освоение метода электромеханической аналогии студентами технических специальностей способствовало бы укреплению междисциплинарных связей физики, теоретической механики и электротехники [4]. Кроме того, применение такой аналогии позволит повысить уровень усвоения студентами разделов, связанных с изучением колебательных процессов в различных системах. Реализация отмеченных положительных эффектов возможна только при внедрении в учебный процесс как теоретических сведений о принципе электромеханической аналогии, так и ряда прикладных задач, в том числе, для самостоятельного решения студентами.

Основой для составления и решения типовых учебных задач является расчетная методика, устанавливающая взаимосвязь между параметрами исследуемого объекта. В данном случае эта методика основана на теоремах теории подобия и позволяет определить коэффициенты подобия (перехода) для механической системы и ее электрической модели. Однако изучение общих правил и теорем теории подобия в классической постановке затруднено временными ограничениями соответствующих учебных курсов технического вуза и представляется нецелесообразным.

В связи с вышесказанным целью настоящей работы является формулировка упрощенной методики расчета параметров электрической модели механической колебательной системы и определения коэффициентов перехода от модели к объекту и обратно.

Механическая колебательная система и ее электрическая модель. В качестве моделируемого объекта рассмотрим механическую колебательную систему, состоящую из материальной точки массы m (кг), пружины и демпфера (рисунок 1, а). Коэффициент жесткости пружины – k (Н/м = кг·с⁻²), а коэффициент вязкого сопротивления демпфера – α (Н·с/м = кг·с⁻¹). На материальную точку действует вынуждающая гармоническая сила с амплитудой F_0 (Н = кг·м·с⁻²) и частотой $\omega^{об}$ (с⁻¹). Подобная система используется при анализе колебаний транспортных средств [5] и вибраций элементов механических передач [6]. Искомой величиной для рассматриваемого объекта является смещение x (м) материальной точки в произвольный момент времени $t^{об}$ (с). Величина x удовлетворяет динамическому уравнению [7]

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega^{об} t^{об}). \quad (1)$$

Здесь и далее точка над символом означает производную по времени от соответствующей величины.

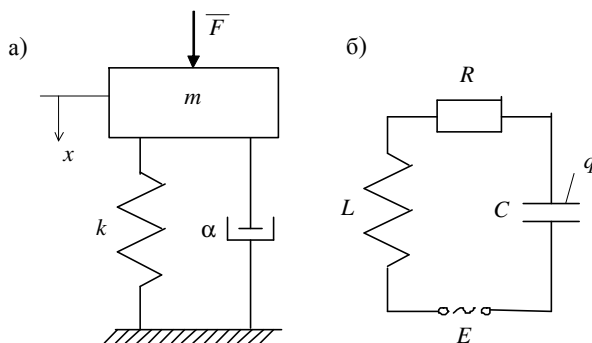


Рисунок 1 – Моделируемая колебательная механическая система (а) и ее электрическая модель (б)

Электрическая модель рассматриваемого объекта представляет собой схему (рисунок 1, б), в которой последовательно соединены конденсатор емкостью C ($\Phi = \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$), электрическое сопротивление R ($\text{Ом} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$), катушка индуктивностью L ($\text{Гн} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$) и источник ЭДС. ЭДС изменяется по гармоническому закону с частотой $\omega^{\text{мод}}$ (с⁻¹) и имеет амплитуду E_0 (В = кг·м²·с⁻³·А⁻¹). Электрический заряд q (Кл = с·А) на обкладках конденсатора такой схеме удовлетворяет дифференциальному уравнению [8]

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_0 \sin(\omega^{\text{мод}} t^{\text{мод}}). \quad (2)$$

Сопоставив уравнения (1) и (2), можно сделать вывод о том, что заряд на обкладках конденсатора в электрической модели будет изменяться со временем по тому же закону, что и смещение груза в механической системе. При этом можно составить таблицу 1 соответствия характеристик объекта и модели.

Таблица 1 – Характеристики механической системы и соответствующие им характеристики электрической модели

Объект	m , кг	k , Н/м	α , Н·с/м	F_0 , Н	$\omega^{об}$, с ⁻¹	$t^{об}$, с	x , м
Модель	L , Гн	$1/C$, Ф ⁻¹	R , Ом	E_0 , В	$\omega^{мод}$, с ⁻¹	$t^{мод}$, с	q , Кл

Критерии подобия. В соответствии с правилами теории подобия [2] процесс создания модели начинается с предварительного анализа объекта. Данный анализ включает в себя следующие действия:

1 Определение физической размерности объекта d . Физической размерностью называют минимальное количество основных единиц измерения, достаточных для задания размерностей всех характеристик объекта. В данном случае $d = 3$ (кг, м, с).

2 Определение параметров объекта. Параметрами в теории подобия называют размерные характеристики объекта, полного набора которых достаточно для определения искомых величин. Для рассматриваемого объекта параметрами являются масса m , коэффициент жесткости k , коэффициент вязкого сопротивления α , амплитуда вынуждающей силы F_0 , частота вынуждающей силы $\omega^{об}$, время $t^{об}$. Количество параметров $n = 6$.

3 Определение обобщенных координат объекта. Обобщенными координатами в теории подобия называют искомые величины для объекта, которые являются функциями параметров. В данном случае обобщенной координатой является смещение груза x . Количество обобщенных координат $s = 1$.

После предварительного анализа объекта составляются критерии подобия. Критерий подобия это безразмерная комбинация физических величин, составленная путем возведения в степень и перемножения характеристик объекта. Количество N критериев подобия для объекта определяется по формуле

$$N = n + s - d . \quad (3)$$

Для моделируемого объекта необходимо составить 4 критерия. Критерии подобия должны удовлетворять следующим условиям:

1 Условие полноты. Критерии должны содержать все характеристики (параметры и обобщенные координаты) объекта:

2 Условие независимости. Данное условие означает невозможность выразить один из критериев как комбинацию остальных. Условие независимости выполняется, если каждый критерий содержит величину, которая не входит в другие критерии.

3 Условие функциональности. Обобщенная координата должна входить только в один критерий, причем только одна. То есть два (или более) критериев не должны содержать одну обобщенную координату, и один критерий не должен содержать две (или более) обобщенных координат.

4 Условие простоты. Степени величин в критериях должны быть минимальными по модулю.

При ограниченности времени, выделяемого на освоение электромеханической аналогии, критерии подобия для объекта следует изложить в готовом виде с последующей проверкой выполнения указанных условий. Если имеется возможность выделить на освоение данной темы более 6 академических часов, то можно изложить универсальную методiku составления критериев подобия [2]. Эта методика состоит в следующем.

Из всего набора параметров объекта выбирают d базовых. Базовые параметры должны иметь независимые размерности. То есть, из базовых параметров невозможно составить критерий подобия. Кроме того, в качестве базовых параметров не следует выбирать переменные (изменяющиеся со временем или координатой) параметры. В рассматриваемом случае базовыми параметрами могут служить: масса m , частота $\omega^{об}$ и амплитуда F_0 вынуждающей силы. Критерий подобия представляет собой произведение каждой из оставшихся характеристик объекта на комбинацию базовых параметров. Пусть первый критерий содержит смещение x . Тогда

$$\Pi_1 = x \cdot m^{z_1} \cdot (\omega^{об})^{z_2} \cdot F_0^{z_3}. \quad (4)$$

Степени z_1, z_2, z_3 определяются из условия безразмерности критерия.

$$[\Pi_1] = 1 = \text{м} \cdot \text{кг}^{-z_1} \cdot \text{с}^{-z_2} \cdot \text{кг}^{z_3} \cdot \text{м}^{z_3} \cdot \text{с}^{-2z_3} = \text{кг}^{-z_1+z_3} \cdot \text{м}^{1+z_3} \cdot \text{с}^{-z_2-2z_3}.$$

Степени всех основных единиц измерения должны быть равны нулю. Следовательно,

$$\begin{cases} z_1 + z_3 = 0, \\ 1 + z_3 = 0, \\ -z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases}.$$

Решая данную систему уравнений, получим: $z_1 = 1; z_2 = 2; z_3 = -1$. Подставим эти значения в выражение (4) для первого критерия

$$\Pi_1 = x \cdot m^1 \cdot (\omega^{об})^2 \cdot F_0^{-1} = \frac{m(\omega^{об})^2 x}{F_0}.$$

Выполняя аналогичные действия для остальных характеристик объекта ($k, \alpha, t^{об}$), получим

$$\Pi_2 = \frac{k}{m(\omega^{об})^2}, \quad \Pi_3 = \frac{\alpha}{m\omega^{об}}, \quad \Pi_4 = \omega^{об} t^{об}.$$

В качестве задания для студентов можно предложить самостоятельно составить критерии подобия при выборе других базовых параметров. Одним из таких параметров в обязательном порядке должна быть амплитуда вынуждающей силы F_0 . При этом обеспечивается выполнение условия независимости размерностей базовых параметров. Не рекомендуется в качестве базового параметра выбирать время $t^{об}$.

Используя таблицу 1 соответствия характеристик объекта и модели, получим критерии подобия для модели (таблица 2).

Таблица 2 – Критерии подобия для объекта и модели

Объект	Модель
$\frac{m(\omega^{об})^2 x}{F_0}$	$\frac{L(\omega^{мод})^2 q}{E_0}$
$\frac{k}{m(\omega^{об})^2}$	$\frac{1}{CL(\omega^{мод})^2}$
$\frac{\alpha}{m\omega^{об}}$	$\frac{R}{L\omega^{мод}}$
$\omega^{об} t^{об}$	$\omega^{мод} t^{мод}$

Необходимым условием подобия модели и объекта является равенство соответствующих критериев [2]. Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\frac{m(\omega^{об})^2 x}{F_0} = \frac{L(\omega^{мод})^2 q}{E_0}, \quad \frac{k}{m(\omega^{об})^2} = \frac{1}{CL(\omega^{мод})^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{m\omega^{об}} = \frac{R}{L\omega^{мод}}, \quad \omega^{об} t^{об} = \omega^{мод} t^{мод}.$$

Данная система уравнений позволяет определить параметры электрической модели и коэффициенты перехода от модели к объекту. В уравнениях (5) удобнее перейти от физических величин к коэффициентам подобия. Коэффициент подобия физической величины для объекта равен отношению любого значения данной величины к соответствующему значению для модели [3]. Согласно таблице 1 для рассматриваемого объекта требуется знать семь коэффициентов подобия

$$k_L^m = \frac{m}{L}, \quad k_C^k = kC, \quad k_R^\alpha = \frac{\alpha}{R}, \quad k_E^F = \frac{F_0}{E_0}, \quad k_\omega = \frac{\omega^{об}}{\omega^{мод}}, \quad k_t = \frac{t^{об}}{t^{мод}}, \quad k_q^x = \frac{x}{q}.$$

При моделировании по аналогии в отличие от классического физического моделирования [3] многие коэффициенты подобия будут иметь размерность.

Система уравнений (5) для коэффициентов подобия примет вид

$$\frac{k_L^m k_q^x k_\omega^2}{k_E^F} = 1, \quad \frac{k_C^k}{k_L^m k_\omega^2} = 1, \quad \frac{k_R^\alpha}{k_L^m k_\omega} = 1, \quad k_\omega k_t = 1. \quad (6)$$

Пример использования расчетной методики. В качестве примера рассмотрим механическую колебательную систему, значения постоянных (не зависящих от времени) параметров которой приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Исходные параметры объекта

Параметр	m , кг	k , Н/м	α , Н·с/м	F_0 , Н	$\omega^{об}$, с ⁻¹
Значение	5	10	2	10	100

При создании модели исследователь может произвольно задать значения некоторых ее постоянных параметров. Количество произвольно задаваемых параметров модели совпадает с физической размерностью объекта d . Размерности этих параметров должны быть независимы. Предпочтительно задавать значения параметров модели, соответствующих базовым параметрам объекта. В рассматриваемом примере зададим значения индуктивности L , частоты $\omega^{мод}$ и амплитуды E_0 ЭДС (таблица 4). Значения остальных характеристик модели должны удовлетворять уравнениям (5).

Таблица 4 – Задаваемые значения параметров модели

Параметр	L , Гн	E_0 , В	$\omega^{мод}$, с ⁻¹
Значение	2,5	50	200

Задав значения параметров модели L , $\omega^{мод}$, E_0 , мы тем самым определили некоторые коэффициенты подобия

$$k_L^m = \frac{m}{L} = 2 \text{ (кг/Гн)}, \quad k_E^F = \frac{F_0}{E_0} = 0,2 \text{ (Н/В)}, \quad k_\omega = \frac{\omega^{об}}{\omega^{мод}} = 0,5.$$

Значения остальных коэффициентов подобия находятся из системы (6). Из второго и третьего уравнений системы получим

$$k_C^k = k_L^m k_\omega^2 = 0,5 \text{ (Н·Ф/м)}, \quad k_R^\alpha = k_L^m k_\omega = 1 \text{ (Н·с·м}^{-1} \cdot \text{Ом}^{-1})}. \quad (7)$$

Следовательно,

$$C = \frac{k_C^k}{k} = 0,05 \text{ (Ф)}, \quad R = \frac{\alpha}{k_R^\alpha} = 2 \text{ (Ом)}.$$

Из четвертого уравнения находим коэффициент подобия времени k_t , называемый также хронологическим коэффициентом

$$k_t = \frac{1}{k_\omega} = 2. \quad (8)$$

Из первого уравнения системы (6) определим коэффициент подобия обобщенной координаты

$$k_q^x = \frac{k_E^F}{k_L^m k_\omega^2} = 0,4 (\text{мм/Кл}). \quad (9)$$

Выражения (7) определяют параметры электрической системы, которая может считаться моделью рассматриваемого объекта. Соотношения (8) и (9) позволяют использовать результаты измерений на модели для описания объекта. Предположим, что через время $t^{\text{мод}}$ (с) после начала электрических колебаний заряд на обкладках конденсатора составлял q (Кл), а сила тока в катушке $-I$ (А). Следовательно, через время $t^{\text{об}} = k_t t^{\text{мод}} = 2t^{\text{мод}}$ (с) после начала механических колебаний смещение груза составит $x = k_q^x q = 0,4q$ (м), а его

скорость $-v = \frac{k_q^x}{k_t} I = 0,2I$ (м/с).

Вывод. Таким образом, методика определения параметров электрической модели механической колебательной системы состоит в следующем:

1 Составляется таблица соответствия характеристик объекта и модели (см. таблицу 1).

2 Осуществляется предварительный анализ объекта. При этом определяется физическая размерность d , набор параметров и обобщенных координат объекта. Также определяется количество требуемых критериев подобия по формуле (3).

3 Составляются критерии подобия. Составление критерия осуществляется либо подбором с последующей проверкой выполнения основных требований (при ограниченности учебного времени), либо по универсальной методике, подразумевающей выбор базовых параметров.

4 Критерии подобия для объекта приравниваются к соответствующим комбинациям характеристик модели и составляются уравнения для коэффициентов подобия (6).

5 Произвольно задаются значения некоторых параметров модели и вычисляются все критерии подобия.

Освоение данной методики не требует от студента изучения в полном объеме теорем теории подобия. Достаточно владения международной системой единиц и знания фундаментальных соотношений, описывающих механические и электрические колебательные процессы.

Разработанная методика излагается преподавателем в лекционной форме с последующим составлением учебных задач для самостоятельного решения студентами. При этом имеется возможность менять набор базовых параметров для составления критериев подобия, задавать значения других параметров модели и изменять числовые значения характеристик объекта. Более широкие возможности для разнообразия практических заданий возникают при моделировании механических систем, содержащих несколько пружин, демпферов и масс.

Варианты развития расчетной методики. При моделировании более сложных механических колебательных систем следует использовать правило, обоснованное в работе [4]. Его можно сформулировать следующим образом. Последовательное соединение механических элементов (пружин и демпферов) моделируется параллельным соединением соответствующих электрических элементов (конденсаторов и электрических сопротивлений), а параллельное соединением механических элементов – последовательным соединением электрических. В частности, для моделирования системы, содержащей дополнительную последовательно установленную пружину (рисунок 2, а), следует использовать электрическую схему, представленную на рисунке 2, б.

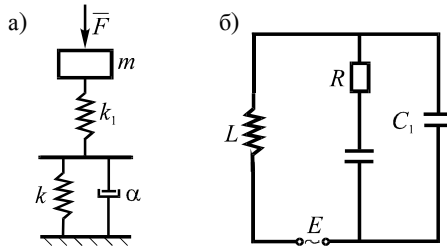


Рисунок 2 – Колебательная механическая система с дополнительной пружиной (а) и электрическая модель такой системы (б)

Динамическое уравнение движения моделируемого объекта

$$m \frac{\alpha}{k_1} \ddot{x} + m \left(1 + \frac{k}{k_1} \right) \dot{x} + \alpha x + kx = \frac{\alpha \omega^{об}}{k_1} F_0 \cos(\omega^{об} t^{об}) + \left(1 + \frac{k}{k_1} \right) F_0 \sin(\omega^{об} t^{об}). \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение для электрического заряда, протекающего через катушку индуктивности в электрической модели, имеет вид

$$RC_1 L \ddot{q} + L \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \dot{q} + Rq + \frac{1}{C} q = RC_1 \omega^{мод} E_0 \cos(\omega^{мод} t^{мод}) + \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) E_0 \sin(\omega^{мод} t^{мод}). \quad (11)$$

В уравнениях (10) и (11) выполняется соответствие характеристик модели и объекта, описанное в таблице 1. Следовательно, коэффициенты подобия для систем, представленных на рисунке 2, будут удовлетворять уравнениям (6). Таким образом, разработанная методика не изменяется при увеличении количества элементов в моделируемом объекте. Коэффициент подобия некоторой физической величины должен быть одинаков для всех значений данной величины. То есть

$$k_C^k = kC = k_1 C_1 = k_2 C_2 = \dots; k_R^\alpha = \frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha_1}{R_1} = \frac{\alpha_2}{R_2} = \dots$$

То же справедливо для всех критериев подобия.

Для инерционных элементов сформулированное в работе [4] правило расположения элементов модели не выполняется. При моделировании многомассовых колебательных систем катушки индуктивности в электрической модели располагаются «лестницей», как показано на рисунке 3. Тогда сила тока I_i в катушке индуктивностью L_i будет соответствовать скорости v_i груза массой m_i . Здесь i — номер материальной точки.

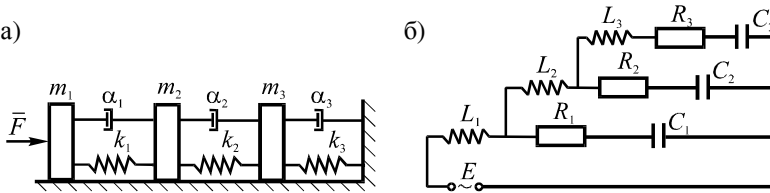


Рисунок 3 – Трехмассовая колебательная механическая система (а) и ее электрическая модель (б)

Заключение. Показана возможность относительно простого и краткого изложения метода электромеханической аналогии. Предложенный способ изложения подразумевает использование правил и теорем теории подобия без изучения этих теорем в полном объеме. Разработанная в рамках данного способа расчетная методика позволяет сформулировать комплекс практических заданий для лучшего усвоения студентами излагаемого материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Елисеев, С. В. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 394 с.
- 2 Седов, Л. И. Методы размерности и подобия в механике / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1987. – 440 с.
- 3 Кузёмкина, Г. М. Основы научных исследований / Г. М. Кузёмкина. – Гомель : БелГУТ, 2005. – 82 с.
- 4 Комнатный, Д. В. Межпредметные связи в курсе теоретической механики для специальности «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» / Д. В. Комнатный // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Вып. 8. – Гомель : БелГУТ, 2014. – С. 210–214.
- 5 Высоцкий, М. С. Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн / М. С. Высоцкий, Ю. М. Плещачевский, А. О. Шимановский. – Минск : Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.
- 6 Ишин, Н. Н. Динамика и вибромониторинг зубчатых передач / Н. Н. Ишин. – Минск : Беларус. навука, 2013. – 432 с.
- 7 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высш. шк., 1995. – 416 с.

8 **Теоретические основы электротехники:** учеб. для вузов. Т. 1 / К. С. Демирчян [и др.]. – СПб. : Питер, 2003. – 463 с.

A. I. TESELKO, D. A. CHERNOUS
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

EXAMPLES OF ELECTROMECHANICAL ANALOGIES USAGE IN THEORETICAL MECHANICS

There was developed a simplified method of determining the parameters and similarity coefficients for the electric models of the mechanical oscillation system. There are suggested the variants this methodology application to the educational problems composition during the study of electromechanical analogy by students of mechanical and electrical specialties. The possibility of the modeling techniques development of complex oscillatory systems is specified.

Получено 27.07.2015

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 9. Гомель, 2016

УДК 004=20

В. О. ШЕВЧУГОВ, Е. Ф. КАЛИНИН
*Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

РОБОТ-АНДРОИД

Рассматриваются принципы создания робота-андроида, предназначенного для выполнения тяжелых и опасных работ. Разработана конструкция руки робота. Обсуждаются пути развития системы управления движением элементов конструкции.

Роботы-андроиды – это роботы, которые по внешнему виду напоминают человека. Еще совсем недавно такие автоматические устройства были для большинства людей только фантастикой. Они упоминались в книгах, кинофильмах, но, самое главное, они были в мечтах людей, которых все больше привлекала идея о создании автоматических помощников. По умолчанию предполагается, что роботы-андроиды универсальны, они способны выполнять множество разнообразных задач, а потому являются востребованными [1]. Сегодня в мире существует немного прототипов таких роботов, но над их созданием трудится большое количество ученых и инженеров.

В настоящее время существует множество профессий (например, пожарники, шахтеры, монтажники линий электропередачи), которые несмотря на технический прогресс остаются опасными для человека. Каждый день такие люди рискуют своей жизнью, выполняя свою обычную работу. В связи с