УДК 539.3

В. М. ХВИСЕВИЧ, А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК
Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ И ТЕРМОУПРУГОЙ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Предлагается алгоритм решения краевой задачи термоупругости, основанный на применении метода потенциала. Рассмотрены основные аспекты вывода интегрального уравнения теплопроводности, построение термоэластопотенциалов, вывод интегральных уравнений для определения термоупругих осесимметричных напряжений и перемещений.

Введение. При исследовании напряженно-деформированного состояния осесимметричных тел необходимо поставить краевую задачу теории упругости (термоупругости) и разработать эффективный метод ее решения. Для тел со сложной геометрией аналитически решить такого рода задачу в большинстве случаев практически невозможно, поэтому в настоящее время применение нашли различные численные методы. Решение рассматриваемой задачи выполним, используя метод потенциала [1].

Постановка задачи. Рассмотрим однородное изотропное тело вращения (ось z направим по оси вращения), которое подвергается воздействию осесимметричного температурного поля $T(\rho, z)$ и поверхностных сил q_ρ, q_z, которые таковы, что перемещения, деформации и напряжения не зависят от угловой координаты.

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях u, w имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta u - \dfrac{u}{\rho^2} + \dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e}{\partial \rho} - \dfrac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\alpha\dfrac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \\ \Delta w + \dfrac{3}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e}{\partial z} - \dfrac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\alpha\dfrac{\partial T}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где υ – коэффициент Пуассона; α – коэффициент температурного расширения.

Напряжения на основании гипотезы Дюгамеля-Неймана выражаются через перемещения соотношениями:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{u}{\rho} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right), \ \sigma_{\rho z} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right),$$

где $e=\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{u}{\rho}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Формулы Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho}=\frac{\partial u}{\partial \rho};\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta}=\frac{u}{\rho};\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z};\ \gamma_{\rho z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \rho} \tag{3}$$

Постановка рассматриваемой осесимметричной задачи в перемещениях в общем случае сводится к определению неизвестных, которые удовлетворяют уравнениям (1), (2), (3), уравнениям совместности деформаций [2], граничным условиям

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\rho}n_\rho+\sigma_{\rho z}n_z=p_\rho(x_s),\\ &\sigma_{\rho z}n_\rho+\sigma_{zz}n_z=p_z(x_s), \end{aligned} \tag{4}$$

где p_ρ, p_z – заданные условия на поверхности S, которые определяют механические параметры и температурное поле T, которое подчиняется уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

Краевая задача (1–5) по существу является трехмерной, однако из-за осевой симметрии области, нагрузки и температуры приводится к двумерной.

Используя классический способ, выведем интегральное уравнение теплопроводности осесимметричной задачи, построим осесимметричные термоэластопотенциалы, сингулярные интегральные уравнения (СИУ) для определения термоупругих напряжений и перемещений.

Интегральное уравнение температурной задачи Дирихле в цилиндрических координатах. Рассматриваемая задача является меридионально осесимметричной. Выражение для $T(x_s)$ согласно [3] примем в виде:

$$T(x_s)=2\pi\chi(x)\eta+v.p.\oint_S \chi(y)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS_y\,, \tag{6}$$

где χ – плотность потенциала двойного слоя; $\eta = 1$ для внутреннего предела, $\eta = 0$ для прямого значения и $\eta = -1$ для внешнего предела; *v.p.* означает главное значение сингулярного интеграла по Коши; φ – угол между вектором $\bar{r}$ и внешней нормалью $\bar{n}$ к поверхности; r – расстояние от источника y до любой параметрической точки x пространства, S – площадь.

Будем считать, что плотность потенциала $\chi(y)$ в (6) не зависит от окружной координаты ϑ_y, а функция температуры не зависит от ϑ_x. Тогда в интеграле уравнения (6) следует положить

$$dS_y=\rho_y d\Theta dl_y,\ \Theta=\vartheta_y-\vartheta_x=2\gamma=\pi, \tag{7}$$

где dl_y – элемент дуги меридионального контура L.

Расстояние r выражается так:

$$r^2=\rho_x^2+\rho_y^2-2\rho_x\rho_y\cos\Theta+Z^2,\ Z=z_y-z_x,\ \Theta=2\gamma+\pi, \tag{8}$$

$$r^2=\frac{4\rho_y\rho_x}{k^2}(\Delta\gamma)^2,\ \ k^2=\frac{4\rho_y\rho_x}{(\rho_y+\rho_x)^2+Z^2},\ \ n^2=\frac{2\rho_y\rho_x}{\rho_y+\rho_x},$$

$$(\Delta\gamma)^2=1-k^2\sin^2\gamma,\ \ 0\le k\le 1,$$

$$\cos\Theta=-\cos 2\gamma=\sin^2\gamma-\cos^2\gamma=2\sin^2\gamma-1,$$

$$\sin^2\gamma=\frac{1-(\Delta\gamma)^2}{k^2},\ \ \cos\Theta=\frac{1}{k^2}\left[(2-k^2)-2(\Delta\gamma)^2\right]$$

Направляющие косинусы вектора $\overline{r}$ принимают вид:

$$\beta_{\rho x}=-\frac{\partial r}{\partial\rho_x}=\frac{\rho_x\cos\Theta-\rho_x}{r},\ \ \beta_{\rho y}=\frac{\partial r}{\partial\rho_y}=\frac{\rho_y-\rho_x\cos\Theta}{r},$$

$$\beta_{zx}=\frac{\partial r}{\partial z_x}=\frac{Z}{r},\ \ \beta_{zy}=\frac{\partial r}{\partial z_y}=\frac{Z}{r}, \tag{9}$$

$$\beta_{\vartheta x}=-\frac{\partial r}{\rho_x\partial\vartheta_x}=\rho_y\frac{\sin\Theta}{r},\ \ \beta_{\vartheta y}=-\frac{\partial r}{\partial\vartheta_y}=\rho_x\frac{\sin\Theta}{r},$$

при этом

$$\cos\varphi=\frac{\partial r}{\partial n_y}=n_{\rho y}\beta_{\rho y}+n_{zy}\beta_{zy},\quad \cos\psi=\frac{\partial r}{\partial n_x}=n_{\rho x}\beta_{\rho x}+n_{zx}\beta_{zx},$$

где n_{ρ_x}, n_{z_x} – направляющие косинусы нормали $\overline{n}_x$ в параметрической точке x; n_{ρ_y}, n_{z_y} – направляющие косинусы нормали $\overline{n}_y$ к поверхности S в текущей точке y, $n_{\vartheta_y}\equiv 0$, $n_{\vartheta x}\equiv 0$.

Потенциал двойного слоя представим в виде:

$$\begin{aligned}T(x)&=\oint_S\chi(y)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS_y=\int_L\chi(y)\rho_y dl_y\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}d\Theta=\\&=\int_L\chi(y)\rho_y dl_y\left(n_{\rho y}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_y-\rho_x\cos\Theta}{r^3}d\Theta+n_{zy}\int_0^{2\pi}\frac{Z}{r^3}d\Theta\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Два последних интеграла в (10) приводятся к полным эллиптическим интегралам первого K и второго E родов в нормальной форме Лежандра.

Согласно определению полных эллиптических интегралов, K и E в данном случае определяются из соотношений:

$$K(k^2)=\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{\Delta\gamma},\ \ E(k^2)=\int_0^{2\pi}(\Delta\gamma)d\gamma, \tag{11}$$

тогда из [4] найдем

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{(\Delta\gamma)^3}=\frac{E}{1-k^2},\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{(\Delta\gamma)^5}=\frac{1}{3(1-k^2)}\left[\frac{2(2-k^2)}{1-k^2}E-K\right].$$

Если угол Θ находится в интервале (0; 2π), то угол γ изменяется от –π/2 до π/2. Для симметричных функций интеграл в пределах от от –π/2 до π/2 можно заменить удвоенным интегралом от нуля до π/2.

Таким образом, воспользовавшись [4] и (11), интегралы из (10), а также содержащие термоэластопотенциалы, можно привести к эллиптическим интегралам. В [3] получены девять интегралов I_1–I_9, которыми воспользуемся в удобной для дальнейших расчетов форме:

$$I_4=\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{r}=\frac{k}{\sqrt{\rho_x\rho_y}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\gamma}{\Delta\gamma}=\frac{2k}{\sqrt{\rho_x\rho_y}}K,$$

$$I_5=\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{r^3}=\frac{k^3}{2\sqrt{\rho_y^3\rho_x^3}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\gamma}{(\Delta\gamma)^3}=\frac{k^3}{\sqrt{\rho_y^3\rho_x^3}}E, \tag{12}$$

$$I_9=\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{r^5}=8\frac{k^5}{2\sqrt{\rho_y^5\rho_x^5}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\gamma}{(\Delta\gamma)^5}=\frac{k^5}{24\sqrt{\rho_y^5\rho_x^5}(1-k^2)}\left[\frac{2(2-k^2)}{1-k^2}E-K\right].$$

Используя I_4, I_5, I_9 и выражение для cosΘ в (8), получим:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta}{r}d\Theta=\frac{2}{k\sqrt{\rho_x\rho_y}}\left[(2-k^2)K-E\right],$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta}{r^3}d\Theta=\frac{k}{2\sqrt{\rho_y^3\rho_x^3}}\left[\frac{2-k^2}{1-k^2}E-2K\right],$$

$$I_3=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\Theta}{r^3}d\Theta=\frac{1}{2k\sqrt{\rho_y^3\rho_x^3}}\left[\frac{k^4-8k^2+8}{1-k^2}E-4(2-k^2)K\right],$$

$$I_6=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta}{r^5}d\Theta=\frac{k^3}{24\sqrt{\rho_y^5\rho_x^5}(1-k^2)}\left[\frac{2(k^4-k^2+1)}{1-k^2}E-(2-k^2)K\right], \tag{13}$$

$$I_7=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\Theta}{r^5}d\Theta=\frac{k}{24\sqrt{\rho_y^5\rho_x^5}(1-k^2)}\left[\frac{2(k^6-6k^2+4)}{1-k^2}E+(k^4+8k^2-8)K\right],$$

$$I_8=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\Theta}{r^5}d\Theta=-\frac{2(k^8+6^6-33k^4+64k^2-32)E/(1-k^2)+(k^6+30k^4-96k^2+64)K}{24k\sqrt{\rho_y^5\rho_x^5}(1-k^2)}.$$

Представляя интегралы в (10) через полные эллиптические согласно (12), (13), получим:

$$T(x)=\int\limits_L \chi(y)\rho_y dl_y[n_{\rho y}(\rho_y I_5-\rho_x I_2)+n_{zy}ZI_5]=$$

$$=\int\limits_L \chi(y)\rho_y dl_y \frac{k(2-n)^{3/2}}{2\rho_x^3 n^3(1-k^2)}\Big\{[n_{\rho y}\rho_y k^2-n\rho_y\rho_x(2-k^2)+n_{zy}Zk^2]E+ \quad (14)$$

$$+2n_{\rho y}\rho_x(1-k^2)K\Big\}.$$

Формула (14) (как и интегральные уравнения осесимметричной задачи теории упругости [2]) содержит величины k и n. Присутствие этих величин вносит существенную погрешность при вычислении сингулярных интегралов в интегральных формулах температурных добавок напряжений [3]. Поэтому в (14) исключим k и n и преобразуем к виду, удобному для численного решения. Тогда (14) примет вид:

$$T(x)=\int\limits_L \chi(y)\frac{2}{R}\left(\left\{\frac{2\rho_y}{R_1^2}\left[(\rho_y-\rho_y)n_{\rho y}+Zn_{zy}\right]-n_{\rho y}\right\}E+n_{\rho y}K\right)dl_y, \qquad (15)$$

где $R^2=[(\rho_y+\rho_x)^2+Z^2]$, $R_1^2=[(\rho_y-\rho_x)^2+Z^2]$.

Интегральное уравнение краевой осесимметричной задачи Дирихле запишется в виде:

$$2\pi\chi(x)+v.p.\int\limits_L \chi(y)\frac{2}{R}\left(\left\{\frac{2\rho_y}{R_1^2}\left[(\rho_y-\rho_x)n_{\rho y}+Zn_{zy}\right]-n_{\rho y}\right\}E+n_{\rho y}K\right)dl_y=F(x). \qquad (16)$$

Как и в трехмерной задаче, (16) можно применять при решении температурных задач Дирихле во внутренней односвязной области (случай J по Н. М. Гюнтеру [5]).

Решив (16) относительно плотности $\chi(y)$, можно по формуле (15) найти температуру в любой точке осесимметричной области.

Интегральные уравнения осесимметричных термических перемещении и напряжений. На втором этапе решается задача термоупругости. Решение системы уравнений (1) разыскиваем в форме, предложенной Гудьером [3]:

$$\bar{u}=\bar{u}_0+\bar{u}_1, \qquad (17)$$

где $\bar{u}_0$ – общее решение (1); частное решение $\bar{u}_1$ согласно [3] представим градиентом некоторой бигармонической функции W:

$$\bar{u}_1=\mathrm{grad}W. \qquad (18)$$

Представляя температуру T потенциалом двойного слоя (15), выражаем бигармоническую функцию $W=-a\oint\limits_S \chi(y)\frac{d}{dn_y}\left(\frac{r}{2}\right)dS_y$, где $a=\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha$.

Тогда частное решение осесимметричной задачи термоупругости примет вид:

$$
\begin{aligned}
u^T &= -\frac{\partial W}{\partial \rho_x} = -a\oint_S \chi(y)\frac{\partial^2 r}{\partial n_y \partial \rho_x} dS_y = -a\oint_S \chi(y)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \rho_x \partial \rho_y} + n_{zy}\frac{\partial^2 r}{\partial \rho_x \partial z_y}\right) dS_y, \\
w^T &= -\frac{\partial W}{\partial z_x} = -a\oint_S \chi(y)\frac{\partial^2 r}{\partial n_y \partial z_x} dS_y = -a\oint_S \chi(y)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_x \partial \rho_y} + n_{zy}\frac{\partial^2 r}{\partial z_x \partial z_y}\right) dS_y.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Определяя соответствующие производные от r и подставляя их в (19), выполняя интегрирование по Θ с использованием интегралов (12), (13), получим осесимметричные термоэластопотенциалы для перемещений:

$$
\begin{aligned}
u^T &= -\frac{a}{8\pi\mu}\int_L \chi(y)\frac{2}{R}\left(\left\{\frac{\rho_y}{\rho_x}(\rho_y n_{\rho y} + Z n_{zy}) - \frac{(\rho_y - \rho_x)}{R_1^2} 2\rho_y \times \right.\right. \\
&\left.\left. \times\left[(\rho_y - \rho_x) n_{\rho y} + Z n_{zy}\right] + \rho_x n_{\rho y}\right\} E - \left[\frac{\rho_y}{\rho_x}(\rho_y n_{\rho y} + Z n_{zy}) + \rho_x n_{\rho y}\right] K\right) dl_y, \\
w^T &= -\frac{a}{8\pi\mu}\int_L \chi(y)\frac{2}{R}\left(\left\{\left[2\rho_y \frac{(\rho_y - \rho_x)}{R_1^2} - 1\right] Z n_{\rho y} + 2\rho_y \frac{Z^2}{R_1^2} n_{zy}\right\} E + \right. \\
&\left. + (Z n_{\rho y} - 2\rho_y n_{zy}) K\right) dl_y.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Температурные добавки напряжений определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^T &= -\frac{a}{4\pi}\oint_S \chi(y)\frac{d}{dn_y}\left(\frac{2}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial \rho_x^2}\right) dS_y = -\frac{a}{4\pi}\oint_L \chi(y)\rho_y\, dl_y \int_0^{2\pi}\left(\frac{2\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial^3 r}{\partial z_x^2 \partial n_y}\right) d\Theta, \\
\sigma_{zz}^T &= -\frac{a}{4\pi}\oint_S \chi(y)\frac{d}{dn_y}\left(\frac{2}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial z_x^2}\right) dS_y = -\frac{a}{4\pi}\oint_L \chi(y)\rho_y\, dl_y \int_0^{2\pi}\left(\frac{2\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial^3 r}{\partial z_x^2 \partial n_y}\right) d\Theta, \\
\sigma_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{a}{4\pi}\oint_S \chi(y)\frac{d}{dn_y}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho_x}\frac{\partial r}{\partial \rho_x}\right) dS_y = -\frac{a}{4\pi}\oint_L \chi(y)\rho_y\, dl_y \int_0^{2\pi}\left(\frac{2\cos\varphi}{r^2} + \frac{1}{\rho_x}\frac{\partial^2 r}{\partial \rho_x \partial n_y}\right) d\Theta, \\
\sigma_{\rho z} &= -\frac{a}{4\pi}\oint_S \chi(y)\frac{\partial^3 r}{\partial \rho_x \partial z_x \partial n_y} dS_y = -\frac{a}{4\pi}\oint_L \chi(y)\rho_y\, dl_y \int_0^{2\pi}\frac{\partial^3 r}{\partial \rho_x \partial z_x \partial n_y} d\Theta.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Получены выражения температурных добавок напряжений для внутренних точек области V^+:

$$\sigma^T_{\rho\rho}=\frac{a}{4\pi}\oint_L\chi(y)\frac{2}{R}\left(\left(\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}\left\{\frac{2\rho_y}{\rho_x}\left[(\rho_y-\rho_x)n_{\rho y}\right]-(\rho_y+\rho_x)n_{\rho y}\right\}-\right.\right.$$

$$-\frac{Z}{R_1^2}6\rho_y n_{zy}+4\rho_y\frac{Z}{R_1^2}\left[\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}n_{\rho y}+\frac{Z}{R_1^2}n_{zy}+\frac{(\rho_y+\rho_x)n_{\rho y}+Zn_{zy}}{R^2}\right]+$$

$$+\frac{\rho_y}{\rho_x}(\rho_y n_{\rho y}+Zn_{zy})+n_{\rho y}\left(E-\left\{\frac{\rho_y}{\rho_x^2}(\rho_y n_{\rho y}+Zn_{zy})+2n_{\rho y}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{Z^2}{R^2}\left[2\rho_y\left(\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}n_{\rho y}+\frac{Z}{R_1^2}n_{zy}\right)-n_{\rho y}\right]\right\}K\right)dl_y,$$

$$\sigma^T_{zz}(x)=\frac{a}{4\pi}\oint_L\chi(y)\frac{2}{R}\left(\left\{\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}2\rho_y-1+\frac{Z^2}{R_1^2}\left[4\rho_y\left(\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}+\frac{\rho_y+\rho_x}{R^2}\right)-1\right]n_{\rho y}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{Z^2}{R_1^2}2\rho_y n_{zy}\left[1-\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}2(\rho_y-\rho_x)+\frac{2Z^2}{R^2}\right]\right\}E+$$

$$\left.+\left\{\left[1+\frac{Z^2}{R^2}\left(1-\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}2\rho_y\right)\right]n_{\rho y}-2\frac{Z^2}{R_1^2}\frac{\rho_y Z}{R^2}n_{zy}\right\}K\right)dl_y, \qquad (22)$$

$$\sigma^T_{\vartheta\vartheta}(x)=-\frac{a}{4\pi}\oint_L\chi(y)\frac{1}{\rho_x R}\left(\left\{\left[\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}-\frac{\rho_y+\rho_x}{\rho_x}R^2+\frac{\rho_y^2-\rho_x^2}{\rho_x}\right]n_{\rho y}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{Z}{R^2}\left(4\rho_x\rho_y+\frac{\rho_y}{\rho_x}R^2\right)+\frac{\rho_y}{\rho_x}Z\right]\right\}E-2\left[\frac{\rho_y^2-\rho_x^2}{\rho_x}n_{\rho y}+\frac{\rho_y}{\rho_x}Z\right]K\right)dl_y,$$

$$\sigma^T_{\rho z}(x)=-\frac{a}{4\pi}\oint_L\chi(y)\frac{2}{R}\left(\left\{\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}\left[\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}R^2\frac{Z}{\rho_x}n_{\rho y}-2\rho_y n_{zy}\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{Z}{R_1^2}\rho_y\left(\frac{Z}{\rho_x}n_{zy}-2n_{\rho y}\right)+4\rho_y\frac{Z}{R_1^2}\left[\left(\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}-\frac{(\rho_y+\rho_x)}{R^2}\right)n_{zy}+\frac{Z}{R^2}n_{zy}\right]-\frac{\rho_y}{\rho_x}n_{zy}\right\}E-$$

$$\left.-\left\{\frac{(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}\left[(\rho_y-\rho_x)n_{\rho y}+Zn_{zy}\right]2\rho_y\frac{Z}{R^2}+\frac{Z}{R^2}\frac{(\rho_y^2+\rho_x^2)}{\rho_x}n_{\rho y}+\left(\frac{Z^2}{R^2}-1\right)\frac{\rho_y}{\rho_x}n_{zy}\right\}K\right)dl_y.$$

Температурную поверхностную нагрузку можно определить из соотношений:

$$p_{\rho}^{T}(x_s) = -[\sigma_{\rho\rho}^{T}(x_s) n_{\rho x} + \sigma_{\rho z}^{T}(x_s) n_{zx}],$$
$$p_{z}^{T}(x_s) = -[\sigma_{\rho z}^{T}(x_s) n_{\rho x} + \sigma_{zz}^{T}(x_s) n_{zx}]. \tag{23}$$

Таким образом, получаем осесимметричные термоупругие потенциалы для перемещений:

$$u = u^0 + u^T = \frac{1}{8\pi\mu} \int_L \left[\upsilon_{\rho}(y) C_{\rho\rho} + \upsilon_z(y) C_{\rho z} - a\chi(y) C_{\rho}^{T}\right] dl_y, \tag{24}$$
$$w = w^0 + w^T = \frac{1}{8\pi\mu} \int_L \left[\upsilon_{\rho}(y) C_{\rho z} + \upsilon_z(y) C_{zz} - a\chi(y) C_{z}^{T}\right] dl_y,$$

где через C_{ρ}^{T}, C_{z}^{T} обозначены функции ядер в (19).

Термоупругие потенциалы для напряжений примут вид:

$$\sigma_{\rho\rho}(x) = \sigma_{\rho\rho}^{0}(x) + \sigma_{\rho\rho}^{T}(x) = \frac{1}{4\pi(1-\upsilon)} \int_L [\upsilon_{\rho}(y) A_{\rho\rho} + \upsilon_z(y) B_{\rho\rho} - \alpha(1+\upsilon)\chi(y) A_{\rho\rho}^{T}]\, dl_y,$$
$$\sigma_{zz}(x) = \sigma_{zz}^{0}(x) + \sigma_{zz}^{T}(x) = \frac{1}{4\pi(1-\upsilon)} \int_L [\upsilon_{\rho}(y) A_{zz} + \upsilon_z(y) B_{zz} - \alpha(1+\upsilon)\chi(y) A_{zz}^{T}]\, dl_y,$$
$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(x) = \sigma_{\vartheta\vartheta}^{0}(x) + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{T}(x) = \frac{1}{4\pi(1-\upsilon)} \int_L [\upsilon_{\rho}(y) A_{\vartheta\vartheta} + \upsilon_z(y) B_{\vartheta\vartheta} - \alpha(1+\upsilon)\chi(y) A_{\vartheta\vartheta}^{T}]\, dl_y \tag{25}$$
$$\sigma_{\rho z}(x) = \sigma_{\rho z}^{0}(x) + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{T}(x) = \frac{1}{4\pi(1-\upsilon)} \int_L [\upsilon_{\rho}(y) A_{\rho z} + \upsilon_z(y) B_{\rho z} - \alpha(1+\upsilon)\chi(y) A_{\rho z}^{T}]\, dl_y.$$

Здесь $A_{\rho\rho}^{T}$, A_{zz}^{T}, $A_{\vartheta\vartheta}^{T}$, $A_{\rho z}^{T}$ – функции ядер интегралов в (22). Используя формулы скачка для осесимметричных напряжений [4], получим систему сингулярных интегральных уравнений для осесимметричной термоупругой краевой задачи:

$$\upsilon_{\rho}(x_s) + \frac{1}{4\pi(1-\upsilon)} \int_L \left[\upsilon_{\rho}(y)(A_{\rho\rho} n_{\rho x} + A_{\rho z} n_{zx}) + \upsilon_z(y)(B_{\rho\rho} n_{\rho x} + B_{\rho z} n_{\rho x})\right] dl_y = \tag{26}$$
$$= p_{\rho}(x_s) + p_{\rho}^{T}(x_s)$$

Численное решение осесимметричной термоупругой задачи включает две основные части:

1) решение интегрального уравнения краевой задачи теплопроводности (16), вычисление температурных добавок перемещений (19), (22) и фиктивной поверхностной температурной нагрузки (23);

2) решение (26) и вычисление осесимметричных термоупругих перемещений (24) и напряжений (25).

Разработан алгоритм численного решения полученных интегральных уравнений. Некоторые особенности предложенного алгоритма описаны в докладах [6, 7].

Заключение. С помощью метода потенциала получены граничные интегральные уравнения несвязанных осесимметричных краевых задач теплопроводности и термоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Уэрмер, Дж.** Теория потенциала / Дж. Уэрмер, пер. с англ. В. В. Вавилова. – М. : Мир, 1980. – 418 с.

2 **Коваленко, А. Д.** Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 239 с.

3 **Хвисевич, В. М.** Интегральные уравнения осесимметричной краевой задачи стационарной термоупругости / В. М. Хвисевич, Ю. Д.Копейкин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – Вып. 6. – С.43–48.

4 **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматлит,1963. – 1108 с.

5 **Гюнтер, Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : Гостехиздат, 1953. – 415 с.

6 **Веремейчик, А. И.** К исследованию напряженно-деформированного состояния осесимметричных тел, свойства которых зависят от температуры, методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Междунар. научн. конф., г. Тула, 17–21 ноября 2008 г. / Тульский гос. ун-т. – Тула, 2008. – С. 308–310.

7 **Веремейчик, А. И.** Решение осесимметричной задачи термоупругости для однородных изотропных тел методом бигармонических потенциалов / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Прикладные задачи математики и механики: материалы XVI Междунар. научно-техн. конф., Севастополь, 15–19 сентября 2008 г. / СевНТУ. – Севастополь, 2008. – С. 36–38.

V. M. KHVISEVICH, A. I. VEREMEYCHIK
Brest State Technical University, Brest, Belarus

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR THERMAL AND THERMOELASTIC PROBLEMS IN CYLINDRICAL COORDINATES

There is supposed an algorithm for the thermoelasticity boundary problem solution based on the potential method. The main aspects of the heat conduction integral equation output were considered. Also the paper presents the construction termoelastopotentials, deduced integral equations for thermoelastic axisymmetric stresses and displacements definition.

Получено 16.12.2015