

УДК 539.215.9

Ю. П. СМЕРНОВ, В. К. ТАРАСОВ

Тульский государственный университет, Тула, Россия

**ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСИЕ ТОЧКИ НА ВНУТРЕННЕЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОНУСА**

Разработана механико-математическая модель движения частицы сыпучего материала по поверхности вращающегося вокруг вертикальной оси конуса. Проведен анализ условий относительного покоя рассматриваемой частицы в зависимости от угла наклона образующей конуса.

Транспортировка сыпучих грузов осуществляется как железнодорожным и автомобильным транспортом, так и по трубопроводам [1]. Существуют исследования, связанные с изучением статики сыпучих грузов и их динамики при перемещении в поступательно перемещающихся резервуарах и неподвижных трубопроводах [2–4]. В то же время движение и равновесие сыпучих грузов во вращающихся сосудах до настоящего времени не изучено. Целью представленной работы является разработка механико-математической модели движения частицы сыпучего груза во вращающемся сосуде и анализ условий ее относительного равновесия.

Примем частицу сыпучего груза за материальную точку  $M$  массы  $m$ , которая может двигаться или находиться в состоянии относительного покоя на внутренней шероховатой поверхности кругового конуса, вращающегося с заданной постоянной скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью конуса (рисунок 1).

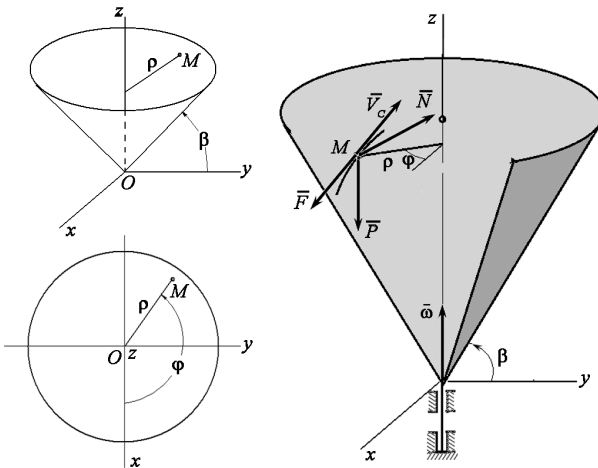


Рисунок 1 – Расчетная схема движения точки по подвижному конусу

Уравнения движения точки в цилиндрических координатах  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  [5]

$$m(\ddot{\rho} - \rho(\dot{\varphi} + \omega)^2) = -N \left( \sin\beta + f \cos\beta \frac{\dot{\rho}/\cos\beta}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho}/\cos\beta)^2}} \right), \quad (1)$$

$$m \frac{d}{dt} (\rho^2 (\dot{\varphi} + \omega)) = -f N \rho \frac{\rho \dot{\varphi}}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho}/\cos\beta)^2}}, \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -mg + N \left( \cos\beta - f \sin\beta \frac{\dot{\rho}/\cos\beta}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho}/\cos\beta)^2}} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – расстояние точки от оси конуса;  $\varphi$  – угол относительного поворота радиус-вектора точки вокруг оси конуса;  $N$  – нормальная реакция конической поверхности;  $\beta$  – угол наклона образующей конуса относительно плоскости, перпендикулярной оси конуса;  $f$  – коэффициент трения скольжения материальной точки по конусу;  $g$  – ускорение свободного падения; точки над переменными обозначают дифференцирование по времени.

В уравнениях движения (1–3) использованы выражения модуля скорости скольжения точки по поверхности конуса (относительной скорости)

$$V_c = \sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 / \cos^2 \beta}$$

и направляющие косинусы силы трения относительно конуса

$$\cos\alpha_\rho = \frac{\dot{\rho}/\cos\beta}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 / \cos^2 \beta}}, \quad \cos\alpha_\varphi = \frac{\rho \dot{\varphi}}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 / \cos^2 \beta}}$$

(в осях, жестко связанных с конусом).

Подставим вертикальную составляющую ускорения точки

$$\ddot{z} = \ddot{\rho} \cdot \text{tg}\beta$$

в уравнение (3)

$$m\ddot{\rho} \cdot \text{tg}\beta = -mg + N \left( \cos\beta - f \sin\beta \frac{\dot{\rho}/\cos\beta}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 / \cos^2 \beta}} \right). \quad (4)$$

Обозначим выражения в скобках в правых частях уравнений (1) и (4) следующим образом

$$Q_1 = \left( \sin\beta + f \cos\beta \frac{\dot{\rho}/\cos\beta}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho}/\cos\beta)^2}} \right), \quad Q_2 = \left( \cos\beta - f \sin\beta \frac{\dot{\rho}/\cos\beta}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho}/\cos\beta)^2}} \right).$$

Из уравнений (1)–(4) найдем обобщенное ускорение  $\ddot{\rho}$

$$\ddot{\rho} \left( 1 + \operatorname{tg} \beta \frac{Q_1}{Q_2} \right) = \rho (\dot{\varphi} + \omega)^2 - g \frac{Q_1}{Q_2}, \quad (5)$$

нормальную реакцию  $N$

$$N = m \frac{g + \rho (\dot{\varphi} + \omega)^2 \operatorname{tg} \beta}{Q_2 + Q_1 \operatorname{tg} \beta} \quad (6)$$

и относительное угловое ускорение  $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{f}{\rho} \cdot \frac{g + \rho (\dot{\varphi} + \omega)^2 \operatorname{tg} \beta}{Q_2 + Q_1 \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\rho \dot{\varphi}}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho} / \cos \beta)^2}} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho} (\dot{\varphi} + \omega).$$

Подставив  $Q_1$  и  $Q_2$  в знаменатель выражения (6), после выполнения несложных выкладок получим нормальную реакцию в виде

$$N = m (g \cos \beta + \rho (\dot{\varphi} + \omega)^2 \sin \beta),$$

не содержащем коэффициента трения  $f$ . Это означает, что сила  $N$  напрямую не зависит от коэффициента трения. И далее

$$\ddot{\varphi} = -\frac{f}{\rho} \cdot \frac{(g \cos \beta + \rho (\dot{\varphi} + \omega)^2 \sin \beta) \dot{\varphi}}{\sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{\rho} / \cos \beta)^2}} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho} (\dot{\varphi} + \omega).$$

Теперь рассмотрим условия относительного покоя точки и выполним их анализ. Условия предельного относительного равновесия точки на конусе получаются из уравнения движения (5), если положить  $\ddot{\rho} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ :

$$\rho \omega^2 = g \frac{\sin \beta + f \cos \beta \frac{\dot{\rho} / \cos \beta}{\sqrt{(\dot{\rho} / \cos \beta)^2}}}{\cos \beta - f \sin \beta \frac{\dot{\rho} / \cos \beta}{\sqrt{(\dot{\rho} / \cos \beta)^2}}}. \quad (7)$$

Отношение

$$\frac{\dot{\rho} / \cos \beta}{\sqrt{(\dot{\rho} / \cos \beta)^2}} = \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{\dot{\rho}^2}} = \operatorname{sign}(\dot{\rho})$$

есть знак скорости изменения полярного радиуса. В состоянии равновесия  $\dot{\rho} = 0$ , однако, если  $\rho \omega^2 > g \cdot \operatorname{tg} \beta$ , то имеет место тенденция к росту  $\rho$ , и можно считать, что  $\operatorname{sign}(\dot{\rho}) = 1$ . И наоборот  $\rho \omega^2 < g \cdot \operatorname{tg} \beta$  свидетельствует о тенденции к уменьшению  $\rho$  и поэтому  $\operatorname{sign}(\dot{\rho}) = -1$ .

С учетом последних соображений из (7) следуют неравенства

$$\rho\omega^2 \geq g \frac{\sin\beta - f \cos\beta}{\cos\beta + f \sin\beta} \quad \text{и} \quad \rho\omega^2 \leq g \frac{\sin\beta + f \cos\beta}{\cos\beta - f \sin\beta},$$

устанавливающие границы интервала для центробежной силы инерции  $m\rho\omega^2$ , обеспечивающей равновесное положение точки на поверхности вращающегося конуса. Оба неравенства могут быть объединены в одно

$$g \frac{\operatorname{tg}\beta - f}{1 + f \cdot \operatorname{tg}\beta} \leq \rho\omega^2 \leq g \frac{\operatorname{tg}\beta + f}{1 - f \cdot \operatorname{tg}\beta}. \quad (8)$$

Полученное соотношение можно записать иначе, введя в рассмотрение угол трения  $\beta_f$

$$\beta_f = \operatorname{arctg}(f), \quad \text{или} \quad f = \operatorname{tg}\beta_f.$$

Теперь интервал равновесия приобретает вид

$$g \operatorname{tg}(\beta - \beta_f) \leq \rho\omega^2 \leq g \operatorname{tg}(\beta + \beta_f).$$

В этом интервале может иметь место относительное равновесие точки на конусе. Если в какой-то момент времени скорость скольжения точки делается равной нулю (т. е.  $\dot{\rho}=0$  и  $\dot{\phi}=0$ ) и если величина  $\rho\omega^2$  окажется слева от интервала (8), то с течением времени точка сползёт к вершине конуса и там останется. Если же центробежная сила  $m\rho\omega^2$  окажется справа от интервала (8), то точка станет удаляться от оси конуса со все возрастающей скоростью. При отсутствии трения интервал равновесия стягивается в точку  $\rho\omega^2 = g \operatorname{tg}\beta$ , и равновесие оказывается неустойчивым. С увеличением коэффициента трения угол трения увеличивается, и интервал равновесия растет.

Такой результат может быть проиллюстрирован рисунком 2. На нем представлены четыре графика, иллюстрирующие разбиение пространства параметров системы  $\rho\omega^2 \leftrightarrow \beta$  на три области в зависимости от величины коэффициента трения. Область 1 – это место, соответствующее большим значениям переносной силы инерции, которая после начала движения все дальше и дальше уносит точку от оси конуса. Область 2 соответствует значениям силы инерции, при которых может иметь место относительный покой. Положение области 3 определяется малыми значениями силы инерции, при которых точка начнет сползать к вершине конуса, если в некоторый момент времени скорость ее скольжения окажется равной нулю. Из сравнения графиков видно, что область 2 с увеличением коэффициента трения расширяется, а области 1 и 3 сужаются.

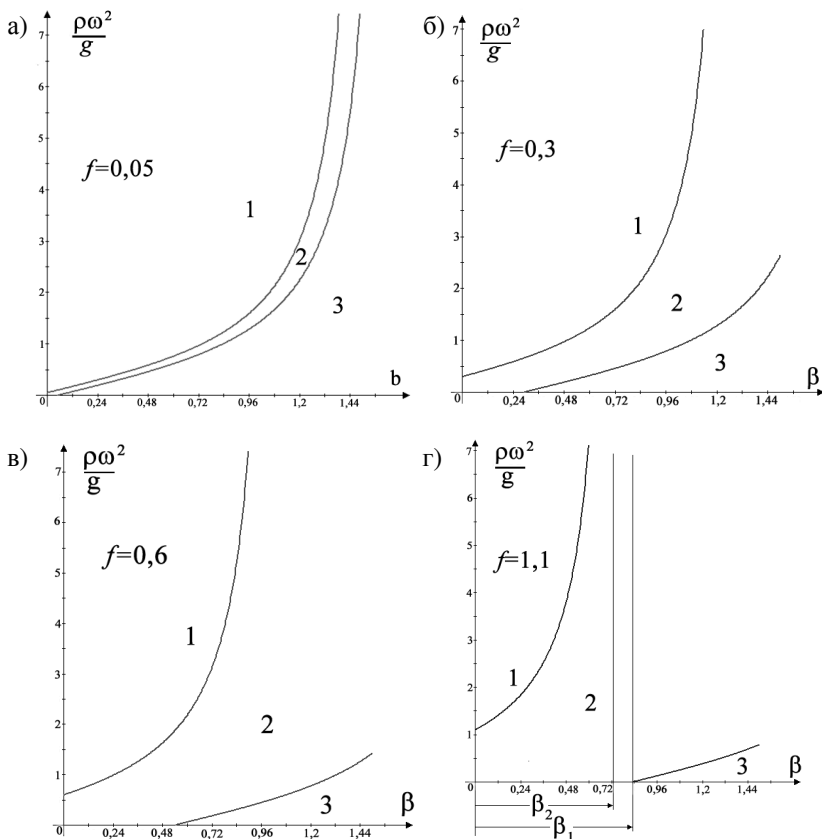


Рисунок 2 – Области, характеризующие относительное движение и покой материальной точки при разных значениях угла  $\beta$  для разных коэффициентов трения  $f$

Каждому значению коэффициента трения  $f$  соответствуют два характерных угла  $\beta$ :

$$\beta_1 = \arctg(f) \quad \text{и} \quad \beta_2 = \arctg\left(\frac{1}{f}\right).$$

Эти выражения получаются из условия (8), если левую границу для силы инерции положить равной нулю, а правую – бесконечности. Угол  $\beta_1$  равен углу трения  $\beta_f$ , а угол  $\beta_2$  – это дополнительный угол трения (для силы инерции). Названные углы связаны зависимостью

$$\arctg(f) + \arctg\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

При  $f < 1$  имеет место случай  $\beta_1 < \beta_2$ , если же  $f \geq 1$ , то  $\beta_1 \geq \beta_2$ .

В случае  $f < 1$  при фиксированном  $\beta$  увеличение силы инерции позволяет перевести на графиках рисунка 2 изображающую точку из области 3 в область 2 или 1, либо из области 2 в 1 (рисунки 2, *a–e*). Если же  $f \geq 1$ , то в интервале от  $\beta_2 = 0,833$  до  $\beta_1 = 0,7378$  изображающая точка будет находиться в области 2 (рисунок 2, *z*) при любых значениях силы инерции.

При  $\beta + \beta_f \geq \pi/2$  никакое увеличение силы инерции не может привести к перемещению точки по конусу вверх из состояния относительного покоя. Если же  $\beta - \beta_f \leq 0$ , то точка не может скользить вниз, даже если конус неподвижен. Оба эти случая имеют место, если  $f \geq 1$ .

Таким образом, на основе построенной механико-математической модели движения материальной точки по шероховатому вращающемуся конусу установлено влияние угловой скорости вращения конуса и угла наклона его образующей на характер относительного движения рассматриваемой точки. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании устройств, предназначенных для транспортировки сыпучих материалов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Чальцев, М. Н. Пути совершенствования пневмотранспортных систем / М. Н. Чальцев // Научно-технические аспекты комплексного развития транспортной отрасли: материалы междунар. науч.-практ. конф. – Донецк : ДонИЖТ, 2015. – С. 161–165.

2 Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 121 с.

3 Сенько, В. И. Оценка воздействия перевозимых сыпучих грузов на кузова вагонов / В. И. Сенько, А. В. Путьято // Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта им. Акад. В. А. Лазаряна. – 2009. – Вып. 30. – С. 214–222.

4 Shimanovsky, A. Modeling of vehicle dynamics considering load relative movement / A. Shimanovsky, A. Putsiata, O. Kolomnikova // Acta Mechanica Slovaca. – 2008. – № 3-B. – P. 691–703.

5 Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики. Т. 1. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : ГИТТЛ. – 1955. – 380 с.

*YU. P. SMIRNOV, V. K. TARASOV*  
*Tula State University, Tula, Russia*

#### MOVEMENT AND EQUILIBRIUM OF POINT ON THE INSIDE ROUGH SURFACE OF THE ROTATING CONE

There was developed the mechanical-mathematical model of particulate material particle motion on the surface of the cone rotating around a vertical axis. The analysis of particle relative rest conditions depending on the angle of the cone was carried out.

Получено 14.04.2015