

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗОК

Рассмотрены осесимметричные поперечные колебания круглой упругой трехслойной пластинки, скрепленной с упругим основанием, под действием импульсных поверхностных нагрузок. Реакция основания описывается моделью Винклера. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Аналитические решения получены с использованием функции Хевисайда и дельта функции Дирака. Проведен численный анализ полученных решений.

Рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластинки круглой формы, возбужденные импульсными поверхностными и погонными (силовыми) нагрузками.

**Постановка задачи** и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Для тонких внешних несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого (не работающего в тангенциальном направлении) заполнителя справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ . На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$ , то есть  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Через  $h_k$  и  $\rho_k$  обозначены толщина и плотность материала  $k$ -го слоя.

Связь между реакцией основания и прогибом пластины принимается в соответствии с моделью Винклера (Winkler E.), согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w,$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент жесткости упругого основания.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластинки без учета обжата и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) = 0; \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) = 0;$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - \kappa_0 w - M_0 \ddot{w} = -q, \quad (1)$$

где  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2$ ; коэффициенты  $a_i$  выражаются через геометрические и физические характеристики материалов слоев [1]; дифференци-

альные операторы  $L_2, L_3$  определяются соотношениями

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r}(rg) \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Задача определения функций  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки следует из (1) при  $q = 0$ . Ее решение рассмотрено в [2]. В результате построена система собственных ортонормированных функций  $v(\lambda_n, r)$ , которая для сплошных пластин имеет вид

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right], \quad (3)$$

Здесь  $J_0, I_0$  – функции Бесселя нулевого порядка [3],  $\lambda_n$  – собственные числа. Коэффициенты  $d_n$  определяются из требования нормировки системы (3):

$$d_n^2 = \int_0^{r_1} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]^2 r dr = \frac{r_1^2}{2} \left[ J_0^2(\lambda_n r_1) + J_1^2(\lambda_n r_1) \right] -$$

$$- \frac{r_1 J_0(\lambda_n r_1)}{\lambda_n I_0(\lambda_n r_1)} \left[ J_1(\lambda_n r_1) I_0(\lambda_n r_1) + J_0(\lambda_n r_1) I_1(\lambda_n r_1) \right] +$$

$$+ \frac{r_1^2 J_0^2(\lambda_n r_1)}{2 I_0^2(\lambda_n r_1)} \left[ I_0^2(\lambda_n r_1) - I_1^2(\lambda_n r_1) \right].$$

В результате для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластинки внешняя нагрузка  $q(r, t)$  и искомое решение  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  представляются в виде следующих разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t);$$

$$\psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad (4)$$

где

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[ J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)) \right];$$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr; \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел  $\lambda_n$  следуют из граничных условий. При заделке контура пластины должны выпол-

няться требования  $u = \psi = w = w_{,r} = 0$ . Удовлетворяя два последние из них с помощью представления (4), получим трансцендентное уравнение

$$I_1(\lambda r_1)J_0(\lambda r_1) + J_1(\lambda r_1)I_0(\lambda r_1) = 0. \quad (5)$$

После вычисления собственных чисел  $\lambda_n$  частоты колебаний  $\omega_n$  следуют из соотношения:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4, \quad (6)$$

где  $D, \kappa$  определены как в [2].

Численное исследование уравнения (5), позволило получить первые 15 корней, которые вычислены с точностью до 0,001 и сведены в таблицу 1.

Таблица 1– Собственные числа для защемленной по контуру пластины

Номер $n$	Собственное число $\lambda_n r_1$	Номер $n$	Собственное число $\lambda_n r_1$	Номер $n$	Собственное число $\lambda_n r_1$
0	3,196	5	18,857	10	34,561
1	6,306	6	21,997	11	37,702
2	9,439	7	25,138	12	40,844
3	12,577	8	28,279	13	43,985
4	15,716	9	31,420	14	47,126

Уравнение для определения неизвестной функции времени  $T_n(t)$  следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (4) и использования связи функций  $v_n, \varphi_n$ :

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Коэффициенты  $A_n, B_n$  определяются из начальных условий движения (2)

$$A_n = \int_0^{\eta} f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{\eta} g(r) v_n r dr, \quad (9)$$

так как интеграл в (8) при  $t = 0$  обращается в нуль.

**Частные случаи.** Рассмотрим несколько примеров локального импульсного силового воздействия на пластину. Для удобства аналитической записи нагрузки воспользуемся классом функций Хевисайда  $H_n(x)$ , в котором каждая последующая функция является интегралом от предыдущей:

$$H_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Функция  $H_{-1}(t)$  совпадает с функцией Дирака  $\delta(t)$ , интеграл от которой формально можно рассматривать как ступенчатую функцию Хевисайда  $H_0(t)$  нулевого порядка. Она только в нуле равна единице, оставаясь нулевой на остальной числовой оси, причем справедливо интегральное соотношение [4]

$$\int_a^b f(\tau)\delta(\tau-x)d\tau = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases} \quad (11)$$

Задача, как правило, сводится к отысканию параметров  $q_n(t)$  разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени  $T_n(t)$ .

Численный расчет проводился для защемленной по контуру пластины, слою которой набраны из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [1]. Собственные частоты колебаний  $\omega_n$  вычислялись по формуле (6) с использованием собственных чисел из приведенной таблицы и геометрических параметров слоев  $h_1 = h_2 = 0,01$ ,  $c = 0,05$ . Начальные условия (2) предполагались однородными  $w(r, 0) \equiv \dot{w}(r, 0) \equiv 0$ , что, в соответствии с (9), позволяет получить нулевые константы интегрирования  $A_n = 0$ ,  $B_n = 0$ .

1. Пусть поверхностная распределенная нагрузка воздействует мгновенно (импульсно) на внешнюю часть поверхности пластины, ограниченную окружностью радиуса  $b \leq r_1$ . Аналитическое выражение для нагрузки можно записать, используя дельта-функцию Дирака (11) и функцию Хевисайда (10) нулевого порядка в виде

$$q(r, t) = q_1 \delta(t) H_0(b - r). \quad (12)$$

Параметры  $q_n(t)$  разложения нагрузки (12) в ряд по собственным функциям (3) будут

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t) b}{M_0 d_n \lambda_n} \left( J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right),$$

Подставляя их в (8) и используя свойство функции Дирака, получим

$$T_n(t) = \frac{q_1 b \sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n} \left( J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right). \quad (13)$$

На рисунке 1 показано изменение во времени динамического прогиба в центре круговой трехслойной пластины:  $a$  – при отсутствии упругого основания и  $b$  – при его наличии ( $\kappa_0 = 10^8$  Па/м). Внешняя нагрузка распределена по кругу радиуса  $b = 0,5$ . Кривая 1 рассчитывалась при воздействии импульса интенсивности  $q_1 = 700$  Па·с, 2 – соответствует распределенной внезапно приложенной нагрузке с постоянной интенсивностью  $q_0 = 7 \cdot 10^3$  Па и  $q_0 = 7 \cdot 10^4$  Па (при наличии основания). Здесь максимальный прогиб от импульса больше примерно в 3,5–4,5 раза. Наличие основания приводит к знакопеременному циклическому изменению амплитуды прогиба при импульсном воздействии. В случае распределенной нагрузки прогиб не меняет знак.

Предельная продолжительность импульса при отсутствии основания  $t_1 \leq \pi/(2\omega_0) = 0,016$  с. Достичь величины  $q_1$  за это время можно нагрузкой  $q_0' = q_1/t_1 = 43,7$  кПа, которая в 6,25 раза больше  $q_0$ . Максимальный прогиб от такой нагрузки будет во столько же раз больше прогиба от  $q_0$ .

Следовательно, поверхностная динамическая нагрузка, внезапно приложенная, вызывает в пластине перемещения в 1,3 раза большие, чем при ее импульсном воздействии. Подобный эффект наблюдается и при наличии основания.

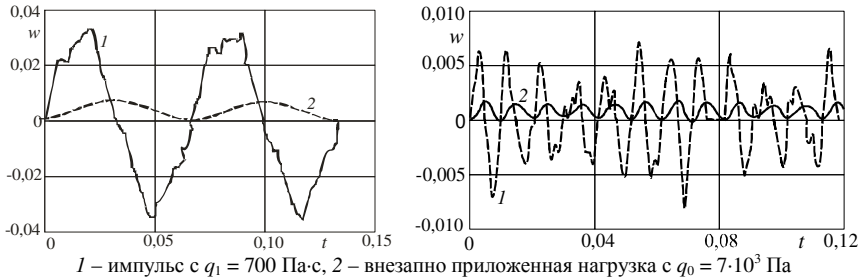


Рисунок 1 – Изменение во времени прогиба в центре пластины: а – при отсутствии основания; б – при жесткости основания  $\kappa_0 = 10^8$  Па/м

2. Пусть мгновенный равномерно распределенный импульс поверхностной нагрузки воздействует на кольцевую поверхность пластинки, определяемую относительным радиусом  $a \leq r \leq b$ . Соответствующую интенсивность нагрузки можно записать в виде разности двух нагрузок (12):

$$q(r, t) = q_1 \delta(t) (H_0(b-r) - H_0(r-a)) .$$

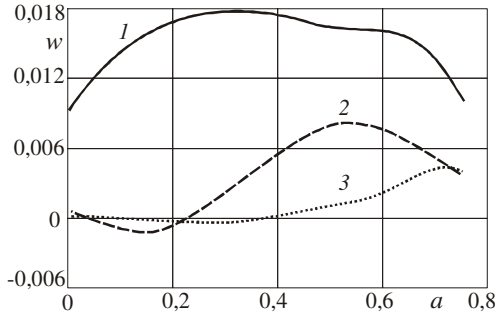
Отсюда

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t)}{M_0 d_n \lambda_n} \left( b J_1(\lambda_n b) - a J_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (b I_1(\lambda_n b) - a I_1(\lambda_n a)) \right);$$

$$T_n(t) = \frac{q_1 \sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n} \left( b J_1(\lambda_n b) - a J_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (b I_1(\lambda_n b) - a I_1(\lambda_n a)) \right). \quad (14)$$

В частном случае при  $a = 0$  из (14) следует решение (13).

На рисунке 2 показано ( $t = \pi/(2\omega_0)$ ) изменение величины прогиба пластины, в зависимости от расположения внутреннего радиуса кольцевого пятна импульсной нагрузки: 1 – не связанной с упругим основанием, 2 – при основании средней жесткости  $\kappa_0 = 10^8$  Па/м, в момент времени  $t = 0,0325$  с; 3 –  $\kappa_0 = 10^9$  Па/м,  $t = 0,0275$  с. Ширина пятна нагрузки принята  $d = b - a = 0,25$ , ее интенсивность  $q_1 = 700$  Па·с. Здесь также наличие упругого основания уменьшает величину прогиба.



$1 - \kappa_0 = 0, 2 - \kappa_0 = 10^8 \text{ Па/м}, t = 0,0325 \text{ с}; 3 - \kappa_0 = 10^9 \text{ Па/м}, t = 0,0275 \text{ с}$   
 Рисунок 2 – Зависимость прогиба в центре пластины от величины радиуса кольцевой пятна нагрузки

3. Пусть теперь на пластину воздействует мгновенный импульс погонной силы  $Q_0$ , приложенной вдоль окружности  $r = a$ . Для исследования применим решение, полученное для мгновенного импульса распределенной по кольцу  $(a - c) \leq r \leq (a + c)$  поверхностной нагрузки  $q_1$ . Введем в (14) замену  $q_1 = Q_0 / 2c$  и устремим  $c$  к нулю. Вычислив предел, получим

$$T_n(t) = \frac{Q_1 a \sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \omega_n} \left( J_0(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n a) \right). \quad (15)$$

Функция (15) не описывает случай импульсного воздействия сосредоточенной силы в центре пластинки. При  $a = 0$  решение вырождается. Чтобы этого избежать примем постоянство равнодействующей погонной силы  $Q = 2\pi a Q_0$ . Интенсивность  $Q_0$  будет при этом переменной, компенсируя изменения  $a$ . Тогда из (15), с помощью замены  $Q_0 = Q / (2\pi a)$ , получаем

$$T_n(t) = \frac{Q \sin(\omega_n t)}{2\pi M_0 d_n \omega_n} \left( J_0(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n a) \right). \quad (16)$$

Теперь при  $a = 0$  отсюда следует функция, описывающая изменения решения во времени при сосредоточенной импульсной силе, приложенной в центре пластины:

$$T_n(t) = \frac{Q \sin(\omega_n t)}{2\pi M_0 d_n \omega_n} \left( 1 - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \right). \quad (17)$$

На рисунке 3 показано изменение во времени прогиба в центре круговой трехслойной пластины:  $1 - \kappa_0 = 0, 2 - \kappa_0 = 10^8 \text{ Па/м}$ , при различных условиях нагружения погонным импульсом силы, равнодействующая которого постоянна по величине и равна  $Q = 700 \text{ Н}\cdot\text{с}$ . Наличие основания приводит к уменьшению амплитуды колебаний и увеличению частоты. Расчеты проводились с использованием формул (16), (17).

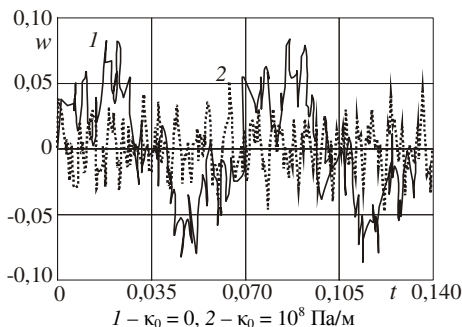


Рисунок 3 – Изменение во времени прогиба в центре круговой трехслойной пластины при действии импульсной силы

**Выводы.** Таким образом, в данной работе рассмотрена методика исследования вынужденных колебаний трехслойных круговых пластин, находящихся под воздействием импульсных поверхностных и погонных осесимметричных локальных нагрузок. Получены аналитические и численные решения ряда начально-краевых задач для пластин с легким заполнителем. Отдельно исследован случай приложения сосредоточенной силы в центре пластины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.

2 Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием распределенных локальных нагрузок / Д. В. Леоненко // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – 2 (19). – С. 14–19.

3 Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – Т. 2. – 295 с.

4 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

*D. V. LEONENKO*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

#### **OSCILLATIONS OF THE CIRCULAR THREE-PLY PLATES ON A DEFORMED FOUNDATION UNDER THE ACTION OF PULSED LOADS**

There are considered the axisymmetrical transversal oscillations of the round elastic sandwich plate, linked with elastic foundation, under the action of impulsive superficial loadings. Reaction of foundation was described by the Winkler's model. For the kinematics description of the asymmetrical by thickness package there were accepted the broken normal hypotheses. Filler is light. The analytical solutions were obtained by Heavyside functions and Dirac delta-function usage. There is demonstrated the numerical analysis of the received solutions.

Получено 12.02.2016