

УДК 531/532+581.14

В. А. БАЛАБАНОВ, Н. Н. КИЗИЛОВА

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина*

## **НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ ЗАДАННУЮ ОБЛАСТЬ**

В работе предложен новый алгоритм построения разветвленных трубопроводов, обеспечивающих доставку жидкости от источника к распределенной системе потребителей. Геометрия трубопровода описывается в виде бинарного дерева, параметры которого – диаметры и углы ветвления в бифуркациях – соответствуют геометрии транспортных систем природы – системам кровеносных сосудов, дыхательных путей и других проводящих систем. Разработан алгоритм, позволяющий однозначно определять координаты узлов дерева, используя лишь зависимости между диаметрами и углами ветвления в бифуркациях. Показано, что в ходе реализации алгоритма генерируются системы, характеризующиеся корректными зависимостями длина – диаметр. Построенные структуры могут использоваться для моделирования ветвящихся систем, исследования их проводимости по отношению к стационарному, волновому или турбулентному течению жидкости, а также механической прочности.

**1 Принципы построения проводящих систем в природе.** Закономерности строения проводящих систем, которые обеспечивают доставку жидкости или газов к распределенной системе потребителей – клеткам внутренних органов и тканей – неоднократно изучались на препаратах, слепках, рентгеновских снимках и компьютерных томограммах [1–3]. Результаты исследований свидетельствуют о том, что при всем разнообразии их строения существует определенная зависимость между диаметрами  $d_j$  последовательно расположенных проводящих элементов (сосудов) в соединениях (бифуркациях), которая описывается законом Мюррея

$$(d_j)^\gamma = (d_{2j-1})^\gamma + (d_{2j})^\gamma, \quad (1)$$

где  $d_j$  – диаметр материнского элемента;  $d_{2j-1}$  и  $d_{2j}$  – диаметры двух дочерних элементов (рисунок 1, а).

При  $\gamma = 3$  соотношение (1) описывает бифуркацию оптимальных трубок, которые обеспечивают стационарный поток жидкости (газа) с минимальными затратами энергии как на движение, так и на поддержание активного состояния самого трубопровода и насыщение переносимой жидкости питательными веществами (так называемые метаболические расходы) [4]. Результаты измерений показали, что в кровеносных системах человека и животных, а также в проводящих системах растений  $\gamma \approx 3$  с довольно высокой степенью точности. Так,  $\gamma = 2,55 \dots 3,02$  для артерий,  $\gamma = 2,76 \dots 3,02$  для вен,  $\gamma = 2,61 \dots 2,91$  для дыхательных путей [2].

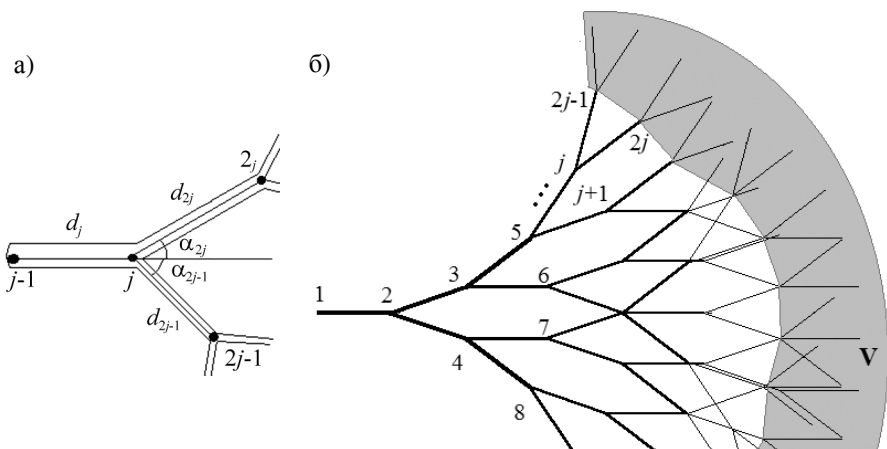


Рисунок 1 – Схема строения бифуркации проводящих элементов (а) и схема нумерации элементов бинарного дерева (б)

Пусть для определенности  $d_{2j-1} = \min\{d_{2j-1}, d_{2j}\}$ . Если ввести коэффициент асимметрии бифуркации  $\zeta = \frac{d_{2j-1}}{d_{2j}}$ , то (1) можно записать в виде зависимости диаметров дочерних элементов от диаметра материнского в виде

$$d_{2j-1} = \frac{d_j \zeta}{(1 + \zeta^\gamma)^{1/\gamma}}, \quad d_{2j} = \frac{d_j}{(1 + \zeta^\gamma)^{1/\gamma}}, \quad (2)$$

Углы ветвления в бифуркациях также зависят от диаметров проводящих элементов [4]. Эти зависимости соответствуют модели оптимального ветвления, предложенной Дж. Лайтхиллом

$$\cos \alpha_{2j-1} = \frac{d_j^4 + d_{2j-1}^4 - d_{2j}^4}{2d_j^2 d_{2j-1}^2}, \quad \cos \alpha_{2j} = \frac{d_j^4 - d_{2j-1}^4 + d_{2j}^4}{2d_{2j-1}^2 d_{2j}^2}. \quad (3)$$

Для длин  $L_j$  проводящих элементов предложены аппроксимации статистических данных в виде

$$L_j = ad_j^b, \quad (4)$$

где  $a, b = \text{const}$ , причем в соответствии с результатами измерений  $a = 2,6 \dots 10,2 \text{ м}^{1-b}$ ,  $b = 0,97 \dots 1,06$  [2].

Таким образом, разброс длин проводящих элементов достаточно высок, в то время как диаметры и углы ветвления в бифуркациях соответствуют соотношениям (2), (3) с малыми для биологических данных отклонениями.

## 2 Проводящие системы как заполняющие объем бинарные деревья.

Кроме этого, проводящие системы животных и растений заполняют объем соответствующей ткани или органа равномерно, плотно и без самопересечений. В математике такие структуры описываются в терминах деревьев, заполняющих пространство (space-filling trees) и для практических задач, например, визуализации таких систем, расчетов их интегральных характеристик, таких как сопротивление, распределение давлений и скоростей жидкости, необходимо разработать механизмы генерации таких деревьев. Поскольку соотношения (2)–(4) выполняются для всех порядков ветвления, то такие деревья представляют собой фрактальные структуры (рисунок 1, б). В работе [5] был предложен алгоритм визуализации этих структур, связанный с построением бифуркаций  $\{j-1, j, 2j-1, 2j\}$ , начиная от корня дерева, т.е. бифуркации  $\{1, 2, 3, 4\}$ . В соответствии с данными измерений бифуркации считались лежащими в одной плоскости, но плоскости, в которых расположены последовательные бифуркации, пересекаются под некоторым углом. За счет выбора алгоритма поворота плоскостей смежных бифуркаций можно строить деревья без самопересечений. В соответствии с традициями САД-моделирования такой подход можно назвать «from-top-to-bottom». Также представляет интерес и обратный подход, «from-bottom-to-top», когда генерируется бинарное дерево проводящих элементов, обеспечивающее равномерную доставку жидкости или газа с минимальными затратами энергии к некоторой области пространства ( $V$  на рисунке 1, б), заполненной мельчайшими проводящими элементами (капиллярами) и клетками ткани.

В этом случае диаметры мельчайших элементов  $d_0$  известны и составляют, например,  $d_0 = 5$  мкм в тканях животных. При заданной асимметрии ветвлений  $\zeta$  можно вычислить диаметры более крупных дочерних элементов в бифуркациях  $d_{2j} = d_0 / \zeta$ , а из (2) можно определить диаметр материнского элемента  $d_j = d_0 \frac{(1+\zeta^\gamma)^{1/\gamma}}{\zeta}$ . Длины всех трех элементов можно определить

из (4) и тогда при известных координатах узлов  $2j-1$  и  $2j$  координаты узла  $j$  будут определены однозначно, но при этом выполнение условий (3) не гарантировано. Так, теорема косинусов для треугольника  $(j, 2j-1, 2j)$  (рисунок 2) дает

$$\cos(\alpha_{2j-1} + \alpha_{2j}) = \frac{L_{2j-1}^2 + L_{2j}^2 - I_j^2}{2L_{2j-1}L_{2j}} = \frac{a^2(d_{2j-1}^{2b} + d_{2j}^{2b}) - I_{2j-1,2j}^2}{a^2 d_{2j-1}^b d_{2j}^b}, \quad (5)$$

где  $I_{2j-1,2j}$  – расстояние между узлами  $2j-1$  и  $2j$ , в то время как из (3) имеем

$$\cos(\alpha_{2j-1} + \alpha_{2j}) = \frac{d_j^4 - d_{2j-1}^4 - d_{2j}^4}{2d_{2j-1}^2 d_{2j}^2}, \quad (6)$$

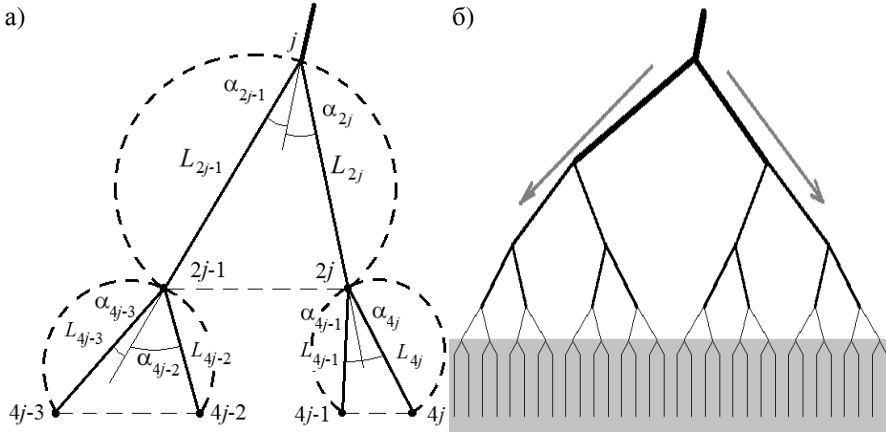


Рисунок 2 – Схема строения дерева из трех последовательных бифуркаций (а) и результат работы алгоритма (б)

Таким образом, из (5), (6) следует, что коэффициенты  $a$ ,  $b$  в (4) должны зависеть от асимметрии бифуркаций  $\zeta$  и расстояния  $l_0$  между мельчайшими элементами, которое определяется плотностью капилляров в ткани. Поскольку углы  $\alpha_{2j-1}$ ,  $\alpha_{2j}$  определяются продолжением оси материнского элемента, рассмотрим систему из трех последовательных бифуркаций (рисунок 2, а), зная координаты узлов  $4j-3$ ,  $4j-2$ ,  $4j-1$  и  $4j$ , вычислим длины  $L_{4j-3,4j-2,4j-1,4j}$  и определим координаты узлов  $2j-1$  и  $2j$ . Затем, вычислив  $L_{2j-1,2j}$ , определим координаты узла  $j$ . Теперь положение материнских элементов для бифуркаций  $\{j, 2j-1, 4j-3, 4j-2\}$  и  $\{j, 2j, 4j-1, 4j\}$  задано. Записывая условия (3) для углов  $\alpha_{4j-3}$ ,  $\alpha_{4j-2}$ ,  $\alpha_{4j-1}$ ,  $\alpha_{4j}$ , получим четыре уравнения, связывающие коэффициенты  $a$ ,  $b$ . Таким образом, одновременное выполнение условий (3) и (4) возможно только в том случае, если параметры  $a$ ,  $b$  меняются от бифуркации к бифуркации, что не соответствует данным измерений. Помимо этого, остаются неизвестными механизмы, которые могли бы обеспечить выполнение этих условий при формировании проводящих элементов в растущих тканях растений и животных. Условия (1) обеспечиваются за счет поддержания в растущих проводящих элементах постоянного напряжения при трении о стенку, которое в артериях «отслеживается» механорецепторами сосудистой стенки [6]. В тканях листьев растений зависимость в виде (1) обеспечивается поддержанием баланса между притоком жидкости и ее поглощением клетками [7]. Оптимальные углы ветвления (3) обеспечиваются увеличением скорости деления и роста клеток в областях с достаточным притоком питательных веществ [8]. При этом соотношения (4) не выполняются для каждого проводящего элемента дерева, но выполняются в обобщенном виде [9]

$$L_{\Sigma j} = f(d_j), \quad (7)$$

где  $L_{\Sigma j}$  – сумма длин проводящих элементов самого длинного пути вдоль дерева, начиная от узла  $j$  и заканчивая мельчайшим элементом (например, для схемы на рисунке 2,  $a$  имеем  $L_{\Sigma j} = L_{2j-1} + L_{4j-3}$ ).

**3 Алгоритм «from bottom to top» построения оптимальной проводящей системы в виде бинарного дерева.** Пусть задан объем  $V$ , заполненный биологической тканью, и известна плотность распределения в ней капилляров, т.е. среднее расстояние  $l_0$  между парой ближайших капилляров. Соединим капилляры поперечными соединениями в соответствии с известными особенностями строения микроциркуляторной системы того или иного органа, например, попарно или трифуркациями. Зададим координаты концов проводящих элементов последнего порядка ветвления, которые дают начало пучкам капилляров (на рисунке 2,  $a$  это узлы  $4j-3$ ,  $4j-2$ ,  $4j-1$ , и  $4j$ ). Назначим диаметр  $d_0$  наименьшего из проводящих элементов (например,  $d_{4j-1}$ ,  $d_{4j-2}$ ) и вычислим диаметры оставшихся дочерних элементов  $d_{4j}$ ,  $4j-3 = d_0/\zeta$ , при заданной асимметрии бифуркаций  $\zeta$ . Из (5) определим величину оптимальных полных углов бифуркации  $\Phi_{2j} = \alpha_{4j} + \alpha_{4j-1}$  и  $\Phi_{2j-1} = \alpha_{4j-2} + \alpha_{4j-3}$ . Геометрическим местом вершин соответствующих углов будут дуги окружностей с радиусами

$$R_{2j-1} = \frac{I_{4j-2,4j-2}}{2\cos(\alpha_{4j-2} + \alpha_{4j-3})}, \quad R_{2j-1} = \frac{I_{4j-1,4j}}{2\cos(\alpha_{4j-1} + \alpha_{4j})}. \quad (8)$$

Таким образом, координаты узла  $2j-1$  удовлетворяют уравнению

$$(x_{2j-1} - X_{2j-1})^2 + (y_{2j-1} - Y_{2j-1})^2 = R_{2j-1}^2, \quad (9)$$

а узла  $2j$  – уравнению

$$(x_{2j} - X_{2j})^2 + (y_{2j} - Y_{2j})^2 = R_{2j}^2, \quad (10)$$

где

$$(X_{2j-1}, Y_{2j-1}) = (x_{4j-3} + R_{2j-1} \sin(\beta_{2j-1} - \delta_{2j-1}), y_{4j-3} + R_{2j-1} \cos(\beta_{2j-1} - \delta_{2j-1})),$$

$$(X_{2j}, Y_{2j}) = (x_{4j-1} + R_{2j} \sin(\beta_{2j} - \delta_{2j}), y_{4j-1} + R_{2j} \cos(\beta_{2j} - \delta_{2j})) -$$

координаты центров соответствующих окружностей,

$$\beta_{2j-1} = \arctg \frac{I_{4j-3,4j-2}}{2R_{2j-1}}, \quad \beta_{2j} = \arctg \frac{I_{4j-1,4j}}{2R_{2j}}$$

$$\delta_{2j-1} = \arctg \frac{x_{4j-1} - x_{4j-3}}{y_{4j-2} - y_{4j-3}}, \quad \delta_{2j} = \arctg \frac{x_{4j} - x_{4j-1}}{y_{4j} - y_{4j-1}}.$$

Величины углов  $\alpha_{4j-3}$ ,  $\alpha_{4j-2}$ ,  $\alpha_{4j-1}$ ,  $\alpha_{4j}$  можно определить только после вычисления координаты узла  $j$ . Зная  $d_{4j}$ ,  $4j-1$ ,  $4j-2$ ,  $4j-3$  и  $\zeta$ , определим из (2)  $d_{2j-1}$  и

$d_{2j}$ , а из (5) – угол  $\alpha_{2j} + \alpha_{2j-1}$ . Геометрическим местом вершин этого угла будет окружность радиуса

$$R_j = \frac{I_{2j-1,2j}}{2\cos(\alpha_{2j} + \alpha_{2j-1})} \quad (11)$$

с центром в точке

$$(X_j, Y_j) = (x_{2j-1} + R_j \sin(\beta_j - \delta_j), y_{2j-1} + R_j \cos(\beta_j - \delta_j)),$$

где  $\beta_j = \arctg \frac{I_{2j-1,2j}}{2R_j}$ ,  $\delta_j = \arctg \frac{x_{2j} - x_{2j-1}}{y_{2j} - y_{2j-1}}$ .

Координаты узла  $j$  удовлетворяют уравнению

$$(x_j - X_j)^2 + (y_j - Y_j)^2 = R_j^2. \quad (12)$$

В соотношениях (8)–(10) длины  $I_{4j-2,4j}$  и  $I_{4j-1,4j}$  известны, но в (11) соответствующая длина выражается через неизвестные координаты узлов  $2j-1$  и  $2j$  как  $I_{2j-1,2j} = \sqrt{(x_{2j} - x_{2j-1})^2 + (y_{2j} - y_{2j-1})^2}$ . Таким образом, для определения неизвестных координат узлов  $j$ ,  $2j-1$  и  $2j$  имеем три уравнения (10)–(12). Еще три уравнения получим, выписывая соотношения для трех углов, например,  $\cos \alpha_{2j}$ ,  $\cos \alpha_{4j}$  и  $\cos \alpha_{4j-2}$  на рисунке 2, а. Величины углов можно определить как углы между парой прямых  $(j, 2j-1)$  и  $(2j-1, 4j-2)$ , и парой  $(j, 2j)$  и  $(2j, 4j)$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_{4j-2} = \frac{k_{j,2j-1} - k_{4j-2,2j-1}}{1 + k_{j,2j-1} k_{4j-2,2j-1}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{4j} = \frac{k_{j,2j} - k_{4j-2,2j}}{1 + k_{j,2j} k_{4j-2,2j}}, \quad k_{p,q} = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}.$$

Тогда оставшиеся углы  $\alpha_{2j-1,4j-1,4j-3}$  вычисляются как разницы между полными и выписанными выше.

Следовательно, для однозначного определения координат трех узлов системы трех связанных бифуркаций имеем систему из шести алгебраических трансцендентных уравнений, решение которой можно получить методом последовательных приближений. В качестве начального приближения удобно взять координаты узлов, соответствующие углам ветвления  $\alpha_{2j} = \frac{\varphi_j}{2}$ ,

$\alpha_{4j} = \frac{\varphi_{2j}}{2}$ ,  $\alpha_{4j-2} = \frac{\varphi_{2j-1}}{2}$ , что обеспечивает достаточно быструю сходимость. Проводя вычисления для всех троек связанных бифуркаций, начиная от мельчайших элементов, определим координаты отрезков, соответствующих элементам предыдущего порядка ветвления  $(j, j+1, j+2, \dots, j+k)$  на рисунке 1, б, где  $k = 2n$  – число элементов, которые берут начало на поверхности  $V$ . Затем проводим расчеты для координат узлов предыдущего порядка ветвле-

ния и т. д. пока не приходим к системе бифуркаций в корне дерева ((2, 3, 4)–(3, 5, 6)–(4, 7, 8) на рисунке 1, б). Для начального элемента ((1, 2) на рисунке 1, б) может быть определен только угол наклона  $\alpha_2$ , вычисленный по (2).

Результат работы алгоритма приведен на рисунке 2, б. Стрелками указаны самые длинные пути  $L_{\Sigma j}$  вдоль двух подсистем дерева, отходящих от узла  $j = 2$  (рисунок 1, б).

**4 Расчеты проводимости дерева для стационарного течения вязкой макро-, микро- и наножидкостей.** Стационарное течение вязкой жидкости по трубке кругового сечения (течение Пуазейля) характеризуется гидравлической проводимостью сопротивлением  $Y^P = \frac{\pi d^4}{128\mu L}$ , где  $\mu$  – вязкость жид-

кости. Течения суспензий микрочастиц (микрожидкостей) по микротрубкам (с диаметрами  $d = 10 \dots 300$  мкм) удовлетворительно описываются решениями уравнений Навье-Стокса с условиями проскальзывания первого порядка [11]. При этом проводимость трубки  $Y_{\text{micro}} = Y^P(1 - a\text{Kn})$ , где  $\text{Kn} = \lambda/d$  –

число Кнудсена,  $\lambda$  – длина свободного пробега микрочастиц,  $a_s = \text{const}$ . Течения суспензий наночастиц (наножидкостей) по нанотрубкам (с диаметрами  $d = 10 \dots 300$  нм) описываются решениями уравнений Навье-Стокса с условиями проскальзывания второго порядка [10], а проводимость трубки

$Y_{\text{nano}} = Y^P(1 - a\text{Kn} - b\text{Kn}^2)$ ,  $b_s = \text{const}$ .

Полную проводимость дерева можно рассчитать, суммируя проводимости параллельно соединенных трубок ( $(j, 2j)$  и  $(j, 2j-1)$  на рисунке 1, а)  $Y_{2j} + Y_{2j-1}$ , и суммируя обратные проводимости – для последовательно расположенных трубок, так что для рассмотренной в разделе 2 бифуркации из трех трубок ее полная проводимость составит

$$Y_j(Y_{2j} + Y_{2j-1}) / (Y_j + Y_{2j} + Y_{2j-1}).$$

Проводя суммирование от мельчайших проводящих элементов до корневого элемента бинарного дерева, получим выражение для полной проводимости дерева. Значения  $d_j$ ,  $L_j$  для каждой трубки рассчитывались в соответствии с описанным выше алгоритмом. Вязкость для стандартных трубок принималась постоянной  $\mu = 10^{-3}$  Па·с, для микрожидкостей учитывался эффект Фареуса-Линдквиста  $\mu = \mu_0 d_j^{1/6}$ , а для наножидкостей учитывалось влияние концентрации  $C$  наночастиц  $\mu_{\text{nano}} = \mu_0(1 + k_1 C + k_2 C^2)$ ,  $k_1 = 39,1$ ,  $k_2 = 533,9$  [11]. Для коэффициентов проскальзывания принимались значения  $a_{sj} = 2,3/d_j$ ,  $b_{sj} = -d_j^2$  [12].

Некоторые результаты численных экспериментов приведены на рисунке 3. Расчеты проводились при  $\gamma = 3; 2,5; 3,5$  (широкая, средняя и тонкая ли-

нии) и  $d_0 = 10$  мкм (кривые 1,2,3),  $d_0 = 7,5$  мкм (кривые 4, 5, 6),  $d_0 = 5$  мкм (кривые 7, 8, 9), а также при  $\gamma = 3$ ,  $a = 5$  и вариации  $b = 1,2, 0,8$  (кривые 10 и 11). С увеличением числа порядков и общей длины путей вдоль дерева проводимость уменьшается. С ростом  $\gamma$  проводимость растет, но возрастают и метаболические затраты в связи с увеличением объема протекающей жидкости. Увеличение  $d_0$  (соответствует увеличению числа мельчайших элементов в объеме  $V$ ) приводит к предсказуемому росту проводимости. Аналогичные результаты были получены и для микро- и наножидкостей. Расчеты длины пути вдоль русла показали, что использование предложенного алгоритма ведет к формированию деревьев с  $L_{\Sigma j} = k_1(\gamma, \xi) d_j^{k_2(\gamma, \xi)}$ , что соответствует данным измерений на препаратах артериальных систем.

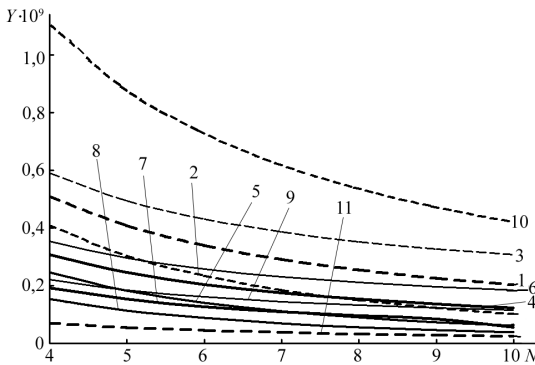


Рисунок 3 – Зависимость проводимости дерева от числа порядков ветвления  $N$  при разных значениях параметров (пояснения в тексте)

**Заключение.** Таким образом, в работе предложен алгоритм генерации ветвящихся транспортных русел в виде бинарных деревьев на основе использования эмпирических зависимостей между диаметрами и углами ветвления проводящих элементов в бифуркациях, полученных путем измерений на препаратах кровеносных и дыхательных систем животных и человека. Соответствующие зависимости между диаметром корневого элемента и суммарной длиной самого длинного пути от корня к верхушке дерева, вычисленные на полученных моделях, соответствуют эмпирическим данным. Таким образом, в основе формирования транспортных систем в растущих тканях и органах могут использоваться естественные принципы поддержания баланса между притоком жидкости и ее потреблением клетками.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Архитектоника кровеносного русла** / К. А. Шошенко [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1982. – 184 с.

2 **Structure-function relationships in the pulmonary arterial tree** / Ch. A. Dawson [et al.] // Journal of Applied Physiology. – 1999. – Vol. 86, № 2. – P. 569–583.



3 **Кизилова, Н. Н.** Исследование транспортных систем листьев растений / Н. Н. Кизилова, Н. А. Попова // Проблемы бионики. – 1999. – № 51. – С. 71–79.

4 **Розен, Р.** Принцип оптимальности в биологии / Р. Розен. – М.: Мир, 1969. – 215 с.

5 **Балабанов, В. О.** Математическое моделирование артериальных систем как бинарных деревьев, заполняющих объем / В. О. Балабанов, Н. Н. Кизилова // Вестник Киевского национального университета. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2015. – Спецвыпуск. – С. 27–32.

6 **La Barbera, M.** Principles of design of fluid transport systems in zoology / M. La Barbera // Science. – 1990. – Vol. 249, № 4972. – P. 992–1000.

7 **Кизилова, Н. Н.** Гидравлические свойства ветвящихся трубопроводов с проницаемыми стенками / Н. Н. Кизилова // Прикладная гидромеханика. – 2003. – Т. 5. – № 1. – С. 28–35.

8 **Kizilova, N.** Long-distance liquid transport in plants / N. Kizilova // Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. – 2008. – Vol. 57, № 3. – P. 179–203.

9 **Kizilova, N.** Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics / N. Kizilova // Lecture Notes in Computer Science. – 2004. – Vol. 3044. – P. 476–485.

10 **Кизилова, Н. Н.** Моделирование ламинарного течения несмешивающихся суспензий микро- и наночастиц в микроканалах / Н. Н. Кизилова, В. А. Черевко // Механика. Исследования и инновации. – 2015. – Вып. 9. – С. 47–53.

11 **Malvandi, A.** Effects of nanoparticle migration and asymmetric heating on magnetohydrodynamic forced convection of alumina/water nanofluid in microchannels. / A. Malvandi, D. D. Ganji // European Journal of Mechanics – B: Fluids. – 2015. – Vol. 52. – P. 169–184.

12 **Karniadakis, G. E.** Governing Equations and Slip Models / G. E. Karniadakis, A. Beskok, N. Aluru // Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation (Series Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 29). – New York: Springer-Verlag, 2005. – P. 51–77.

*V. A. BALABANOV, N. N. KIZILOVA*

*V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine*

## **NOWEL ALGORITHM FOR GENERATION OF OPTIMAL TRANSPORTATION SYSTEMS FILLING THE VOLUME**

In the paper there is proposed a new algorithm for construction of the branched pipelines, ensuring the delivery of fluid from a source to a distributed system of consumers. The geometry of the pipeline is described as a binary tree. Its parameters (the diameters and branching angles in the bifurcations) correspond to geometry of the nature transport systems, i. e. blood vessels, airways, water delivery systems in plants, and other conductive systems. There was created an algorithm allowing to identify coordinates of the tree nodes uniquely using only the relationships between the diameters and branching angles in the bifurcations. It is shown that the systems generated after algorithm implementation are characterized by the correct length-diameter relationships. The generated structures can be used for the branching systems modeling, investigations of trees' penetrability compared to a stationary, wave or turbulent fluid flow, and mechanical strength as well.

Получено 14.02.2016