$$\frac{\rho_0}{\rho}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i \;\; P-P_0}{\rho_{i0}c_{i0}^2}+1\right]^{-\chi_i}, \tag{1}$$

где $\chi_i = 1/\gamma_i$, γ_i – показатель изентропы i-й компоненты.

Для уравнения состояния трехкомпонентной среды (водонасыщенного грунта) (1) вводятся следующие обозначения: α_i – содержание по объему компонент; ρ_{io} – плотность; V_{io} – их удельный объем; c_{io} – скорость звука в компонентах при атмосферном давлении P_o; i – номер компоненты (1 – воздух, 2 – жидкость, 3 – твердые частички). При давлении $P = P_o$ плотность среды ρ_o и удельный объем V_o определяется по формулам

$$\rho_0=\frac{1}{V_0}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\rho_{i0}, \qquad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1.$$

Характеристика каждого слоя определяется величинами α_i, ρ_{io} [1, 2].

Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения сферических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\;\rho U\;+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\;\;\rho U^2+P\;\;\right]-\frac{2}{r}P=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\;\;\rho U\;\;\right]=0.$$

В уравнениях (2) r – пространственная координата, t – временная координата, U – скорость, ρ – плотность, P – давление.

Уравнения движения грунтовой среды (2) дополняются уравнением состояния (1) вида $F(P,\rho)=0$, где

$$F(P,\rho)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i(P-P_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2}+1\right]^{-1/\gamma_i}-\frac{\rho_0}{\rho}. \tag{3}$$

Предполагаемый алгоритм решения основывается на использовании разностных схем Мак – Кормака для численного решения динамических задач о поведении сжимаемой жидкости [4, 5].

Список литературы

1 **Ляхов, В. М.** Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / В. М. Ляхов. – М. : Недра, 1982. – 288 с.

2 Механический эффект взрыва в грунтах / И. А. Лучко [и др.] – Киев : Наук. думка, 1989. – 232 с.

3 **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.

4 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных загрузках : [моногр.] / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : Изд.-полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

5 **Флетчер, К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2 / К. Флетчер. – М. : Мир, 1991. – 526 с.

УДК 539.3

УДАР СИСТЕМЫ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ ПО АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДЕ

Е. Ю. МИХАЙЛОВА, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А. Н. УЛЬЯШИНА, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (НИИ),

Российская Федерация

В работе исследуется удар системы концентрических оболочек со слоем жидкости между ними (ударник) по жесткой преграде (основание). Здесь рассматриваются оболочки типа Тимошенко. В начальный момент времени ударник движется со скоростью v_0 нормально к поверхности основания.

Математическая модель процесса включает в себя:

– уравнения движения системы оболочек в перемещениях [1]:

$$\ddot{\mathbf{w}}_k = \mathbf{L}^k \mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{p}}_k,\ \mathbf{w}_k = \left(u_k, w_k, \chi_k\right)^T,\ \mathbf{L}^k = \left(L_{ij}^k\right)_{3\times 3},\ \tilde{\mathbf{p}}_k = \left(0, \kappa_k \tilde{p}_k, 0\right)^T, \tag{1}$$

$$L_{11}^{(k)} = \frac{\alpha_k^2\left(l_2 - \sin^{-2}\theta\right) + \beta_k^2\left(2 - k^2\right)}{R_k^{\ 2}},\ L_{12}^{(k)} = \frac{\left[2\left(\alpha_k^2 - \beta_k^2\right) + \beta_k^2 k^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta}}{R_k^{\ 2}},\ L_{13}^{(k)} = \frac{\gamma_k^2\alpha_k^2\left(\sin^{-2}\theta - l_2\right) + \beta_k^2 k^2}{R_k},$$

$$L_{21}^{(k)} = -\frac{\left[2\left(\alpha_k^2 - \beta_k^2\right) + \beta_k^2 k^2\right] l_1}{R_k^{\ 2}},\ L_{22}^{(k)} = \frac{\beta_k^2 k^2 l_2 - 4\left(\alpha_k^2 - \beta_k^2\right)}{R_k^{\ 2}},\ L_{23}^{(k)} = \frac{\beta_k^2 k^2 l_1}{R_k},\ L_{31}^{(k)} = \gamma_k^{-2} R_k^{-2} L_{13}^{(k)},$$

$$L_{32}^{(k)} = -\frac{\beta_k^2 k^2}{\gamma_k^2 R_k^{\ 3}}\frac{\partial}{\partial\theta},\ L_{33}^{(k)} = -\gamma_k^{-2} R_k^{-1} L_{13},\ l_1 = \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\theta,\ l_2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{ctg}\theta,\ k^2 = \frac{5}{6};$$

– уравнение движения акустической среды (жидкости) [1]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} = \alpha_2^2\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} l_2\Phi\right); \tag{2}$$

– физическое соотношение

$$p_2 = -\tilde{\gamma}_2\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}; \tag{3}$$

– соотношение, связывающее скорость жидкости в точке с потенциалом скоростей,

$$v_2 = \mathrm{grad}\Phi\ . \tag{4}$$

Контакт между оболочками и заполнителем (5), ударником и преградой (6) осуществляется в условиях свободного проскальзывания:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=R_0} = \frac{\partial w_0}{\partial\tau},\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{\partial w_1}{\partial\tau}, \tag{5}$$

$$w_1 = 1 - \cos\theta - V_0\tau,\ \theta\in\left[0,\theta^*\right];\ p_1\left(\theta,\tau\right) < 0,\ \theta\in\left[0,\theta^*\right];\ p_1\left(\theta,\tau\right) = 0,\ \theta\notin\left[0,\theta^*\right]. \tag{6}$$

Замыкают постановку задачи начальные условия

$$\begin{gathered} \left.u_k\right|_{\tau=0} = 0,\ \left.w_k\right|_{\tau=0} = 0,\ \left.\chi_k\right|_{\tau=0} = 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{\tau=0} = V_0\cos\theta,\ \left.\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right|_{\tau=0} = -V_0\sin\theta, \\ \left.\dot{\chi}_k\right|_{\tau=0} = 0,\ \left.\dot{u}_k\right|_{\tau=0} = -V_0\sin\theta,\ \left.\dot{w}_k\right|_{\tau=0} = V_0\cos\theta. \end{gathered} \tag{7}$$

Все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (параметры с индексом $k = 0, 1$ относятся к оболочкам, а с индексом $k = 2$ – к жидкости). Здесь τ – безразмерное время, u_k, w_k, – тангенциальные, нормальные перемещения оболочки; χ_k – угол отклонения ортогонального к срединной поверхности до деформации материального волокна за счёт сдвиговых деформаций, R_k – радиус оболочки, p_k – нормальное давление на оболочку и в жидкости, Φ – потенциал скоростей акустической среды, r – радиус-вектор, v_2 – скорость жидкости.

Для исследования контактного взаимодействия системы оболочек с жесткой преградой получена система разрешающих уравнений, основное уравнение которой вытекает из граничного условия (6) и интегрального соотношения, базирующегося на принципе суперпозиции [2] и связывающего нормальные перемещения внешней оболочки с контактным давлением

$$w_1\left(\theta,\tau\right) = 2\pi\int_0^{\tau}\int_0^{\theta^*} G_2\left(\theta,\xi,\tau - t\right) p\left(\xi,t\right)\sin\xi\, d\xi\, dt, \tag{8}$$

где $G_2\left(\theta,\xi,\tau\right)$ – функция влияния для ударника.

Дополняют данную систему начальные условия. Для ее решения используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. С учетом гиперболического типа уравнений движения оболочки и полупространства применяется явная схема интегрирования.

Функция влияния для ударника, входящая в интегральное соотношение (8), представляет собой нормальные перемещения системы оболочек как решение задачи (1)–(5) при однородных начальных условиях и при воздействии сосредоточенного мгновенного давления $p = \delta(\tau)\delta(\theta - \xi)$, где $\delta(\tau)$, $\delta(\theta - \xi)$ – дельта-функции Дирака. При этом в формуле (1) полагаем $\tilde{p}_1 = p - p_2\big|_{r=1}$, $\tilde{p}_0 = p_2\big|_{r=R_0}$. Для решения системы уравнений (1)–(5) используется метод Фурье разделения переменных, при котором все искомые функции, зависящие от радиальной и временной переменных, раскладываются в ряды по полиномам Лежандра и их производным. При подстановке этих разложения в (1)–(5) получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов, зависящих от времени и угловой координаты, для решения которой применяется преобразование Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-08-00260).

Список литературы

1 Волны в сплошных средах : учеб. пособие для вузов / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 632 с.

2 **Михайлова, Е. Ю.** Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства / Е. Ю. Михайлова, Г. В. Федотенков, Д. В. Тарлаковский [Электронный ресурс] // Труды МАИ : электронный журнал. – 2014. – Вып. 78. – Режим доступа : http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53499. – Дата доступа : 10.08.2017.

УДК 539.4:621.6

РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОМ ТЕЛЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ШИНЫ КОЛЕСА

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Д. С. КУЗЬМЕНКОВ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Перспективы прогресса в машиностроении и строительстве в основном связываются с разработкой и широким применением композиционных материалов (композитов).

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта с массивными шинами (автомобильные, электропогрузчики, подвесные канатные дороги, эскалаторы метро и др.), а также новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Недостаточно изученное влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия при силовом квазистатическом воздействии не позволяет обосновать практику их проектирования; не существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композитов при контакте по ним внешними объектами. В связи с этим есть необходимость в разработке математической модели и компьютерных программ расчета напряжений при статическом контакте штампа (моделирующего шину колеса) с телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах взаимодействия.

В данном случае особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе:

– статического контактного взаимодействия цилиндрического тела (моделирующие шину) и слоистого основания;

– зависимости напряженного состояния упругих тел из композитов (при статическом контакте) от типа ориентации волокон материала, например армированного кордом.

Анализ применения анизотропных композиционных материалов нельзя производить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры, и расположению компонентов. Важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей.

В связи с этим возникает цель исследований – создание математических моделей и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при силовом статическом воздействии, а также методики, реализующей определение напряжений и перемещений в объемном теле при заданных областях контакта и действующего давления.

На основании работ [1, 2] представлен алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле заданной формы. Для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Применялись пря-