Так как функции $I_0(\sqrt{a}x)$, $I_0(\sqrt{\bar{a}}x)$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ являются комплексными, а функция прогибов пластины w должна быть действительной, то постоянные интегрирования B_1, B_2, B_3, B_4 также должны быть комплексными числами. Для того чтобы выразить решение задачи через действительные функции, перепишем интеграл (5) в другой форме:

$$w = C_1 u_0(x) + C_2 v_0(x) + C_3 f_0(x) + C_4 g_0(x) + w_p, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения:

$$u_0(x) = \mathrm{Re}\, J_0(\sqrt{a}x) = \frac{J_0(\sqrt{a}x) + J_0(\sqrt{\bar{a}}x)}{2};\ v_0(x) = \mathrm{Im}\, J_0(\sqrt{\bar{a}}x) = \frac{J_0(\sqrt{a}x) - J_0(\sqrt{\bar{a}}x)}{2i};$$

$$f_0(x) = \mathrm{Re}\, H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)}{2};\ g_0(x) = \mathrm{Im}\, H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) - H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)}{2i}.$$

Из выражений (6) следует, что функции $u_0(x)$, $f_0(x)$ представляют собой действительные, а функции $v_0(x)$, $g_0(x)$ – мнимые части функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка. Так как эти функции действительны, то действительными будут и произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, которые определяются из граничных условий.

Полученное в работе общее решение системы дифференциальных уравнений можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при опирании ее на упругое основание Пастернака.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

УДК 539.374

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В настоящее время деформирование упругих трехслойных элементов конструкций при статических нагрузках достаточно хорошо изучено, однако их поведение при динамических воздействиях в условиях мгновенного импульсного приложения нагрузок исследовано мало. Подобные проблемы безопасности конструкций возникают в условиях природных катаклизмов, при сейсмических воздействиях, вследствие ударных взрывных волн.

Ранее [1] были исследованы колебания трехслойных стержней, не связанных с упругим основанием. Здесь рассматриваются свободные и вынужденные колебания трехслойного стержня на винклеровском основании под действием импульсных нагрузок.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена перпендикулярно внешней плоскости первого слоя. На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x,t)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв.

Считаем, что стержень прикреплен к основанию вторым слоем и выполняется следующее соотношение:

$$q_r = \kappa_0 w_2 \ .$$

Уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня имеют вид

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0;$$

$$-a_1u_1 + a_1u_2 - a_5u_{1,xx} - a_9u_{2,xx} - a_{10}w_{1,x} - a_{17}w_{2,x} - a_6w_{1,xxx} + 2a_7w_{2,xxx} + m_2\ddot{u}_2 = 0\,;$$

$$-a_2u_{1,x} + a_{10}u_{2,x} + 2a_6u_{1,xxx} + a_6u_{2,xxx} + a_{11}w_{1,xx} - a_{12}w_{2,xx} +$$
$$+a_{15}w_{1,xxxx} - a_{16}w_{2,xxxx} + a_8w_1 - a_8w_2 + m_1\ddot{w}_1 - m_3\ddot{w}_{1,xx} = q\,;$$
$$-a_3u_{1,x} + a_{17}u_{2,x} - a_7u_{1,xxx} - 2a_7u_{2,xxx} - a_{12}w_{1,xx} + a_{14}w_{2,xx} -$$
$$-a_{16}w_{1,xxxx} + a_{13}w_{2,xxxx} - a_8w_1 + (a_8 + \kappa_0)\,w_2 + m_2\ddot{w}_2 - m_4\ddot{w}_{2,xx} = 0\,.$$

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие ограничения для перемещений в сечениях $x = 0, l$ имеют вид

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \qquad (k = 1, 2)\,.$$

Начальные условия движения будут ($t = 0$)

$$u_k(x,0) = u_{k0}(x);\quad \dot{u}_k(x,0) = \dot{u}_{k0}(x)\,;\quad w_k(x,0) = w_{k0}(x);\quad \dot{w}_k(x,0) = \dot{w}_{k0}(x)\,.$$

Решение начально-краевой задачи проводится методом Бубнова – Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющей принятым граничным условиям:

$$u_1(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{\pi m x}{l}T_{m1}(t);\quad u_2(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{\pi m x}{l}T_{m2}(t);\quad q(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi m x}{l}q_m(t);$$
$$w_1(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi m x}{l}T_{m3}(t);\quad w_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi m x}{l}T_{m4}(t).$$

Функции времени $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам δ_{mki}:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^{4}\delta_{mki}\zeta_{mi} \qquad \left(\sum_{i=1}^{4}\delta_{mik}^2 = 1\right),$$

где $\quad \zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi}t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi}t) + \dfrac{1}{\omega_{mi}}\displaystyle\int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau))\tilde{q}_{mi}(\tau)d\tau.$

В случае воздействия мгновенного локального импульса интенсивностью q_1 = const аналитический вид нагрузки будет

$$q(x,t) = q_1\delta(t)(H_0(b-x) - H_0(a-x))\,,$$

где $\delta(t)$ – импульсная функция Дирака [2].

Параметры разложения нагрузки в ряд

$$q_m = \frac{2q_1\delta(t)}{\pi m}\left(\cos\frac{\pi m a}{l} - \cos\frac{\pi m b}{l}\right).$$

Искомая функция времени

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{2q_1\delta_{m3i}\sin(\omega_{mi}t)}{\pi m\omega_{mi}\sum_{k=1}^{4}M_{mkk}\delta_{mki}^2}\left(\cos\frac{\pi m a}{l} - \cos\frac{\pi m b}{l}\right).$$

Проведен численный параметрический анализ полученных решений.

Полученные аналитические и численные результаты позволяют сделать вывод о существенном влиянии упругого основания средней и высокой жесткости на частоты и перемещения. При колебаниях элементов конструкций на основаниях малой жесткости его влиянием в ряде случаев можно пренебречь.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

Список литературы

1 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д. В. Леоненко // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

2 **Корн, Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.