В данном случае ρ_1 – плотность акустической среды, а A_Φ – произвольная постоянная.

Для определения нормальные перемещений пластины находится значение функции Грина $G_0(x)$.

Для задания воздействия на преграду звуковой волны необходимо определить связь амплитуд давлений с кинематическими параметрами пластины. Для этого решается вспомогательная задача. Предполагается, что рассматривается четверть акустического пространства, ограниченного $0 \le x < \infty$ и $0 \le z < \infty$, на границе которого при $z = 0$ задается нормальное перемещение, изменяющееся по времени по гармоническому закону. Требуется найти давление на границе пространства. В результате решения волнового уравнения в потенциалах получаем следующую зависимости

$$p_{1w} = -w_0\Gamma,\ p_2 = w_0\Gamma;\ \ \Gamma = -\omega^2\rho_0\int_0^l G(x,z,\xi)\,d\xi;$$

$$G(x,\text{z},\xi) = \frac{1}{\pi}\left(K_0\left(\omega|x-\xi|\right) + K_0\left(\omega|x+\xi|\right)\right),$$

где $G(x,z,\xi)$ – функция влияния Грина; K_0 – модифицированная функция Бесселя 2-го рода; ξ – координата приложения дельта-функции Дирака.

Для решения данной связанной задачи необходимо учитывать взаимосвязь кинематических параметров пластины и амплитуды давления набегающей волны, что в результате дает интегро-дифференциальное уравнение

$$\rho h\omega^2 w = -D\frac{d^4w}{dx^4} - 2w\Gamma + p.$$

Для решения уравнения (13) применяется метод последовательных приближений:

$w_0 = G_0(x)P_*,$

$w_1 = G_0(x)(2w_0\mathit{\Gamma} + P_*),$

...

$w_n = G_0(x)(2w_{n-1}\mathit{\Gamma} + P_*).$

В результате полеченное значение w_n, после выполнения n операций, позволяет определить амплитуды давлений в прошедшей и отраженной волнах, а также коэффициент звукопоглощения и показатель звукоизоляции. Таким образом, становится возможным выбирать оптимальные параметры материала, из которого выполнена пластина, и ее геометрию, что представляет существенный практический интерес.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-58-00034).

Список литературы

1 Волны в сплошных средах : учеб. пособ. для вузов / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

2 **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнением математической физики / А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

УДК 539.3

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ НА СЛОЖНОМ ОСНОВАНИИ

А. Г. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Распространённой расчётной моделью трёхслойных конструкций является круглая пластина на упругом основании. Подобный конструктивный элемент присутствует в объектах аэрокосмической техники, судостроения, машиностроении, радиоэлектроники, а также в строительстве. Поэтому возникает актуальная проблема разработки эффективных методик расчёта напряжённо-деформированного состояния трёхслойных конструкций, связанных со сложным основанием.

Здесь рассмотрена краевая задача об осесимметричном деформировании несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины с легким заполнителем на основании Пастернака. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешние слои стержня действует распределенная нагрузка $q_0(r)$ и реакция основания модели Пастернака:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \tag{1}$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига, Δ – оператор Лапласа.

Уравнения равновесия и граничные условия в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w,_r) = -p\,,\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w,_r) = 0\,;$$
$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w,_r) = -(q_0 + q_R)\ , \tag{2}$$

где q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки; $w(r)$ – прогиб; $u(r)$ – радиальное перемещение координатной плоскости; h_k – толщина k-го слоя; L_k – линейные дифференциальные операторы,

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+\,;\ a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+)\,,\ a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+\,;$$
$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right),\ a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right];$$
$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+\,;$$
$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}\,,\ L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}\,.$$

С помощью первых двух уравнений системы (2) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ. После некоторых преобразований выделим дифференциальное уравнение четвертого порядка и введем в нем замену переменной $x = \kappa r$ для определения прогиба $w(x)$:

$$w,_{xxxx} + \frac{2}{x}w,_{xxx} - \frac{1}{x^2}w,_{xx} + \frac{1}{x^3}w,_x - 2t_0^2(w,_{xx} + \frac{1}{r}w,_x) + w = 0$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0\,, \tag{3}$$

где $\kappa^4 = \kappa_0 D$; $q = q_0 D$; $2t_0^2 = t_{f1}/\kappa^2$; $t_{f1} = t_f D$; $D = \dfrac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}$.

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (3) может быть теперь представлен в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p\,, \tag{4}$$

где w_p – частный интеграл, соответствующий уравнению (3); w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая уравнениям

$$w_1,_{xx} + \frac{1}{x}w_1,_x + aw_1 = 0\,,\ w_2,_{xx} + \frac{1}{x}w_2,_x + \bar{a}w_2 = 0\,.$$

После ряда преобразований решение сводится к виду

$$w = B_1 J_0(\sqrt{a}x) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + B_3 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) + w_p\,, \tag{5}$$

где $J_0(\sqrt{a}x)$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, аргументов $\sqrt{a}x$ и $\sqrt{\bar{a}}x$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Ганкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Так как функции $I_0(\sqrt{a}x)$, $I_0(\sqrt{\bar{a}}x)$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ являются комплексными, а функция прогибов пластины w должна быть действительной, то постоянные интегрирования B_1, B_2, B_3, B_4 также должны быть комплексными числами. Для того чтобы выразить решение задачи через действительные функции, перепишем интеграл (5) в другой форме:

$$w = C_1 u_0(x) + C_2 v_0(x) + C_3 f_0(x) + C_4 g_0(x) + w_p, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения:

$$u_0(x) = \operatorname{Re} J_0(\sqrt{a}x) = \frac{J_0(\sqrt{a}x) + J_0(\sqrt{\bar{a}}x)}{2}; \quad v_0(x) = \operatorname{Im} J_0(\sqrt{\bar{a}}x) = \frac{J_0(\sqrt{a}x) - J_0(\sqrt{\bar{a}}x)}{2i};$$

$$f_0(x) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)}{2}; \; g_0(x) = \operatorname{Im} H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) - H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)}{2i}.$$

Из выражений (6) следует, что функции $u_0(x)$, $f_0(x)$ представляют собой действительные, а функции $v_0(x)$, $g_0(x)$ – мнимые части функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка. Так как эти функции действительны, то действительными будут и произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, которые определяются из граничных условий.

Полученное в работе общее решение системы дифференциальных уравнений можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при опирании ее на упругое основание Пастернака.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

УДК 539.374

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В настоящее время деформирование упругих трехслойных элементов конструкций при статических нагрузках достаточно хорошо изучено, однако их поведение при динамических воздействиях в условиях мгновенного импульсного приложения нагрузок исследовано мало. Подобные проблемы безопасности конструкций возникают в условиях природных катаклизмов, при сейсмических воздействиях, вследствие ударных взрывных волн.

Ранее [1] были исследованы колебания трехслойных стержней, не связанных с упругим основанием. Здесь рассматриваются свободные и вынужденные колебания трехслойного стержня на винклеровском основании под действием импульсных нагрузок.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена перпендикулярно внешней плоскости первого слоя. На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x,t)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв.

Считаем, что стержень прикреплен к основанию вторым слоем и выполняется следующее соотношение:

$$q_r = \kappa_0 w_2 \;.$$

Уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня имеют вид

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0\,;$$