Используя вариационный принцип Лагранжа, соотношения (1), (2), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $w\,(r)$, $u\,(r)$, ш(r) и $v\,(r)$:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r - a_5v,_r) + 2cK_3^- v,_r = -p\,,\; L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r - a_7v,_r) - 2cG_3\psi = 0\;;$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r - a_8v,_r) = -q\;; \tag{3}$$

$$L_3(a_5u + a_7\psi - a_8w,_r - a_9v,_r) + \frac{2}{3}c^3\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right)\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right) - 2cK_3^+v - 2cK_3^-\left(u,_r + \frac{u}{r}\right) = 0\,.$$

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по следующей за ней координате, коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определяются соотношениями:

$$K_k^+ = K_k + \tfrac{4}{3}G_k\,,\; K_k^- = K_k - \tfrac{2}{3}G_k\,,\; a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_kK_k^+\,,\; a_2 = c(h_1K_1^+ - h_2K_2^+)\,;$$

$$a_3 = h_1\;\; c + \tfrac{1}{2}h_1\;\; K_1^+ - h_2\;\; c + \tfrac{1}{2}h_2\;\; K_2^+,\; a_4 = c^2\;\; h_1K_1^+ + h_2K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\;\;;$$

$$a_5 = c\Big[h_1\;\; c + \tfrac{1}{2}h_1\;\; K_1^+ + h_2\;\; c + \tfrac{1}{2}h_2\;\; K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2K_3^+\Big];$$

$$a_6 = h_1\;\; c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\;\; K_1^+ + h_2\;\; c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\;\; K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3K_3^+, a_7 = c^2\Big[h_1\;\; c + \tfrac{1}{2}h_1\;\; K_1^+ - h_2\;\; c + \tfrac{1}{2}h_2\;\; K_2^+\Big];$$

$$a_8 = c\Big[h_1\;\; c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\;\; K_1^+ - h_2\;\; c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\;\; K_2^+\Big];$$

$$a_9 = c^2\left(h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{5}c^3K_3^+\right);$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}\,,\;\; L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\;\; rL_2(g)\;\;,_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}\,.$$

Краевая задача замыкается добавлением к (3) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w,_r = 0 \text{ при } r = r_0\,.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \text{ при } r = r_0\,.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0,\;\; T_r = M_r = M_r,_r = 0.$$

Решение поставленной краевой задачи в дальнейшем предполагается проводить с помощью программного комплекса Maple либо приближенными методами.

УДК 539.3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. С. ЗЕЛЕНАЯ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В современном строительстве многочисленные наблюдения показывают эффективность использования многослойных конструкций, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций.

В монографии [1] исследованы вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Статья [2] посвящена исследованию статического деформирования трехслойных пластин, связанных с упругим основанием. В статье [3] рассмотрен цилиндрический изгиб трехслойных пластин в температурном поле.

Здесь выполнена постановка задачи о статическом деформировании и получены уравнения равновесия в усилиях физически нелинейной прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Рассматривается изгиб несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. Несущие слои пластины выполнены из упругопластического материала, а заполнитель – нелинейно-упругий. В слоях пластины применяем физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \; 1-\omega^{(k)} \;\; \varepsilon_u^{(k)} \;\; э_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z\,,\; k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $э_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k-м слое; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_т^{(k)}$ следует положить равными нулю, $\varepsilon_т^{(k)}$ – предел текучести материала; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \le \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности заполнителя; G_k сдвиговой модуль упругости материалов, K_k – объемный модуль упругости материалов.

Силовые уравнения равновесия и соответствующие граничные условия не зависят от физических уравнений состояния и были получены ранее [4].

Применим соотношения (1) и выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом «ω») слагаемые:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k э_{ij}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} э_{ij}^{(k)}. \tag{2}$$

Аналогичные операцию проведем с внутренними и обобщенными усилиями, также разбивая на линейные и нелинейные составляющие. Подставив обобщенные усилия в систему уравнений равновесия для упругой пластины и преобразовав, путем переноса нелинейных составляющих в правую часть, получим систему уравнений физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{gathered}
H_{1x}^0 - V_1^0{,}_y - P_{1x}^0{,}_x = p_x + H_{1x}^\omega - V_1^\omega{,}_y - P_{1x}^\omega{,}_x\,, \quad H_{1x}^0 + V_2^0{,}_y + P_{2x}^0{,}_x = H_{1x}^\omega + V_2^\omega{,}_y + P_{2x}^\omega{,}_x\,, \\
H_{1y}^0 - V_1^0{,}_x - P_{1y}^0{,}_y = p_y + H_{1y}^\omega - V_1^\omega{,}_x - P_{1y}^\omega{,}_y\,, \quad H_{1y}^0 + V_2^0{,}_x + P_{2y}^0{,}_y = H_{1y}^\omega + V_2^\omega{,}_x + P_{2y}^\omega{,}_y\,, \\
S_{1x}^0{,}_{xx} + H_2^0 - T_{1x}^0{,}_x - U_1^0{,}_{xy} + S_{1y}^0{,}_{yy} - T_{1y}^0{,}_y = q + \frac{p_x{,}_x h_1}{2} + \frac{p_y{,}_y h_1}{2} + S_{1x}^\omega{,}_{xx} + H_2^\omega - T_{1x}^\omega{,}_x - U_1^\omega{,}_{xy} + S_{1y}^\omega{,}_{yy} - T_{1y}^\omega{,}_y\,, \\
S_{2x}^0{,}_{xx} - H_2^0 - T_{2x}^0{,}_x - U_2^0{,}_{xy} + S_{2y}^0{,}_{yy} - T_{2y}^0{,}_y = S_{2x}^\omega{,}_{xx} - H_2^\omega - T_{2x}^\omega{,}_x - U_2^\omega{,}_{xy} + S_{2y}^\omega{,}_{yy} - T_{2y}^\omega{,}_y\,,
\end{gathered} \tag{3}$$

где H_{kx}, H_{ky}, V_k, P_{kx}, P_{ky}, S_{kx}, S_{ky}, H_k, T_{kx}, T_{ky}, U_k – обобщенные усилия (упругие – с индексом «0», нелинейные – с индексом «ω»).

С силовыми граничными условиями поступим аналогично, т. е. при $x = 0, a$ должны выполняться требования:

$$\begin{gathered}
P_{1x}^0 = N_{px}^{(1)} + P_{1x}^\omega, \quad P_{2x}^0 = N_{px}^{(2)} + P_{2x}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{pxy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{pxy}^{(2)} + V_2^\omega, \\
T_{1x}^0 - S_{1x}^0{,}_x - U_1^0{,}_y = Q_{px}^{(1)} + (T_{1x}^\omega - S_{1x}^\omega{,}_x - U_1^\omega{,}_y)\,, \\
T_{2x}^0 - S_{2x}^0{,}_x - U_2^0{,}_y = Q_{px}^{(1)} + (T_{2\xi}^\omega - S_{2x}^\omega{,}_x - U_2^\omega{,}_y)\,, \quad S_{1x}^0 = M_{px}^{(1)} + S_{1x}^\omega, \quad S_{2x}^0 = M_{px}^{(2)} + S_{2x}^\omega.
\end{gathered}$$

При $y = 0, b$

$$\begin{gathered}
P_{1y}^0 = N_{ly}^{(1)} + P_{1\psi}^\omega, \quad P_{2y}^0 = N_{ly}^{(2)} + P_{2y}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{lxy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{lxy}^{(2)} + V_2^\omega, \\
T_{1y}^0 - S_{1y}^0{,}_y = Q_{ly}^{(1)} + (T_{1y}^\omega - S_{1y}^\omega{,}_y)\,, \quad T_{2y}^0 - S_{2y}^0{,}_y = Q_{ly}^{(2)} + (T_{2y}^\omega - S_{2y}^\omega{,}_y)\,, \\
S_{1y}^0 = M_{ly}^{(1)} + S_{1y}^\omega, \quad S_{2y}^0 = M_{ly}^{(2)} + S_{2y}^\omega, \quad U_1^0 = Q_{lxy}^{(1)} + U_1^\omega, \quad U_2^0 = Q_{lxy}^{(2)} + U_2^\omega.
\end{gathered}$$

Здесь $N^{(1)}_{px}$, $Q^{(1)}_{pxy}$, $Q^{(1)}_{px}$, $M^{(1)}_{px}$, $N^{(1)}_{ly}$, $Q^{(1)}_{lxy}$, $Q^{(1)}_{ly}$, $M^{(1)}_{ly}$ – заданные усилия на торцах пластины в первом несущем слое (с индексом «2» – во втором несущем слое). Индекс p принимает значения $0, a$, индекс $l - 0, b$, указывая, на каком конце пластины задано усилие.

Список литературы

1 **Старовойтов, Э. И**. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 21–28.

3 **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки : Междунар. сб. науч. тр.– Гомель, 2014. − Вып. 8. – С. 179–185.

4 **Зеленая, А. С.** Уравнения равновесия прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Вятичи, 13–17 февр. 2017 г. – М. : ООО «ТР-принт», 2017. – Т. 2. – С. 33–36.

УДК 539.3

ДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ НА КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННУЮ ПЛАСТИНУ

С. И. ИВАНОВ, Н. А. ЛОКТЕВА

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация

В настоящее время наиболее широко в качестве звукоизолирующих преград, сокращающих вредное воздействие транспортных магистралей на окружающую среду и человека, используются пластины, выполненные из однородного материала, которые наиболее просты в изготовлении и экономически оправданны. В работе исследуются звукопоглощающие свойства однородной консольно-закрепленной пластины, на которую воздействует плоская гармоническая звуковая волна. Результатом решения данной задачи является возможность построения зависимости перемещений и параметра звукоизоляции от частоты набегающей волны.

Рассматривается консольно-закрепленная бесконечная в одном направлении пластина высотой l, окруженная акустической средой. Используется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, начало которой помещено в точке крепления пластины. Со стороны отрицательного направления оси Oz на препятствие набегает плоская гармоническая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω. Компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки и параметры акустической среды не зависят от координаты y. В результате ее взаимодействия с оболочкой в акустической среде возбуждается давление с амплитудой p_2. Основной целью является вычисление перемещения w как функции частоты ω и пространственных координат x и z.

Математическая постановка задачи включает в себя задание давления p_*, уравнения для пластины и акустической среды, краевые условия для пластины, условия на бесконечности, а также условия контакта акустической среды с препятствием и неподвижной полуплоскостью $x = 0$. В качестве последних принимаем требование непротекания.

Движение пластины с учетом плоской постановки задачи описывается уравнением

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p, \; D = I(\lambda + 2\mu).$$

где ρ – плотность материала пластины; h – толщина пластины; λ и μ – параметры Ламе; w – нормальные перемещения пластины. Пластина закреплена консольно. Согласно постановке задачи, функции перемещения изменяются по гармоническому закону.

Воздействие плоской гармонической волны на пластину задается следующим образом:

$$p = p_1 - p_2, \; p_1 = p_* + p_{1w}, \; p_* = -i\omega\rho_1 A_\Phi.$$