6 **Zemskov, A. V.** Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences, **203**, Issue 2 (2014) 221.

7 **Hany H. Sherief.** A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion / Hany H. Sherief, Nasser M. El-Maghraby // Int J Thermophys (2009) 30: P. 2044–2057.

8 **Tarlakovskii, D. V**. Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media / D. V. Tarlakovskii, V. A. Vestyak, A. V. Zemskov // Encyclopedia of thermal stress. – Volume 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference. – 2014. – P. 1064–1071.

9 **Давыдов, С. А.** Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии / С. А. Давыдов, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю. В. ЗАХАРЧУК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В последнее время значительно возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении, добыче и транспортировке энергоносителей. Это обусловливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Рассматривается упругая круговая трехслойная пластина со сжимаемым-растягиваемым заполнителем. Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, деформируемость по толщине принимается линейной.

На внешний слой стержня действует симметричная равномерно распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом $h_3=2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

– в несущих слоях *1, 2* –

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z\,(w,_r + v,_r c), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r)c, \quad (c \le z \le c + h_1);$$
$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z\,(w,_r - v,_r c), \quad w^{(2)} = w(r) - v(r)c, \quad (-c - h_2 \le z \le -c);$$

– в заполнителе *3* –

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z\,(w,_r + v,_r z), \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + v(r)z, \quad (-c \le z \le c), \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), применяя соотношения Коши. Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)}\delta_{ij}, \tag{2}$$

где $$s_{ij}^{(k)} = 2G_k э_{ij}^{(k)}; \quad э_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}\delta_{ij}; \quad \sigma^{(k)} = K_k\theta^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)};$$

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}) \quad (i, j = r, \phi, z;\ k = 1, 2, 3).$$

Используя вариационный принцип Лагранжа, соотношения (1), (2), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $w\,(r)$, $u\,(r)$, ш(r) и $v\,(r)$:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r - a_5v,_r) + 2cK_3^- v,_r = -p\,,\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r - a_7v,_r) - 2cG_3\psi = 0\ ;$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r - a_8v,_r) = -q\ ; \tag{3}$$

$$L_3(a_5u + a_7\psi - a_8w,_r - a_9v,_r) + \frac{2}{3}c^3\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right)\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right) - 2cK_3^+v - 2cK_3^-\left(u,_r + \frac{u}{r}\right) = 0\,.$$

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по следующей за ней координате, коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определяются соотношениями:

$$K_k^+ = K_k + \tfrac{4}{3}G_k\,,\ K_k^- = K_k - \tfrac{2}{3}G_k\,,\ a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+\,,\ a_2 = c(h_1K_1^+ - h_2K_2^+)\,;$$

$$a_3 = h_1\ \ c + \tfrac{1}{2}h_1\ \ K_1^+ - h_2\ \ c + \tfrac{1}{2}h_2\ \ K_2^+\,,\ a_4 = c^2\ \ h_1K_1^+ + h_2K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\ \ ;$$

$$a_5 = c\Big[h_1\ \ c + \tfrac{1}{2}h_1\ \ K_1^+ + h_2\ \ c + \tfrac{1}{2}h_2\ \ K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2K_3^+\Big];$$

$$a_6 = h_1\ \ c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\ \ K_1^+ + h_2\ \ c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\ \ K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3K_3^+\,, a_7 = c^2\Big[h_1\ \ c + \tfrac{1}{2}h_1\ \ K_1^+ - h_2\ \ c + \tfrac{1}{2}h_2\ \ K_2^+\Big];$$

$$a_8 = c\Big[h_1\ \ c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\ \ K_1^+ - h_2\ \ c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\ \ K_2^+\Big];$$

$$a_9 = c^2\left(h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{5}c^3K_3^+\right);$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}\,,\ \ L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\ \ rL_2(g)\ \ ,_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}\,.$$

Краевая задача замыкается добавлением к (3) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w,_r = 0 \text{ при } r = r_0\,.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \text{ при } r = r_0\,.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0,\ T_r = M_r = M_r,_r = 0.$$

Решение поставленной краевой задачи в дальнейшем предполагается проводить с помощью программного комплекса Maple либо приближенными методами.

УДК 539.3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. С. ЗЕЛЕНАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В современном строительстве многочисленные наблюдения показывают эффективность использования многослойных конструкций, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций.

В монографии [1] исследованы вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Статья [2] посвящена исследованию статического деформирования трехслойных пластин, связанных с упругим основанием. В статье [3] рассмотрен цилиндрический изгиб трехслойных пластин в температурном поле.