Таблица 1

λ	10	10^2	10^3	10^4
α	1, 257	2,236	3,976	7,071
$M_{ст}$	0,082	0,071	0,031	0,01
$M_{кв}$	0,112	0,06	0,014	0,0033
$M_{дин}$	0,224	0,128	0,034	0,0085
K_1	2,73	1,8	1,09	0,85
K_2	2	2,13	2,43	2,57

Расчеты показывают, что с ростом обобщенной жёсткости системы «балка-основание» наибольшие моменты смещаются из центральной части в концевые четверти балки. Кроме того, чувствительность системы к внезапным преобразованиям граничных условий снижается с повышением обобщенной жесткости.

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ УСЕЧЁННОГО КОНУСА В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А. В. ГУТОВСКИЙ, А. В. ТОЛКАЧЁВ
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Украина

Рассматривается усечённый конечный сферический конус, который занимает область, описываемую в сферической системе координат соотношениями $r_0 < r < R, 0 < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \phi < 2\pi$. Нижнее основание конуса закреплено, верхнее – свободно от напряжений, к боковой поверхности применяется скручивающее усилие, не зависящее от r.

Необходимо определить смещения, которые удовлетворяют краевым условиям и уравнениям равновесия Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta} u_\phi = 0 \quad & r_0 < r < R \\ & 0 < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ u_\phi\big|_{r=r_0} = 0 \quad \left(r\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - u_\phi\right)\Big|_{r=R} = 0 & \\ u_\phi\big|_{\theta=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - ctg\theta u_\phi\right)\Big|_{\theta=\alpha} = \bar{f}(r) & \end{cases} \tag{1}$$

Исходная задача сводится к одномерной путём применения специального интегрального преобразования, выведенного из решения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} v'' + v' - (q^2 - 1/4)v = 0 \quad -\infty < ln\, r_0 = a < t < b = ln\, R < +\infty \\ v|_{t=a} = 0 \quad (v' - v)|_{t=b} = 0 \Leftrightarrow (ln\, v)'|_{t=b} = 1, v \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Собственные функции этой задачи :

$$K(r, q_k) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \begin{cases} \left[\begin{array}{l} sh\left(q_k\, ln\frac{r}{r_0}\right), \ \frac{R}{r_0} > e^{2/3} \\ ln\frac{r}{r_0}, \ \frac{R}{r_0} = e^{2/3} \end{array}\right. & k = 0 \\ -sin\left(q_k\, ln\frac{r}{r_0}\right), k = \overline{1,\infty} & \end{cases} \tag{3}$$

А собственные числа находятся из нелинейных уравнений:

$$q_k:\begin{cases}\left[\begin{array}{c}3\cdot sh\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right)=2q\cdot ch\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right), q>0,\ \frac{R}{r_0}>e^{2/3}\\ 0,\ \frac{R}{r_0}=e^{2/3}\end{array}\right. & \frac{R}{r_0}\geq e^{2/3}, k=0\\ 3\cdot sin\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right)=2q\cdot cos\left(q\,ln\frac{R}{r_0}\right), q>0 & k=\overline{1,\infty}\end{cases} \tag{4}$$

После применения интегрального преобразования, одномерная задача принимает вид

$$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\,\frac{du_{\phi q}}{d\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi q}+(q_k^2-1/4)u_{\phi q}=0 \quad 0<\theta<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ u_{\phi q}\big|_{\theta=0}=0 \quad \left.\left(\frac{du_{\phi q}}{d\theta}-ctg\theta u_{\phi q}\right)\right|_{\theta=\alpha}=f_q\end{cases} \tag{5}$$

Её решением является функция

$$u_{\phi q}=\sin\alpha\, f_q\frac{P_\nu^1(\cos\theta)}{\nu P_{\nu+1}^1(\cos\alpha)-(\nu+2)\cos\alpha\, P_\nu^1(\cos\alpha)}=$$

$$=f_q\sin\theta\ {}_2F_1\left(\nu+2;1-\nu;2:\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\times$$

$$\times\left((\nu+2)\left({}_2F_1\left(\nu+3;-\nu;2:\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)-\cos\alpha\ {}_2F_1\left(\nu+2;1-\nu;2:\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)\right)\right)^{-1}. \tag{6}$$

Было доказано, что особая точка решения $\nu=-2$ не входит в область определения решения. После обратного интегрального преобразования приходим к необходимости подсчёта ряда:

$$u_\phi=\sum_{j=0}^{\infty}u_{\phi q}\cdot\frac{\mathrm{K}(r,q_j)}{||\mathrm{K}(r,q_j)||^2}. \tag{7}$$

Одним из основных результатов решения данной задачи было обнаружение существования особых решений, зависящих от соотношения площади поверхности конуса и его объёма. Эти решения были истолкованы с помощью аппарата дифференциальной геометрии, в частности [4] и [5], как необходимые для сохранения изоморфности деформации.

Список литературы

1 **Попов, Г. Я.** Построение точного решения одной задачи кручения упругого вала переменного поперечного сечения / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2002. – 38, № 8. – С. 83–89.

2 **Попов, Г. Я.** О расширении возможностей метода интегральных преобразований при решении задач механики / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 1980. – 44, № 1. – С. 130–142.

3 **Попов, Г. Я.** Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усечённого кругового полого конуса / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, № 3. – С. 431–433.

4 **Погорелов А. И.** Дифференциальная геометрия / А. И. Погорелов. – 6-е изд. – М. : Наука, 1974.

5 **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – 3-е изд. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1950.

УДК 539.3, 539.8

МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИИ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ И ДИФФУЗИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. А. ДАВЫДОВ, А. В. ЗЕМСКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

Рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для однородного N-компонентного слоя, ограниченного поверхностями $x_1=0$ и $x_1=L$ ($Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат), с учётом ненулевых времён релаксации. Одномерные физико-