в направлении координатных осей (линий главных кривизн оболочки) $x_1 \equiv \varphi$ и $x_2 \equiv x$ (в окружном и продольном направлениях соответственно); $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб; $\psi_1^{(k)}(x_1, x_2, t)$ и $\psi_2^{(k)}(x_1, x_2, t)$ – углы поворота прямолинейного элемента k-го слоя в координатных плоскостях x_1Oz и x_2Oz; $[\tilde{L}] = [\tilde{l}_{ij}]$ ($i, j = 1, ..., 9$) – квадратная матрица, элементами которой являются линейные дифференциальные операторы по координатам x_1 и x_2 с постоянными комплексными коэффициентами; $\{F\}$ – вектор нагрузок.

Рассмотрена модельная задача: воздействие мгновенного импульса $q_n(x_1, x_2, t) = \delta(t) q(x_1, x_2)$, $q(x_1, x_2) = \text{const}$ на верхний несущий слой оболочки. Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Решение сформулированной начально-краевой задачи построено на основе комбинации методов: комплексных амплитуд, Фурье и преобразования Лапласа по времени. Решение начально-краевой задачи строим в перемещениях, представляя компоненты вектор-функции $\{U\}$ в следующем виде:

$$u = \sum_{m,n} \tilde{U}_{mn}(t) \cos(m\phi) \sin \hat{n}x \;; \quad v = \sum_{m,n} \tilde{V}_{mn}(t) \sin(m\varphi) \cos(\hat{n}x)\,; \tag{1}$$

$$w = \sum_{m,n} \tilde{W}_{mn}(t) \sin(m\varphi) \sin \hat{n}x \quad (k = 1, 2, 3)\,;$$

$$\psi_1^{(k)} = \sum_{m,n} \tilde{\Psi}_{1\,mn}^{(k)}(t) \cos(m\varphi) \sin \hat{n}x \;; \quad \psi_2^{(k)} = \sum_{m,n} \tilde{\Psi}_{2\,mn}^{(k)}(t) \sin(\hat{m}\varphi) \cos \hat{n}x \;,$$

где $m = 1, 2, \ldots \infty$; $\hat{n} = n\pi / L$; $n = 1, 2, \ldots \infty$; $\tilde{U}_{mn}(t)$, $\tilde{V}_{mn}(t)$, $\tilde{W}_{mn}(t)$, $\tilde{\Psi}_{1mn}^{(k)}(t), \tilde{\Psi}_{2mn}^{(k)}(t)$ – искомые комплексные функции действительной переменной t.

Однородные граничные условия свободного опирания кромок оболочки на жесткие неподвижные опоры при $x = 0; x = L$ (L – длина оболочки) можно представить так:

$$u_{,1} = v_{,2} = w = \psi_1^{(k)}{}_{,1} = \psi_2^{(k)}{}_{,2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3)\,. \tag{2}$$

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Выражения (1) обеспечивают автоматическое выполнение граничных условий (2) на торцах оболочки $x = 0$ и $x = L$.

Сделана оценка влияния демпфирующих свойств материалов слоев на кинематические параметры (перемещения, скорости, ускорения) колебаний оболочки.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

А. Ю. ГЛУХОВ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

В данной работе в рамках трехмерной линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [2] рассмотрены задачи о распространении осесимметричных волн в слоистом несжимаемом композитном материале с начальными напряжениями.

Рассматривается слоистый композитный материал с начальными напряжениями, который состоит из чередующихся слоев двух типов, в каждом из которых материалы и начальные напряженно-деформированные состояния являются одинаковыми для рассматриваемого типа слоев. Материалы слоев – гиперупругие изотропные с произвольной структурой упругих потенциалов, начальное напряженное состояние – однородное.

Рассматриваются два случая контакта между слоями композитного материала: полный (жесткий) контакт и полное проскальзывание (нежесткий контакт).

В соответствии с [1, 3] исследование закономерностей распространения осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями сводится к построению решений дифференциального уравнения 4-го порядка в частных производных при удовлетворении граничных условий на плоскостях раздела слоев и условий периодичности, соответствующих теории Флоке.

Дисперсионное уравнение для полного контакта между слоями композитного материала получено в работе [3], для контакта с проскальзыванием – в работе [1].

Для материала с упругим потенциалом типа Трелоара [2]

$$w^{j} = 2c_{10}^{j} A_{1}^{j}, \tag{1}$$

при начальном состоянии

$$S_{11}^{0\,j} = S_{22}^{0\,j} \neq 0; \quad S_{33}^{0\,j} = 0; \quad \lambda^{j} = \lambda_{1}^{j} = \lambda_{2}^{j}; \quad \lambda_{3}^{j} = \lambda^{j\,-2}, \tag{2}$$

и для соотношений механических характеристик слоев композита

$$c_{10}^{1} / c_{10}^{2} = 5; \quad \rho^{2} / \rho^{1} = 0{,}7. \tag{3}$$

проведены численные исследования влияния начальных напряжений и условий сопряжения слоев композитного материала на фазовую скорость осесимметричных квазипоперечных волн.

В формулах (1)–(3) c_{10}^{j} – упругая постоянная, A_{1}^{j} – алгебраический инвариант, $S_{tt}^{0\,j}$ – компоненты тензора обобщенных напряжений Лагранжа, λ_{t}^{j} – коэффициенты удлинения вдоль соответствующих осей, ρ^{j} – плотность слоев в ненапряженном состоянии.

На рисунке 1 показано сравнение первых пяти мод (0–4) квазипоперечной волны, распространяющейся в слоистом композитном материале при полном контакте слоев и при контакте с проскальзыванием при ненапряженном начальном состоянии. Штриховая линия соответствует полному контакту, а сплошная – контакту с проскальзыванием. Соотношение толщин слоев принято равным единице.

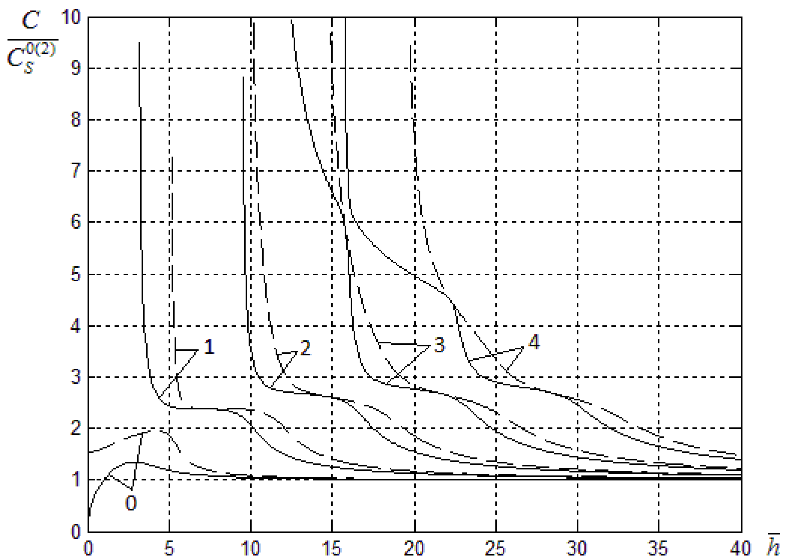

Рисунок 1

На рисунке 1 введены следующие обозначения: $C/C_S^{0(2)}$ – безразмерная скорость распространения волны в слоистом композитном материале, $\bar{h}$ – приведенная частота ($\bar{h} = k_S^{0\,2} h^{2}$), $k_S^{0\,2}$ – волновое число, h^{2} – толщина второго слоя, $C_S^{0(2)}$ – скорость поперечных волн в изотропном материале второго слоя без начальных напряжений.

Анализируя влияние начальных напряжений и условий контакта слоев на фазовую скорость квазипоперечной волны, можно сделать следующие выводы:

– начальные напряжения существенно влияют на фазовые скорости осесимметричных волн в слоистом несжимаемом композитном материале;

– зависимость фазовой скорости от начальных напряжений для каждой моды определяется диапазоном частот;

– значительное влияние начальные напряжения имеют на фазовую скорость зарождающихся волн;

– как правило, начальные напряжения изменяют значения критических частот;

– критические частоты при жестком сцеплении слоев больше, чем при нежестком;

– условие контакта между слоями композитного материала существенно влияет на частоты зарождения волн;

– для разных мод существуют диапазоны частот, при которых влияние условий контакта слоев незначительное;

– для рассмотренных начальных состояний влияние начальных напряжений и условий контакта между слоями больше при растяжении, чем при сжатии.

Список литературы

1 **Глухов, А. Ю.** Вісесиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів / А. Ю. Глухов // Доп. НАН України. – 2016. – № 10. – С. 42–46.

2 **Гузь, А. Н.** Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т. Т. 1. Общие вопросы / А. Н. Гузь. – Киев : Наукова думка, 1986. –374 с.

3 **Гузь, А. Н.** Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т. Т. 2. Закономерности распространения / А. Н. Гузь. – Киев : Наукова думка, 1986. – 536 с.

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Ю. П. ГЛУХОВ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

При решении пространственных задач об установившемся движении многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки с использованием интегрального преобразования Фурье представление решений зависит от корней характеристических уравнений трансформированных дифференциальных уравнений, описывающих движение элементов многослойной среды.

Общая постановка исследуемого класса задач выглядит следующим образом [1, 2].

Рассматривается многослойная плита, лежащая на упругом полупространстве или жестком основании.

Элементы слоистой среды состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных нелинейно-упругих материалов с произвольной формой упругого потенциала. В случае ортотропного тела будем считать, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей выбранной системы координат.

Граничные поверхности элементов многослойной среды плоские и параллельные между собой.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние слоистой среды является однородным.

К свободной границе верхнего слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты, перпендикулярной границам слоев. Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся плоское деформированное состояние.

Также предполагаем, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризированную теорию упругости для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

При таких предположениях имеем задачу об установившемся движении слоистой среды.

Исследования проведены в рамках трехмерной линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [3].