С целью линеаризации поставленной задачи [1] введём малый параметр ε следующим образом:

$$\frac{F\ \ x}{F_0} = 1 + \varepsilon\eta\ \ x\ \ . \tag{5}$$

Искомые перемещения разложим в ряд по малому параметру ε :

$$u\ \ x,t\ \ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ \ x,t\ \ \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n . \tag{6}$$

Подстановка (6) в (2)–(3) приводит к рекуррентной последовательности задач для определения коэффициентов ряда (6):

$$n = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\ \ u_0\big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -P_*\ \ t\ \ ,\ \ u_0\big|_{t=0} = 0,\ \ \frac{\partial u_0}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

$$n > 0$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + p_n\ \ x,t\ \ ,\ \ u_n\big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u_n}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -\eta\ \ l\ \ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\bigg|_{x=l},\ \ u_n\big|_{t=0} = 0,\ \ \frac{\partial u_n}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

где $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $P_*\ \ t\ \ = -\dfrac{P\ \ t}{EF_0}$, $p_n\ \ x,t\ \ = c^2\left[\eta'\ \ x\ \ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \eta\ \ x\ \ \left(\dfrac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2}\right)\right]$.

Для решения этих задач используются граничные и объёмные функции Грина для волнового уравнения движения однородного стержня постоянного поперечного сечения [2, 3].

В обратной задаче полагается, что перемещения конца стержня $u_d\ \ t\ \ = u\ \ l,t$ известны. На практике эта информация может поступать с датчика перемещений, установленного в сечении $x = l$ стержня. Функция $\eta\ \ x$, характеризующая относительной изменение площади поперечного сечения, является искомой. Используя решение прямой задачи, обратная задача сводится к двумерному интегральному уравнению типа Вольтера относительно искомой функции $\eta\ \ x$. Для его решения используется регуляризация А. Н. Тихонова и метод механических квадратур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-38-50034).

Список литературы

1 **Ватульян, А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.

2 Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

3 **Вахтерова, Я. А.** Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко / Я. А. Вахтерова, Е. В., Серпичева, Г. В. Федотенков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 4. – Тула : Изд-во ТудГУ, 2017. – С. 82–92.

УДК: 539.3

ОБ ОДНОЙ СВЯЗАННОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В. А. ВЕСТЯК, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

Московский авиационный институт, НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

Рассматривается нестационарное движение электромагнитоупругой изотропной полуплоскости $z \ge 0$ в декартовой системе координат в предположении, что происходящие процессы являются плоскими. Предполагается, что в начальный момент времени полуплоскость находится в невозмущённом состоянии. На её поверхности заданы перемещения или напряжённость электрического поля. В качестве массовой силы в уравнениях движения выступает сила Лоренца. Совместно с соотношениями на ненулевую компоненту вектора напряжённости магнитного поля, на плотность электрических зарядов вместе с уравнениями Максвелла относительно ненулевых компонент вектора напряженности электрического поля и условиями ограниченности всех функций все упомянутые соотношения образуют начально-краевую задачу. Для ее решения используются преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по координате x, направленной вдоль границы полуплоскости. Показано, что даже для одномерного варианта оригиналы решения этой задачи аналитически найти невозможно. Поэтому используется разложение в степенные ряды по малому параметру, характеризующему связь механических и электромагнитных полей. Подстановка упомянутых рядов в исходную задачу приводит к рекуррентной последовательности краевых задач относительно ограниченных изображений коэффициентов рядов. Решение последней системы на коэффициенты рядов осуществляется поэтапно, записывая неизвестные функции механической и электрической частей в виде свёрток с соответствующими ядрами, которые являются функциями Грина. Функцию Грина электрической части задачи удаётся найти точно с помощью таблиц оригиналов. Построение решения краевых задач механической части задачи достаточно громоздко, но находится с помощью стандартных методов. Основная сложность связана с построением оригиналов. Их нахождение реализовано с помощью совместного обращения преобразования Фурье и Лапласа с использованием специального алгоритма, основанного на нахождении аналитического представления оригинала. Результатом реализации описанного алгоритма является нахождение точного решения рекуррентной системы на коэффициенты степенных рядов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-00788).

УДК 539.21:531.43/.46:539.3

КИНЕМАТИКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УЧЕТЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В МАТЕРИАЛАХ СЛОЕВ

С. А. ВОРОБЬЕВ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Силы внутреннего трения в конструкционных материалах, несмотря на их сравнительно малые величины, могут заметно проявлять себя при динамическом нагружении элементов конструкций и деталей машин.

Выполнена постановка задачи о динамическом нагружении круговой цилиндрической оболочки из изотропных материалов в виде трехслойного пакета. Пакет несимметричен по высоте относительно срединной поверхности жесткого несжимаемого в поперечном направлении заполнителя. На первом этапе постановки задачи материалы слоев считаются линейно упругими. Применив вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, используя кинематические гипотезы С. П. Тимошенко для каждого слоя и условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев, получены уравнения движения оболочки в перемещениях для малых деформаций.

Демпфирующие свойства материалов слоев трехслойной оболочки учитываются на основе концепции комплексного модуля упругости $E_k^* = E_k(a_k + ib_k)$, $G_k^* = G_k(a_k + ib_k)$, где E_k, G_k – модули упругости материала, $a_k = (4-\gamma_k^2)/(4+\gamma_k^2)$, $b_k = 4\gamma_k^2/(4+\gamma_k^2)$, γ_k – коэффициент внутреннего трения материала k-го слоя ($k = 1, 2, 3$), i – мнимая единица. Уравнения движения оболочки в этом случае получаются заменой в уравнениях идеально упругой конструкции модулей упругости E_k, G_k на соответствующие операторы E_k^*, G_k^*:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [\tilde{L}]\{U\} = \{F\},$$

где $[M]$ – матрица масс; $\{U\}^T = \{u, v, w, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}$ – искомая вектор-функция перемещений; $u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t)$ – тангенциальные перемещения точек срединной поверхности заполнителя