УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 11. Гомель, 2018

УДК 531.4

А. И. КОНДРАТЕНКО
Российский государственный аграрный университет – Московская сельскохозяйственная академия им. К. А. Тимирязева, Москва, Россия

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Предложен метод решения задач по теории колебаний механической системы, основанный на кинематической теореме Кориолиса, который позволяет упростить математические преобразования. Рассмотрены примеры применения данного метода к решению конкретных задач.

Ключевые слова: малые колебания, материальная система, теорема Кориолиса.

Введение. При решении задач по теме «Малые колебания механической системы» необходимо выражать деформации через обобщённые координаты. Если деформации в состоянии равновесия равны нулю, это делается просто: проецированием малого перемещения на направление начального положения пружины. В противном случае возникают сложности с выражением удлинения через обобщённые координаты. При этом достаточно эффективным приемом является применение теоремы о сложении ускорений при сложном движении точки. Предложенный метод рассмотрим на примере задачи 54.17 из сборника И. В. Мещерского [1].

Задача. Вертикальный сейсмограф Б. Б. Голицына (рисунок 1) состоит из рамки OAB, на которой укреплён груз веса Q. Рамка может вращаться вокруг горизонтальной оси O. В точке B рамки, отстоящей от O на расстоянии $\boldsymbol{a}$, прикреплена пружина жёсткости c, работающая на растяжение. В положении равновесия стержень OA горизонтален. Момент инерции рамки и груза относительно оси O равен I, высота рамки b. Пренебрегая массой пружины и считая, что центр масс груза и рамки находится в точке A, отстоящей от O на расстоянии l, определить частоту малых колебаний маятника.

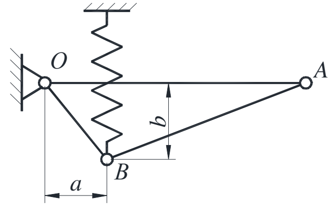

Рисунок 1 – Вертикальный сейсмограф Б. Б. Голицына

Решение. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты выбираем угол отклонения φ рамки от равновесного положения (рисунок 2). Уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Кинетическая энергия $T = I\dot{\varphi}^2 \big/ 2$. Потенциальная энергия

$$\Pi = -Ql\sin\varphi + c\lambda^2/2 = -Ql\sin\varphi + c(s-l_0)^2/2,$$

где l_0 – длина пружины в ненапряжённом состоянии.

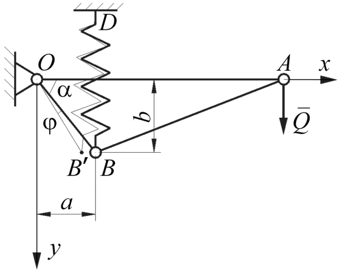

Рисунок 2 – Схема деформирования системы

Координаты точек D и B' будут соответственно равны $x_D = a,\ y_D = b - L$, $x_{B'} = d\cos(\alpha+\varphi)$, $y_{B'} = d\sin(\alpha+\varphi)$, где $d = OB$, $\alpha \leq AOB$. Длина пружины DB' в текущем состоянии

$$s(\varphi)=\sqrt{(d\sin(\alpha+\varphi)+L-b)^2+(d\cos(\alpha+\varphi)-a)^2}.$$

Разложим потенциальную энергию в ряд по степеням φ в окрестности положения равновесия, оставляя члены второго порядка малости

$$\Pi = \Pi(0)+\frac{\partial \Pi(0)}{\partial \varphi}\varphi+\frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial \varphi^2}\frac{\varphi^2}{2}+\ldots=$$

$$=\frac{c\big(s(0)-l_0\big)^2}{2}+\big[c\big(s(0)-l_0\big)s'(0)-Ql\big]\varphi+\frac{c}{2}\Big[\big(s(0)-l_0\big)s''(0)+\big(s'(0)\big)^2\Big]\,\varphi^2.$$

Учтём, что $s(0) = L$. Тогда

$$s'(\varphi) = \left(d\,(L-b)\cos(\alpha+\varphi) + ad\sin(\alpha+\varphi)\right)/\,s\ ,\ \ s'(0) = a.$$

$$s''(\varphi) = \left(ds^2\left(a\cos(\alpha+\varphi) - (L-b)\sin(\alpha+\varphi) - \left(d\cos(\alpha+\varphi)(L-b)\right) + ad\sin(\alpha+\varphi)\right)\right)/\,s^3,$$

$$s''(0) = b(b-L)/\,L\ .$$

Статическое удлинение пружины $\lambda_{ст} = L - l_0$. В положении равновесия: $Ql = ca\lambda_{ст}$.

Потенциальная энергия системы с точностью до малых второго порядка

$$\Pi = \frac{c(L-l_0)^2}{2} + \varphi(ca\lambda_{ст} - Ql) + \frac{c\varphi^2}{2}\left[\frac{b(b-L)}{L}(L-l_0) + a^2\right] + \ldots =$$

$$= \frac{c(L-l_0)^2}{2} + \frac{c\varphi^2}{2}\left[a^2 - b\left(1 - \frac{b}{L}\right)\frac{Ql}{a}\right].$$

Уравнение малых колебаний

$$I\ddot{\varphi} + c\left[a^2 - b\left(1 - \frac{b}{L}\right)\frac{Ql}{a}\right]\varphi = 0.$$

Частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{ca^2 - F_0 b(1 - b/L)}{I}}\ ,$$

где $F_0 = QL/a$ – натяжение пружины в положении равновесия.

Для того чтобы выразить $s'(0)$ и $s''(0)$, теперь применим теоремы о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки [2]. Длина пружины в произвольном положении – это расстояние от взятого на стержне ползуна до шарнира на стержне (рисунок 3), причём закон изменения угла φ может быть произвольным. Возьмём самый простой $\varphi = t$. Тогда $\omega_e = \dot{\varphi} = 1$, $\dot{\varepsilon}_e = \ddot{\varphi} = 0$. По теореме о сложении скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Отсюда

$$v_r = v_a\cos\alpha = \dot{\varphi}d\cos\alpha = \dot{\varphi}a = \dot{s}(0);\ \ v_e = v_a\sin\alpha = \dot{\varphi}d\sin\alpha = \dot{\varphi}b,$$

при $\omega_e = 1$ получаем $s' = \dot{s} = a,\ v_e = b.$

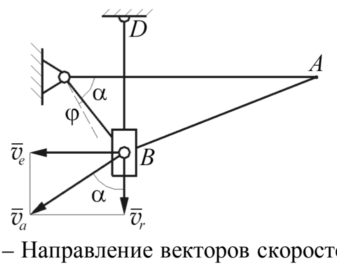

Рисунок 3 – Направление векторов скоростей точки B

По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{cor}\,.$$

Спроецировав эту формулу на направление стержня, имеем (рисунок 4)

$$a \sin\alpha = a_e^n - a_r;$$

$$\ddot{s}(0) = a_r = a_e^n - a\sin\alpha = \frac{v_e^2}{L} - \dot{\varphi}^2 d \sin\alpha,$$

при $\omega_e = 1$ получаем $s'' = \ddot{s} = \dfrac{b(b-L)}{L}$,

что совпадает с полученными ранее формулами для нахождения $s'(0)$ и $s''(0)$.

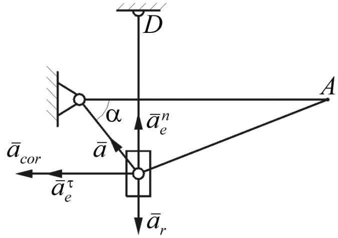

Рисунок 4 – Направление векторов ускорений точки *B*

Дальнейшее решение совпадает с решением, приведённым выше.

Заключение. Таким образом, применение кинематической теоремы Кориолиса позволяет существенно облегчить нахождение деформаций и, следовательно, упростить решение задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 448 с.

2 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Т. 1. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 272 с.

A. I. KONDRATENKO
Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia

KINEMATIC METHOD OF SOLVING PROBLEMS ON THE MECHANICAL SYSTEM VIBRATIONS THEORY

There is proposed a method of solving problems on the theory of mechanical system vibrations based on the Coriolis kinematic theory allowing to simplify the mathematical transformations. The examples of this method application to the specific problems solving are presented.

Получено 31.05.2018