

УДК 620.178

Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ИНДЕНТИРОВАНИЕ ТОНКОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ

Разработана аналитическая математическая модель контактного взаимодействия индентора с тонким покрытием, учитывающая пластическое деформирование и частичное разрушение последнего. Модель позволяет получать расчетные оценки вертикальной силы сопротивления, действующей на индентор со стороны покрытия, и сдвиговой силы, необходимой для горизонтального перемещения индентора при заданном внедрении.

Ключевые слова: контактная задача, сферический индентор, тонкое покрытие, упругопластическое деформирование.

Введение. В различных отраслях промышленности широко используются разнообразные покрытия, наносимые на поверхность деталей машин и элементов конструкций. В зависимости от функционального назначения покрытия выбираются материалы для его изготовления. Так, для повышения прочности изделия используются керамические покрытия [1], для снижения износа на изделия наносят антифрикционные полимерные покрытия [2]. Основным режимом механического нагружения покрытий является контактное взаимодействие с трением. Решению подобных задач для тонких покрытий посвящено множество известных научных работ [3–7]. Вместе с тем до настоящего времени недостаточно полно исследовано контактное нагружение физически нелинейных покрытий. В работах [6, 7] решены задачи о внедрении в упругопластическое покрытие единичного индентора и набора сферических сегментов, моделирующего шероховатую поверхность. Однако при этом не рассматривалось горизонтальное (сдвиговое) смещение инденторов. В настоящее время описание разнонаправленных движений твердого тела, находящегося в контакте с упругопластическим покрытием или полупространством, описывается, главным образом, на основе численных моделей [8, 9]. Наличие же аналитических решений подобных задач позволило бы повысить точность расчетных оценок деформационной составляющей коэффициента трения деталей с покрытиями. Кроме того, данные аналитические решения обеспечивают возможность параметрического анализа процессов механической обработки, необходимого для эффективной оптимизации режимов нагружения обрабатываемого инструмента.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является разработка аналитической методики расчетного определения параметров кон-

тактного взаимодействия с упругопластическим покрытием индентора при внедрении и последующем сдвиговым смещении последнего.

Внедрение индентора. В качестве объекта исследования рассмотрим покрытие толщиной h , свободно лежащее на недеформируемой подложке. Покрытие образовано изотропным материалом, упругое деформирование которого определяется модулем сдвига G_1 и объемным модулем K . В соответствии с критерием пластичности Мизеса [10] пластическое деформирование материала начинается при достижении интенсивностью тензора напряжений σ_u значений предела текучести σ_T . Соответствующее началу пластического деформирования значение ε_{u1} интенсивности тензора деформации ε_u определяется соотношением: $\varepsilon_{u1} = \frac{\sigma_T}{3G_1}$. В рамках настоящей работы будем рас-

сматривать линейно упрочняющийся материал покрытия. При этом зависимость интенсивности тензора напряжений от интенсивности тензора деформаций будет описываться билинейной функцией

$$\sigma_u(\varepsilon_u) = \begin{cases} 3G_1\varepsilon_u, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_{u1}; \\ 3(G_1 - G_2)\varepsilon_{u1} + 3G_2\varepsilon_u, & \varepsilon_{u1} < \varepsilon_u \leq \varepsilon_{u2}; \\ 0, & \varepsilon_{u2} < \varepsilon_u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь G_2 – модуль упрочнения; ε_{u2} – значение интенсивности тензора деформаций, при котором начинается разрушением материала покрытия.

При объемном напряженном состоянии ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma$; $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$) интенсивность тензора напряжений равна нулю и пластическое деформирование не реализуется. Поэтому во всем рассматриваемом диапазоне изменения деформаций зависимость среднего осевого напряжения $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ от объемной деформации $\Delta = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ будем описывать линейно функцией

$$\sigma = K\Delta. \quad (2)$$

В покрытие внедряется абсолютно жесткий гладкий сферический индентор радиуса R . Для описания данного процесса введем цилиндрическую систему координат z, r, φ . Ось z направлена вдоль смещения индентора перпендикулярно поверхности покрытия и проходит через центр области контакта. Вследствие осесимметричности решаемой контактной задачи компонента u_φ смещений точек покрытия будет равна нулю. В рамках настоящей работы будем рассматривать тонкие покрытия, толщина h которых много меньше радиуса a области контакта. В этом случае можно пренебречь изменением с глубиной (зависимостью от координаты z) параметров напряженно-деформированного состояния покрытия (напряжений и деформаций). Также не будем учитывать действующие на поверхности покрытия сдвиговые напряжения. С учетом указанных допущений для рассматриваемой осесиммет-

ричной задачи осевые компоненты тензора деформаций ε_{zz} , ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ будут связаны с компонентами смещения u_r , u_φ следующим образом:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (3)$$

Вертикальное смещение u_z точек покрытия в области контакта уменьшается пропорционально координате z и на границе с подложкой ($z = h$) равно нулю. На поверхности покрытия ($z = 0$) величина u_z определяется формой индентора и вертикальным смещением его центра u_{\max} . Таким образом, зависимость $u_z(z, r)$ описывается функцией

$$u_z = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(u_{\max} - \frac{r^2}{2R}\right). \quad (4)$$

Осевые компоненты тензора напряжения σ_{zz} , σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ должны удовлетворять уравнению равновесия вида

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (5)$$

Вне области контакта материал покрытия деформируется линейно упруго. При этом физические уравнения, устанавливающие связь осевых компонент тензоров напряжений и деформаций, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \left(K + \frac{4}{3}G_1\right)\varepsilon_{zz} + \left(K - \frac{2}{3}G_1\right)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \\ \sigma_{rr} &= \left(K + \frac{4}{3}G_1\right)\varepsilon_{rr} + \left(K - \frac{2}{3}G_1\right)(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \left(K + \frac{4}{3}G_1\right)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \left(K - \frac{2}{3}G_1\right)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив данные соотношения в уравнение равновесия (4), получим

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = -Z_1 \frac{d\varepsilon_{zz}}{dr}. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение $Z_1 = \frac{3K - 2G_1}{3K + 4G_1}$.

Преобразуем левую часть равенства (7)

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) = \frac{d}{dr} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}).$$

Такое преобразование позволяет представить уравнение (7) в виде

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = -Z_1 \varepsilon_{zz} + C. \quad (8)$$

Здесь C – не зависящая от координаты r величина. На бесконечном удалении от области контакта ($r \rightarrow \infty$) в покрытии отсутствуют напряжения и деформации. Данное условие выполняется только при $C = 0$. Используя равенство (8), для компоненты σ_{zz} тензора напряжений получим

$$\sigma_{zz} = \left(K + \frac{4}{3} G_1 \right) \varepsilon_{zz} - \left(K - \frac{2}{3} G_1 \right) Z_1 \varepsilon_{zz} = 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \varepsilon_{zz}.$$

Вне области контакта поверхность покрытия не нагружена $\sigma_{zz} = 0$. Следовательно, и $\varepsilon_{zz} = 0$. При этом уравнение (7) является однородным. Его общее решение имеет вид $u_r = A_1 r + \frac{A_2}{r}$. Отсутствие на бесконечности напряжений и деформаций возможно только при $A_1 = 0$. Таким образом, вне области контакта радиальная компонента смещения точек покрытия определяется соотношением

$$u_r = \frac{A_2}{r}. \quad (9)$$

Константа A_2 определяется из граничных условий.

С учетом выбранной функции $\sigma_u(\varepsilon_u)$ в области контакта можно выделить три подобласти. Внешняя кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов a и r_1 ($r_1 < a$), соответствует линейно упругому деформированию материала. В этой области связь компонент тензоров напряжений и деформаций задается уравнениями (6). Используя соотношения (6) в уравнении (5), с учетом (3) и (4) получим

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = -Z_1 \frac{r}{hR}. \quad (10)$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$u_r = B_1 r + \frac{B_2}{r} - Z_1 \frac{r^3}{8hR}. \quad (11)$$

Константы B_1 и B_2 определяются из граничных условий.

Если упругое деформирование распространяется на всю область контакта ($r_1 = 0$), то для обеспечения ограниченности смещений при $r = 0$ необходимо, чтобы $B_2 = 0$. В этом случае константы B_1 и A_2 определяются из условий неразрывности радиального смещения u_r и радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} на границе области контакта ($r = a = \sqrt{2Ru_{\max}}$). После выполнения необходимых математических преобразований получим

$$A_2 = Z_1 \frac{Ru_{\max}^2}{2h}, \quad B_1 = Z_1 \frac{u_{\max}}{2h}. \quad (12)$$

Таким образом, при отсутствии пластических деформаций распределение контактного давления $p = -\sigma_{zz}$ в области контакта описывается функцией

$$\begin{aligned} p &= \left(K + \frac{4}{3} G_1 \right) \frac{1}{h} \left(u_{\max} - \frac{r^2}{2R} \right) - \left(K - \frac{2}{3} G_1 \right) \left(2B_1 - Z_1 \frac{4r^2}{8hR} \right) = \\ &= 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \left(\frac{u_{\max}}{h} - \frac{r^2}{2hR} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Значение $u_{\max 0}$ смещения центра индентора, соответствующее началу пластического деформирования в центре области контакта ($r = 0$), определяется из условия

$$\varepsilon_{u1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr0} - \varepsilon_{zz0})^2 + (\varepsilon_{rr0} - \varepsilon_{\varphi\varphi0})^2 + (\varepsilon_{zz0} - \varepsilon_{\varphi\varphi0})^2}.$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon_{zz0} = -\frac{u_{\max 0}}{h}$, $\varepsilon_{rr0} = \varepsilon_{\varphi\varphi0} = B_1$. Отсюда

$$u_{\max 0} = \frac{3h\varepsilon_{u1}}{2 + Z_1}. \quad (14)$$

При $u_{\max} > u_{\max 0}$ в области контакта присутствует внутренняя подобласть, ограниченная окружностью радиуса r_1 и соответствующая пластическому деформированию материала. В этом случае константа B_2 в решении (11) не равна нулю. Пластическое деформирование рассматриваемого линейно упругопрочняющегося материала описывается физическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_{zz0} + \left(K + \frac{4}{3} G_2 \right) \varepsilon_{zz} + \left(K - \frac{2}{3} G_2 \right) (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{rr0} + \left(K + \frac{4}{3} G_2 \right) \varepsilon_{rr} + \left(K - \frac{2}{3} G_2 \right) (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi0} + \left(K + \frac{4}{3} G_2 \right) \varepsilon_{\varphi\varphi} + \left(K - \frac{2}{3} G_2 \right) (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь σ_{rr0} , σ_{zz0} , $\sigma_{\varphi\varphi0}$ – независимые от координаты r величины. При этом σ_{rr0} и σ_{zz0} обеспечивают неразрывность соответствующих компонент тензора напряжений при переходе к области пластического деформирования.

Подставив соотношения (15) в уравнение (5) и произведя математические преобразования, получим

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = -Z_2 \frac{r}{hR} - \frac{3}{r(3K + 4G_2)} (\sigma_{rr0} - \sigma_{\varphi\varphi0}). \quad (16)$$

Здесь введено обозначение $Z_2 = \frac{3K - 2G_2}{3K + 4G_2}$. Общее решение дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - Z_2 \frac{r^3}{8hR} - \frac{3(\sigma_{rr0} - \sigma_{\varphi\varphi0})}{2(3K + 4G_2)} r \ln r. \quad (17)$$

Если область пластического деформирования распространяется вплоть до $r = 0$, то требование ограниченности смещений будет выполняться при $C_2 = 0$, а требование ограниченности деформаций и напряжений – при $\sigma_{\varphi\varphi0} = \sigma_{rr0}$. Кроме того, для выполнения соотношения (2) в области пластического деформирования необходимо, чтобы

$$\sigma_{zz0} + \sigma_{rr0} + \sigma_{\varphi\varphi0} = \sigma_{zz0} + 2\sigma_{rr0} = 0. \quad (18)$$

Используя соотношение (18) и условия неразрывности компонент σ_{zz} , σ_{rr} тензора напряжений при переходе от упругой области к области пластического деформирования, можно составить следующее уравнение:

$$3K(B_1 - C_1) - \frac{2}{r_1^2} G_1 B_2 = \frac{r_1^2}{4hR} [3K(Z_1 - Z_2) + G_1 Z_1 - G_2 Z_2]. \quad (19)$$

Условия неразрывности смещения u_r и напряжения σ_{rr} на границе области контакта ($r = a$), условие неразрывности радиального смещения при $r = r_1$ и соотношение (19) позволяют составить систему уравнений для определения констант A_2, B_1, B_2, C_1 . В результате решения данной системы получим

$$\begin{aligned} B_1 &= Z_1 \frac{u_{\max}}{2h}, \quad B_2 = -\frac{r_1^4}{8hR} (Z_1 - Z_2 Z_{12}), \\ C_1 &= \frac{4Z_1 u_{\max} R - r_1^2 (2Z_1 - Z_2 (1 + Z_{12}))}{8hR}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь для краткости записи введено обозначение

$$Z_{12} = \frac{3K + 2G_2}{3K + 2G_1}.$$

В (20) не приведено выражение для A_2 , которое не оказывает влияния на распределение контактного давления.

Значение радиуса r_1 окружности, ограничивающей область упругого деформирования, должно удовлетворять условию

$$\varepsilon_{u1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr1} - \varepsilon_{zz1})^2 + (\varepsilon_{rr1} - \varepsilon_{\varphi\varphi1})^2 + (\varepsilon_{zz1} - \varepsilon_{\varphi\varphi1})^2}. \quad (21)$$

Величины ε_{zz1} , ε_{rr1} , $\varepsilon_{\varphi\varphi1}$ – деформации на границе области упругого деформирования ($r = r_1$), определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz1} &= -\frac{1}{h} \left(u_{\max} - \frac{r_1^2}{2R} \right), \quad \varepsilon_{rr1} = B_1 - \frac{B_2}{r_1^2} - Z_1 \frac{3r_1^2}{8hR}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi1} &= B_1 + \frac{B_2}{r_1^2} - Z_1 \frac{r_1^2}{8hR}. \end{aligned} \quad (22)$$

Произведя подстановку и необходимые математические преобразования, определим радиус r_1

$$r_1 = \sqrt{2R \frac{u_{\max} - \sqrt{Q_2 - Q_1 u_{\max}^2}}{1 + Q_1}}. \quad (23)$$

Здесь введены обозначения

$$Q_1 = 3 \left(\frac{Z_2 Z_{12}}{2(2 + Z_1)} \right)^2, \quad Q_2 = \left(\frac{3\varepsilon_{u1} h}{2 + Z_1} \right)^2 (1 + Q_1).$$

Явный вид констант B_1 , B_2 , C_1 устанавливается путем подстановки (23) в (20). Контактное давление p при наличии области пластичности определяется функцией

$$p = \begin{cases} 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \left(\frac{u_{\max}}{h} - \frac{r^2}{2hR} \right), & r > r_1; \\ 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \left(\frac{u_{\max}}{h} - \frac{r_1^2}{2hR} \right) + 4G_2 \frac{3K + G_2}{3K + 4G_2} \frac{r_1^2 - r^2}{2hR}, & r \leq r_1. \end{cases} \quad (24)$$

При некотором значении $u_{\max 0}^{\text{пл}}$ вертикального смещения центра индентора в центре области пластического деформирования начинается разрушение материала. Значение $u_{\max 0}^{\text{пл}}$ должно удовлетворять условию

$$\varepsilon_{u2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr0}^{\text{пл}} - \varepsilon_{zz0}^{\text{пл}})^2 + (\varepsilon_{zz0}^{\text{пл}} - \varepsilon_{\varphi\varphi0}^{\text{пл}})^2 + (\varepsilon_{rr0}^{\text{пл}} - \varepsilon_{\varphi\varphi0}^{\text{пл}})^2}.$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon_{zz0}^{\text{пл}} = -\frac{u_{\max 0}}{h}$, $\varepsilon_{rr0}^{\text{пл}} = \varepsilon_{\varphi\varphi0}^{\text{пл}} = C_1$. Тогда

$$u_{\max 0}^{\text{пл}} = \frac{1}{H_1} \left(\sqrt{H_2^2 - H_1 H_3} - H_2 \right), \quad (25)$$

где

$$H_1 = \left(\frac{2(2+Z_1)(1+Q_1)}{2Z_1 - Z_1(1+Z_{12})} - 1 \right)^2 + Q_1,$$

$$H_2 = \frac{6\varepsilon_{u2} h(1+Q_1)}{2Z_1 - Z_2(1+Z_{12})} \sqrt{H_1 - Q_1}, \quad H_3 = \frac{H_2^2}{H_1 - Q_1} - Q_2.$$

При $u_{\max} > u_{\max 0}^{\text{пл}}$ в области контакта присутствует центральная круговая подобласть, ограниченная окружностью радиуса r_2 , в пределах которой материал покрытия не оказывает сопротивления деформированию. Если $r_2 > 0$, то константа C_2 в решении (17) отлична от нуля. В соответствии с выбранной функцией $\sigma_u(\varepsilon_u)$ для области разрушения интенсивность тензора напряжений равна нулю. Следовательно, $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma$. Если при разрушении материала контактное давление p равно нулю, то $\sigma = 0$. Соотношение (2) должно выполняться во всем диапазоне деформаций. Значит, объемная деформация Δ также равна нулю. Данное условие можно представить в виде уравнения

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = -\varepsilon_{zz} = \frac{u_{\max}}{h} - \frac{r^2}{2Rh},$$

общее решение которого имеет вид

$$u_r = \frac{D}{r} + \frac{u_{\max} r}{2h} - \frac{r^3}{8Rh}. \quad (26)$$

Область разрушения включает центр области контакта ($r = 0$). Следовательно, константа D в решении (26) равна нулю.

Таким образом, при наличии области разрушения для описания зависимости $u_r(r)$ требуется определить пять констант A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 из решений (9), (11) и (17). Для определения этих констант используются условия неразрывности смещения u_r и напряжения σ_{rr} на границе области контакта ($r = a$), а также – условия неразрывности радиального смещения при переходе от области упругости к области пластического деформирования ($r = r_1$) и при переходе от области пластического деформирования к области разрушения ($r = r_2$). Пятым условием является выполнение соотношений (18) в области пластического деформирования при учете неразрывности напряжений σ_{rr} и σ_{zz} при $r = r_1$. Для ненулевой константы C_2 данное условие сводится к уравнению

$$3K(B_1 - C_1) - \frac{2}{r_1^2} (G_1 B_2 - G_2 C_2) = \frac{r_1^2}{4hR} [3K(Z_1 - Z_2) + G_1 Z_1 - G_2 Z_2]. \quad (27)$$

Производя необходимые математические преобразования, получим следующие выражения для искомым констант

$$B_1 = Z_1 \frac{u_{\max}}{2h}, \quad C_1 = \frac{4(Z_1 - \alpha)u_{\max}R - r_1^2(2Z_1 - Z_2(1 + Z_{12})) - r_2^2\alpha(Z_2 - 1)}{8hR(1 - \alpha)}, \quad (28)$$

$$C_2 = r_2^2 \left(\frac{u_{\max}}{2h} - C_1 + \frac{r_2^2}{8hR} (Z_2 - 1) \right), \quad B_2 = C_2 Z_{12} - \frac{r_1^4}{8hR} (Z_1 - Z_2 Z_{12}).$$

Здесь введено обозначение

$$\alpha = 2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{G_1 - G_2}{3K + 2G_1}.$$

Значение радиуса r_1 определяется из условия (27) с учетом (28). Значение радиуса r_2 удовлетворяет условию

$$\varepsilon_{u2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr2} - \varepsilon_{zz2})^2 + (\varepsilon_{rr2} - \varepsilon_{\varphi\varphi2})^2 + (\varepsilon_{zz2} - \varepsilon_{\varphi\varphi2})^2}, \quad (29)$$

где

$$\varepsilon_{zz2} = -\frac{1}{h} \left(u_{\max} - \frac{r_2^2}{2R} \right), \quad \varepsilon_{rr2} = C_1 - \frac{C_2}{r_2^2} - Z_2 \frac{3r_2^2}{8hR}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} - Z_2 \frac{r_2^2}{8hR}.$$

Итоговые выражения для радиусов r_1 , r_2 и констант B_1 , B_2 , C_1 , C_2 здесь не приводятся в силу их громоздкости. Распределение контактного давления при наличии в области контакта трех подобластей описывается функцией

$$p = \begin{cases} 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \left(\frac{u_{\max}}{h} - \frac{r^2}{2hR} \right), & r > r_1; \\ 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \left(\frac{u_{\max}}{h} - \frac{r_1^2}{2hR} \right) + 4G_2 \frac{3K + G_2}{3K + 4G_2} \frac{r_1^2 - r^2}{2hR}, & r_2 < r \leq r_1; \\ 0, & r \leq r_2. \end{cases} \quad (31)$$

Таким образом, при $u_{\max} < u_{\max 0}$ контактное давление определяется равенством (13), при $u_{\max 0} < u_{\max} < u_{\max 0}^{\text{пл}}$ – функцией (24), а при $u_{\max} > u_{\max 0}^{\text{пл}}$ – соотношением (31).

Горизонтальное перемещение индентора. Рассмотрим поступательное горизонтальное перемещение индентора при фиксированном вертикальном

смещении u_{\max} под действием некоторой сдвиговой силы F . Для описания этого перемещения перейдем к декартовой системе координат xuz , ось z которой совпадает с соответствующей осью ранее использованной цилиндрической системы. Область контакта лежит в плоскости xu . При горизонтальном перемещении индентора его точки движутся прямолинейно равномерно параллельно оси x . В дальнейшем будем использовать подвижную декартову систему координат, начало которой связано с точкой области контакта, лежащей на одной вертикали с центром индентора. В данной системе координат сохраняется осесимметричность вертикальных смещений u_z точек области контакта. Выражение (4) можно переписать в виде

$$u_z = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(u_{\max} - \frac{x^2 + y^2}{2R}\right). \quad (32)$$

Если в неподвижной системе координат x -овая координата некоторой точки поверхности покрытия равна x_0 , то в подвижной системе координата x данной точки будет зависеть от времени

$$x = x_0 - vt.$$

Здесь v – модуль скорости точек индентора при горизонтальном движении. Тогда для фиксированного значения u_{\max} скорость изменения вертикального смещения u_{z0} точек поверхности покрытия ($z = 0$) будет определяться соотношением

$$v_z = \frac{du_{z0}}{dt} = -\frac{x}{R} \frac{dx}{dt} = \frac{xv}{R}.$$

Следовательно, при $x > 0$ ($v_z > 0$) реализуется нагружение покрытия, а при $x < 0$ ($v_z < 0$) материал покрытия находится в состоянии разгрузки. На этапе нагружения выполняются ранее полученные для контактного давления выражения (13), (24) и (31), в которых требуется использовать замену

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В процессе разгрузки изменение интенсивности тензора напряжений пропорционально изменению интенсивности тензора деформаций. При этом коэффициент пропорциональности равен $3G_1$. Материал, разрушенный на этапе нагружения, не восстанавливается. В связи с вышесказанным при $x < 0$ контактное давление $p_-(x,y)$ определяется следующим образом:

$$p_-(x,y) = \begin{cases} p_+(0,y) - 4G_1 \frac{3K + G_1}{3K + 4G_1} \frac{x^2}{2hR}, & p_+(0,y) > 0; \\ 0, & p_+(0,y) = 0. \end{cases}$$

Здесь p_+ , p_- – контактное давление при $x > 0$ и $x < 0$ соответственно.

Вследствие различного деформационного поведения материала при нагружении и разгрузке область контакта движущегося индентора с покрытием не будет симметрична относительно оси y . По направлению движения ($x > 0$) область контакта ограничена полуокружностью

$$x^2 + y^2 = 2u_{\max}R.$$

Следовательно, положительное значение a_y координаты x , соответствующее границе области контакта, будет зависеть от координаты y

$$a_y = \sqrt{2u_{\max}R - y^2}.$$

Отрицательное значение b_y ($b_y < 0$) координаты x , соответствующее границе области контакта против хода движения, определяется из условия

$$p_-(b_y, y) = 0.$$

Зная распределение контактного давления, можно определить вертикальную силу P сопротивления, действующую на индентор со стороны покрытия, и сдвигающую силу F , необходимую для горизонтального перемещения индентора. Для расчета силы P контактное давление первоначально интегрируется по координате x в пределах от b_y до a_y . Затем полученная функция интегрируется по координате y от $-a$ до a

$$P = \int_{-a}^a \int_{b_y}^{a_y} p(x, y) dx dy.$$

Для определения силы F аналогичные действия производятся с x -овой компонентой контактного давления $p_x = p \cdot x/R$

$$F = \int_{-a}^a \int_{b_y}^{a_y} p(x, y) \frac{x}{R} dx dy.$$

При отсутствии горизонтального перемещения индентора распределение контактного давления является осесимметричным. В этом случае сила сопротивления P вычисляется по формуле

$$P = 2\pi \int_0^a p(r) r dr.$$

Расчетный пример. В качестве примера использования разработанной расчетной методики рассмотрим контактное взаимодействие индентора радиуса $R = 1$ см с покрытием толщиной $h = 2$ мм, образованным карбидом вольфрама. Для данного материала механические характеристики принима-

ют следующие значения [11]: $K = 631,6$ ГПа; $G_1 = 274,8$ ГПа; $G_2 = 5,2$ ГПа; $\varepsilon_{u1} = 0,34$ %; $\varepsilon_{u2} = 0,83$ %.

На рисунке 1 представлены полученные на основе разработанной методики расчетные зависимости силы сопротивления P от вертикального смещения центра индентора u_{\max} . Можно отметить, что на этапе упругопластического деформирования ($u_{\max 0} < u_{\max} < u_{\max 0}^{\text{пл}}$) данная зависимость близка к линейной. При неизменном значении u_{\max} , превышающего $u_{\max 0}$, наличие горизонтального перемещения индентора приводит к снижению значения вертикальной силы сопротивления. Данное явление обусловлено тем, что при том же значении деформации в процессе разгрузки упругопластического материала значение напряжения меньше, чем в процессе предварительного нагружения. Началу разрушения покрытия ($u_{\max} = u_{\max 0}^{\text{пл}}$) соответствует ярко выраженный максимум на диаграмме $P(u_{\max})$. Дальнейшее увеличение смещения u_{\max} сопровождается снижением значения силы сопротивления. Если разрушение материала покрытия не учитывается, то максимум на диаграмме $P(u_{\max})$ также будет присутствовать. В этом случае максимум будет более гладким и соответствовать значениям радиуса r_1 порядка $0,8a$.

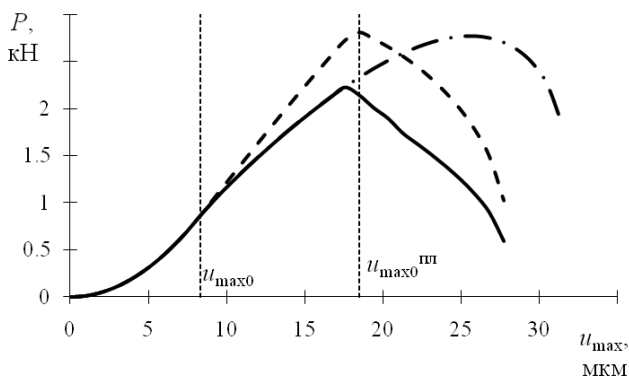


Рисунок 1 – Зависимость вертикальной силы сопротивления от вертикального смещения центра индентора. Сплошная кривая – при наличии горизонтального перемещения с учетом разрушения покрытия; пунктирная – при отсутствии горизонтального перемещения; штрихпунктирная – без учета разрушения материала покрытия

Для описания рассматриваемого процесса контактного взаимодействия введем коэффициент сопротивления f_y , равный отношению сдвиговой силы F к вертикальной P . В рамках настоящей работы решается контактная задача для единичного индентора. При рассмотрении набора сферических сегментов, моделирующих шероховатую поверхность [7], коэффициент f_y совпадает с деформационной компонентой коэффициента трения. Для единичного индентора (рисунок 2) на этапе упругого деформирования коэффициент сопро-

тивления f_y равен нулю. В дальнейшем ($u_{\max} > u_{\max 0}$) зависимость $f_y(u_{\max})$ практически линейна. Начало разрушения покрытия $u_{\max} = u_{\max 0}^{\text{пл}}$ сопровождается скачкообразным возрастанием скорости изменения коэффициента сопротивления.

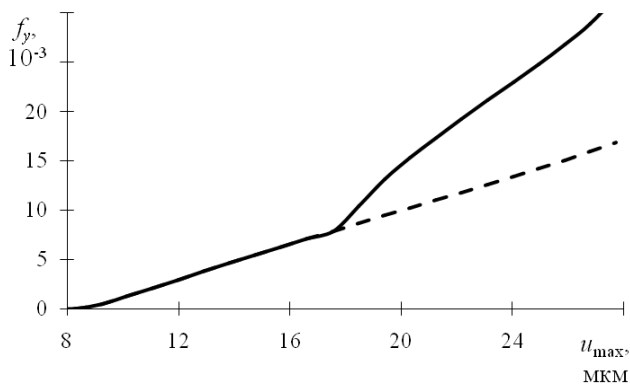


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента сопротивления от вертикального смещения центра индентора. Сплошная кривая – при учете разрушения покрытия; пунктирная – без учета разрушения

Заключение Использование разработанной математической модели взаимодействия индентора с тонким упругопластическим покрытием позволило установить следующее.

1 В области пластических деформаций материала покрытия при наличии горизонтального смещения индентора вертикальная сила, необходимая для заданного внедрения индентора, оказывается ниже, чем при вертикальном внедрении без сдвига.

2 Начало разрушения материала покрытия сопровождается наличием максимума на диаграмме «сила – внедрение» с последующим снижением силы по мере роста внедрения.

3 Коэффициент сопротивления, вводимый как аналог коэффициента трения для единичного гладкого индентора, при наличии пластических деформаций линейно возрастает с увеличением внедрения. Начало разрушения покрытия сопровождается скачкообразным увеличением угла наклона графика данной зависимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Хокинг, М. Металлические и керамические покрытия : пер. с англ. / М. Хокинг, В. Васантасри, П. Сидки. – М. : Мир, 2000. – 516 с.

2 **Рогов, В. Е.** Модифицированные антифрикционные материалы на основе политетрафторэтилена : получение, свойства и применение в машиностроении : дис.... д-ра техн. наук: 05.16.09 / В. Е. Рогов. – Барнаул, 2010. – 297 с.

3 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 271 с.

4 **Можаровский, В. В.** О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости / В. В. Можаровский // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – Т. 3, № 2. – С. 70–79.

5 **Горячева, И. Г.** Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения / И. Г. Горячева, М. М. Губенко, Ю. Ю. Маховская // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 99–107.

6 **Кравчук, А. С.** Упруглопластическое нановнедрение идеальных пирамидальных инденторов в тонкое композиционное покрытие, состоящее из материалов, деформация которых описывается билинейной диаграммой Прандтля / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 4 (25). – С. 46–50.

7 **Огар, П. М.** Контактное взаимодействие жесткой шероховатой поверхности через слой упругопластического покрытия / П. М. Огар, В. А. Тарасов, А. В. Турченко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2012. – № 3 – С. 42–45.

8 **Sahoo, P.** Finite element based elastic-plastic contact behaviour of a sphere against a rigid flat-effect of strain hardening / P. Sahoo, B. Chatterjee, D. Adhikary // International Journal of Engineering and Technology. – 2010. – Vol. 2, No. 1. – P. 1–6.

9 **Кречетов, А. А.** Развитие метода конечных элементов для решения контактной задачи взаимодействия инструмента и обрабатываемой детали / А. А. Кречетов // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2014. – № 3. – С. 82–88.

10 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

11 **Креймер, Г. С.** Прочность твердых сплавов / Г. С. Креймер. – М. : Metallurgia, 1971. – 247 с.

D. A. CHERNOUS

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

INDENTATION OF A THIN ELASTIC-PLASTIC COATING

A contact interaction analytical mathematical model for an indenter and a thin-coating is developed, taking into account the plastic deformation and partial destruction of the coating. The model makes it possible to obtain the calculated estimates of the vertical resistance force acting the indenter from the coating, and the shear force necessary for the horizontal displacement of the indenter for a given indentation.

Получено 01.10.2018