

УДК 539.374

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ²¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь²Институт механики Московского государственного университета, Москва, Россия

УПРУГАЯ ТРЕХСЛОЙНАЯ БАЛКА В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Рассмотрено деформирование трехслойной балки в температурном поле. Аналитический вид нагрузки задавался с помощью функции Хэвисайда. При описании кинематики несимметричного по толщине трехслойного стержня принято, что для тонких несущих слоев справедливы гипотезы Бернулли, а в сжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа заполнителя в тангенциальном направлении. На границе предполагаются кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Изменение температуры учитывалось с помощью формулы, полученной при осреднении теплофизических свойств материалов слоев по толщине стержня. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Получено аналитическое решение задачи и проведен его численный анализ.

Ключевые слова: трехслойная упругая балка, сжимаемый заполнитель, температурное поле, сосредоточенная сила.

Введение. В последнее время значительно возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракетно- и транспортном машиностроении. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей для различных вариантов нагружения.

В монографии [1] рассмотрены кинематические и динамические модели деформирования многослойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их решения. Статьи [2–5] посвящены исследованию свободных и вынужденных колебаний трехслойных стержней и пластин под действием различного рода поверхностных нагрузок. В работах [6, 7] рассмотрены вынужденные колебания трехслойных круговых пластин, связанных с упругим основанием. Монография [8] посвящена исследованию квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций. Отдельные задачи изотермического квазистатического деформирования упругопластических трехслойных элементов конструкций, в том числе связанных с упругим основанием, при однократных и циклических нагрузках решены в статьях [9–13]. Несущая способность кольцевой трехслойной пластины, закрепленной по внутренней внешней кромкам рассмотрена в статье [14]. Постановки и методики решения краев-

вых задач о термосиловом деформировании упругих и физически нелинейных трехслойных стержней, пластин и цилиндрических оболочек приведены в [15–20].

В представленной работе предложена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи об изгибе трехслойного упругого стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым наполнителем сосредоточенной силой в температурном поле. Учет сжимаемости позволяет более адекватно описывать деформирование трехслойных стержней. С математической точки зрения это приводит к усложнению краевой задачи термоупругости, увеличению числа искоемых функций в уравнениях равновесия. Численная апробация решения проведена для случая металлополимерного стержня.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень (рисунок 1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. На стержень действуют поверхностная нагрузка $q(x)$ и тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно несущему слою 1. На торцах стержня для первого и второго несущих слоёв могут быть заданы усилия $N_p^{(1)}, Q_p^{(1)}, M_p^{(1)}, N_p^{(2)}, Q_p^{(2)}$; индекс p принимает значения 0 и l , указывая на соответствующий торец. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв, h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), b_0 – ширина поперечного сечения стержня.

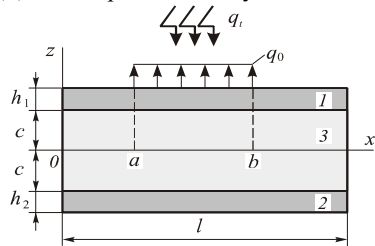


Рисунок 1 – Расчетная схема

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур стержня теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , вычислять по формуле, полученной методом усреднения теплофизических характеристик материалов по толщине пакета пластины [8]

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

$$\tau = \frac{at}{H^2}, \quad a = \sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k / \sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k.$$

где $\lambda_{tk}, C_k, \rho_k$ – теплопроводность, теплоемкость и плотность материала k -го слоя; $H = h_1 + h_2 + 2c$.

Перемещения слоев $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$ – прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев:

– для несущих слоев

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

– для заполнителя

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \quad (2)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций следуют из перемещений (2) и соотношений Коши [8]. Внутренние усилия в слоях определяются соотношениями

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

$$N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \quad (3)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений.

Напряжения и деформации в слоях стержня связаны законом Гука при учете температуры

$$s_i^{(k)} = 2G_k(T) \vartheta_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3(T) \vartheta_{xz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T) (\epsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (i = x, z; k = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где $s_i^{(k)}$, $\vartheta_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_{xz}^{(3)}$, $\vartheta_{xz}^{(3)}$ – тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе; $G_k(T)$, $K_k(T)$ – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования материала k -го слоя, вычисляемые по линейной формуле Белла [8]; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; $T(z)$ – температура в слое с координатой z .

Уравнения равновесия в перемещениях рассматриваемой балки получены вариационным методом Лагранжа. Они представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} = p,$$

$$-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
& \quad + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q - q_i, \\
& -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
& \quad - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = q_i.
\end{aligned} \tag{5}$$

где температурные добавки q_i и коэффициенты a_1, \dots, a_{17} определяются с учетом температуры (1) и температурной зависимости параметров упругости материалов по толщине пакета

$$\begin{aligned}
q_i &= -\frac{H_2'}{b_0} = -\frac{N_z^{(3)l}}{2cb_0}, \quad N_z^{(3)l} = 3b_0\alpha_{03} \int_{h_3} K_3(z)T_3(z)dz, \\
a_1 &= \frac{L_0(G_3)}{4c^2}, \quad a_2 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_3 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_4 &= L_0(K_1^+) + \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \quad a_5 = \frac{L_0(K_3^+)}{4} - \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_6 &= \frac{L_1(K_1^+)}{2} - \frac{L_0(K_1^+)}{2} \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{h_1 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_7 &= \frac{h_2}{8c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \quad a_8 = \frac{L_0(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_9 &= L_0(K_2^+) - \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_{10} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_{11} &= \frac{h_1 L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{h_1 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 \frac{L_0(G_3)}{4} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{12} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + \\
& \quad + \frac{L_1(K_3^-)}{8c^2} (h_1 - h_2) + \frac{L_0(K_3^-)}{8c} (h_1 + h_2) - \frac{L_1(G_3)}{8c^2} (h_1 - h_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= L_2(K_2^+) + L_1(K_2^+) \left(c + \frac{h_2}{2} \right) - \frac{h_2^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_2^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_2^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_{14} &= \frac{h_2 L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{h_2 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{L_0(G_3)}{4} + \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{15} &= L_2(K_1^+) - L_1(K_1^+) \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{h_1^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_{16} &= \frac{h_1 h_2}{16c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \\
a_{17} &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2},
\end{aligned}$$

$$L_n(f_k(z)) \equiv \int_{h_k} f_k(z) z^n dz \quad (n = 0, 1, 2), \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

В качестве граничных принимаем кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в поперечных сечениях $x = 0, l$ (l – длина стержня) выполняются условия

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

Таким образом, краевая задача (5), (6) замкнута.

Общее аналитическое решение. Решение системы дифференциальных уравнений (5) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (6)

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\
w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right),
\end{aligned} \quad (7)$$

где $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$, – искомые амплитуды перемещений.

Поперечная нагрузка и температурные составляющие в слоях стержня также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды

$$\begin{aligned}
q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\
q_t &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{tm} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_{tm} = \frac{2}{l} \int_0^l q_t(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx.
\end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки перемещений (7) и усилий (8) в уравнения равновесия (5) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений U_{1m} , U_{2m} , W_{1m} , W_{2m}

$$\begin{cases} b_1 U_{1m} + b_2 U_{2m} + b_3 W_{1m} + b_4 W_{2m} = p_m, \\ b_2 U_{1m} + b_5 U_{2m} + b_6 W_{1m} - b_7 W_{2m} = 0, \\ b_3 U_{1m} + b_6 U_{2m} + b_8 W_{1m} + b_9 W_{2m} = q_m - q_{im}, \\ b_4 U_{1m} - b_7 U_{2m} + b_9 W_{1m} + b_{10} W_{2m} = q_{im}, \end{cases} \quad (9)$$

где коэффициенты b_i зависят от параметра m и от температуры через коэффициенты a_n , определенные в (5)

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_4 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_3 = a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3; \\ b_4 &= a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3; \quad b_5 = a_1 + a_9 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_6 = -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3; \\ b_7 &= a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3; \quad b_8 = -a_{11} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{15} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8; \\ b_9 &= a_{12} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 - a_{16} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^4 - a_8; \quad b_{10} = -a_{14} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8. \end{aligned}$$

Решение системы (9) можно получить в определителях, либо решать численно. Далее по формулам (7) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (2), деформации – из соотношений Коши, напряжения из закона Гука (4).

Случай сосредоточенной силы. Предварительно рассмотрим деформирование балки под действием поперечной поверхностной нагрузки $q(x)$, равномерно распределенной в интервале $a \leq x \leq b$ (см. рисунок 1). Ее аналитический вид

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x)), \quad (10)$$

где $H_0(x)$ – функция Хэвисайда; q_0 – интенсивность нагрузки.

Коэффициенты разложения нагрузки (10) и температурной составляющей в ряд (7) в соответствии с формулами (8) будут

$$\begin{aligned} q_m &= -\frac{2q_0}{\pi m} \left(\cos \frac{\pi m b}{l} - \cos \frac{\pi m a}{l} \right), \\ q_{im} &= -\frac{3\alpha_{03}}{cl} \int_0^l \int_{h_3} K_3(z) T_3(z) \sin \left(\frac{\pi m x}{l} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив коэффициенты (11) в систему (9), получим в результате ее решения искомые амплитуды перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$.

Для решения задачи изгиба рассматриваемого трехслойного стержня сосредоточенной силой применим результат, полученный для распределенной на интервале $a - c \leq x \leq a + c$ поверхностной нагрузки интенсивности q_0 (рисунок 2).

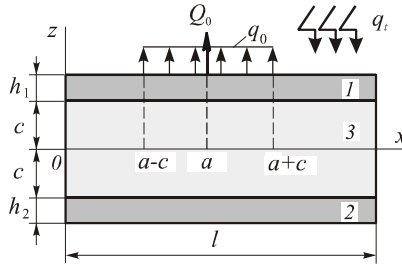


Рисунок 2 – Моделирование приложения сосредоточенной силы

Предположим, что c мало и проведем в коэффициентах (11) замену $q_0 = Q_0 / (2c)$. После этого будем стягивать интервал нагрузки к сечению $x = a$, для чего устремим величину c к нулю, оставляя Q_0 постоянной. После взятия соответствующего предела получим следующие коэффициенты разложения нагрузки в ряд:

$$q_m = \frac{2Q_0}{2c\pi m} \left(\cos \frac{\pi m(a+c)}{l} - \cos \frac{\pi m(a-c)}{l} \right) = \frac{2Q_0}{l} \sin \frac{\pi m a}{l}. \quad (12)$$

Вычислив коэффициенты q_m по приведенной формуле (12), и внося их в систему (10), получим в результате ее решения искомые амплитуды перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$. Полные перемещения после этого вычисляются суммированием рядов (7).

Численные результаты получены для стержня, материалы слоев которого Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, механические характеристики которых приведены в [21]. Толщины слоев принимались равными: $h_1 = 0,04$; $h_2 = 0,02$; $h_3 = 0,18$. Интенсивность теплового потока $q_t = 5000$ Дж / (м²·с), значение сосредоточенной силы $Q_0 = 10^6$ Н.

Рисунок 3 демонстрирует изменение вдоль оси стержня максимальной величины деформации обжатия $\epsilon_{zz} = (w_1 - w_2) / (2c)$, при сосредоточенной силе в поперечном сечении с координатой $x = 0,5$: 1 – изотермическое деформирование, 2 – термосиловое. Максимум обжатия достигается в середине балки, а на опорах оно отсутствует. Скачок посередине стержня обусловлен воздействием локальной силы, направленной вниз. При температурном воздействии в интервале $0,4 < x < 0,6$ обжатие уменьшается, а в остальной части стержня наполнитель растянут.

На рисунке 4 показано изменение прогибов несущих слоев w_1, w_2 посередине стержня ($x = 0,5$) в зависимости от координаты a места приложения сосредоточенной силы Q .

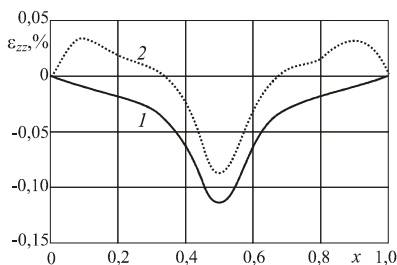


Рисунок 3 – Изменение максимальной величины деформации обжатия вдоль оси стержня

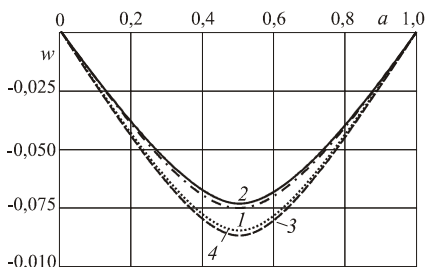


Рисунок 4 – Изменение прогибов несущих слоев посередине стержня

По мере смещения линии действия силы от левого края стержня прогибы возрастают и достигают максимума при $a = 0,5$, затем их величина убывает. Если сила приложена на опорах стержня, то прогибы нулевые. Температура увеличивает максимальные прогибы на 16 %.

Распределение соответствующих нормальных напряжений σ_{xx} вдоль оси стержня на поверхностях первого слоя показано на рисунке 5: 1, 3 – $z = c$ – внутренняя поверхность, 2, 4 – $z = c + h_1$ – внешняя поверхность (3, 4 – с температурой). Значения напряжений в несущих слоях отнесены к интенсивности нагрузки $q_1 = 10^9$ Па, в заполнителе – к $q_3 = 10^8$ Па. Увеличение температуры слоя приводит к его сжатию и увеличению напряжений в 5 раз по модулю.

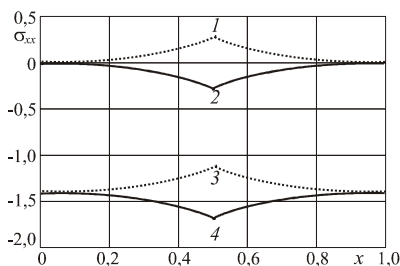


Рисунок 5 – Распределение нормальных напряжений σ_{xx} вдоль оси стержня на поверхностях первого слоя

Заключение. Предложенная методика исследования деформирования трехслойных упругих стержней со сжимаемым заполнителем под действием сосредоточенной силы позволяет учитывать в инженерных расчетах воздей-

ствии теплового потока. Численные расчеты показали существенное влияние температуры на напряжения и перемещения в стержне.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.

2 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of Materials*. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.

3 **Starovoitov, E. I.** Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39, No 12. – P. 1458–1463.

4 **Горшков, А. Г.** Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

5 **Паймушин, В. Н.** Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории / В. Н. Паймушин, В. И. Иванов, В. Р. Хусаинов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2002. – Т. 8, № 4. – С. 543–554.

6 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

7 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика композитных материалов*. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

8 **Плескачевский, Ю. М.** Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. наука, 2004. – 342 с.

9 **Старовойтов, Э. И.** О переменном нагружении вязкопластических трехслойных оболочек / Э. И. Старовойтов // *Вестник Московского университета. Серия 1 : Математика. Механика*. – 1980. – № 2. – С. 92–96.

10 **Москвитин, В. В.** К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

11 **Горшков, А. Г.** Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // *Изв. РАН. МТТ*. – 2001. – № 1. – С. 79–85.

12 **Starovoitov, E. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol. 43, No. 4. – P. 451–459.

13 **Leonenko, D. V.** Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46, No. 2. – P. 291–298.

14 **Джагангиров, А. А.** Несущая способность кольцевой трехслойной волокнистой композитной пластинки, свободно опертой по внутренней и защемленной по внешней кромкам / А. А. Джагангиров // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 35–43.

15 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

16 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

17 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

18 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

19 **Starovoitov, É. I.** Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

20 **Старовойтов, Э. И.** Перемещения в трехслойном стержне со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке / Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 182–191.

21 **Старовойтов, Э. И.** К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // *Пробл. прочности*. – 1988. – № 4. – С. 11–15.

E. I. STAROVOITOV¹, D. V. TARLAKOVSKY²

¹*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

²*Moscow State University named M. V. Lomonosov, Moscow, Russia*

ELASTIC THREE-LAYER BEAM IN A TEMPERATURE FIELD UNDER THE ACTION OF CONCENTRATED FORCES

Deformation of a three-layer beam in a temperature field is considered. The analytical type of load was set using the Heaviside functions. To describe the kinematic properties of the sandwich beam asymmetric in thickness there are accepted the hypotheses of a broken line as follows: Bernoulli's hypothesis is true in the thin bearing layers; Timoshenko's hypothesis is true in the compressible through thickness filler with a linear approximation of displacements through the layer thickness. The filler's work is taken into account in the tangential direction. At the border, the kinematic conditions of the free support of the rod ends on the fixed in space rigid supports are assumed. Temperature variations were calculated by the formula obtained from averaging thermophysical properties of the layers' materials through the beam thickness. A system of differential equilibrium equations was obtained by the variational method. The analytical solution is obtained and its numerical analysis is carried out.

Получено 01.09.2018