

УДК 539.3

Ю. В. ЗАХАРЧУК

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрена задача о симметричном изгибе несимметричной по толщине упруго-пластической круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе учтен поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб изменяются линейно по толщине. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Постановка краевой задачи в перемещениях приведена в цилиндрической системе координат r, φ, z .

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, сжимаемый наполнитель, пластичность.

Введение. При оценке работы несущих слоистых элементов конструкций под воздействием силовых нагрузок возникают специфические проблемы, связанные с определением напряжений и деформаций. В процессе деформирования материалы слоев могут проявлять физически нелинейные свойства, что приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям равновесия, которые не имеют точного аналитического решения. Возникает проблема выбора метода их приближенного решения.

Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач приведены в монографии [1]. Результаты, связанные с колебаниями круговых трехслойных элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [2–6]. Исследования деформирования слоистых упруго-пластических систем при циклических нагружениях содержатся в работах [7–10]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в публикациях [11–16].

Учет сжимаемости наполнителя более адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций. В статьях [17–19] приведены постановка задачи и ее решения об изгибе упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. В представленной работе рассматриваются механико-математическая модель, описывающая равновесие аналогичной упруго-пластической трехслойной пластины.

Постановка краевой задачи. Рассмотрим упругопластическую круговую трехслойную пластину со сжимаемым наполнителем (рисунок 1). Постановку задачи проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z , которую свяжем со срединной плоскостью наполнителя. Для тонких несущих слоев с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается нежимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности своего слоя. В наполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Функция обжатия наполнителя $v(r)$ по его толщине принимается линейной.

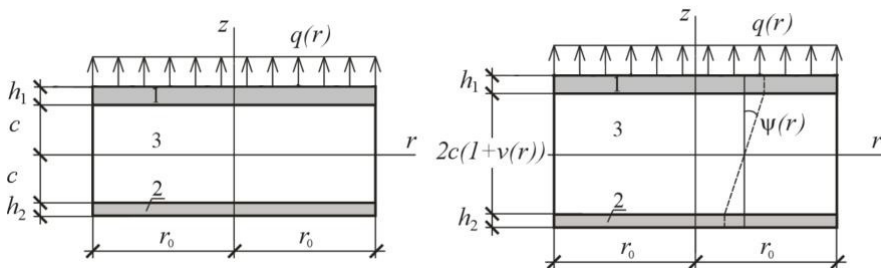


Рисунок 1 – Схема деформирования круговой трехслойной пластины

На внешний слой пластины действует осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию наполнителя ($\psi = 0, v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя. Обозначим через h_k толщину k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные перемещения и поперечные (прогибы) в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r), u(r), \psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

- для несущих слоев 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_r + v_r), \quad w^{(1)}(r, z) = w(r) + v(r), \quad (c \leq z \leq c + h);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_r, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r), \quad (-c - h \leq z \leq -c);$$

- для наполнителя 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z \left[w_r + \frac{v_r}{2c}(z + c) \right], \quad (-c \leq z \leq c); \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности наполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\Psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\Psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\Psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\Psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\Psi_{,r} - z\left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2c}(z+c)\right], \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}\left\{u + z\Psi - z\left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z+c)\right]\right\}, \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\left(w_{,r} + \frac{z+c}{2c}v_{,r} + \Psi - w_{,r} - \frac{z}{c}v_{,r} - \frac{v_{,r}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi - \frac{z}{2c}v_{,r}\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}.\end{aligned}\quad (2)$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}, \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \phi),\end{aligned}\quad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\vartheta_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ($k = 1, 2$) [20], которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}.$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \phi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_k^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_k^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad (4)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k \theta^{(k)} - 2G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.\end{aligned}\quad (5)$$

Выделим в тензоре напряжений (5) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_z^{(3)} &= \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)}, \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.\end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «e») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$\begin{aligned}T_{\alpha}^{(k)} &= T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha}^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi), \\ S_{\alpha}^{(3)} &= S_{\alpha e}^{(3)} - S_{\alpha \omega}^{(3)}, \quad Q_{\alpha}^{(3)} = Q_{\alpha e}^{(3)} - Q_{\alpha \omega}^{(3)}, \\ M_{rz}^{(3)} &= M_{rze}^{(3)} - M_{rz\omega}^{(3)}, \quad T_z^{(3)} = T_{zr}^{(3)} - T_{z\omega}^{(3)},\end{aligned}\quad (7)$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_{\alpha}^{(k)}$, $\sigma_{rz}^{(3)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$, $\sigma_{rze}^{(3)}$, $\sigma_{rz\omega}^{(3)}$ из соотношений (6).

После этого обобщенные внутренние усилия будут

$$\begin{aligned}T_{\alpha} &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha} = M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha} &= H_{\alpha e} - H_{\alpha \omega}, \quad D_{\alpha} = D_{\alpha e} - D_{\alpha \omega}, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}), \\ D_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha e}^{(3)}, \quad D_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha \omega}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha \omega}^{(3)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой упругой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем была получена с помощью принципа Лагранжа в [18] без использования соотношений связи напряжений и деформаций. Поэтому ее можно применить и здесь как исходную

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q. \end{array} \right. \quad (9)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = 0, \\ D_r = D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях уравнений (9), (10) линейные и нелинейные составляющие, в соответствии с формулами (8), перепишем систему в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q + q_\omega, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q + g_\omega. \end{array} \right. \quad (11)$$

Граничные условия следуют из (10)

$$\begin{aligned} T_r = T_r^0 + T_\omega, \quad H_r = H_r^0 + H_\omega, \quad M_r = M_r^0 + M_\omega, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}), \\ D_r = D_r^0 + D_{r\omega}, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) = D_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(D_{r\omega} - D_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (12)$$

где нижний индекс « e » для простоты опущен.

Нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части уравнений (11) и включенные в слагаемые с нижним индексом « ω », будут определяться формулами

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad g_\omega = D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\varphi\omega,r}). \quad (13)$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, приведенными в [18], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (11), приводится к виду

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\Psi - a_3w_{,r} - a_4v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_3\Psi - a_6w_{,r} - a_7v_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3u + a_6\Psi - a_8w_{,r} - a_9v_{,r}) &= -q + q_\omega, \\ L_3(a_4u + a_7\Psi - a_9w_{,r} - a_{10}v_{,r}) + \frac{c}{6}K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q + g_\omega, \quad K_3^- = K_3 - \frac{2}{3}G_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \quad a_4 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+, \\ a_5 &= c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_6 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_7 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right], \\ a_8 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_9 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+, \quad a_{10} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{4}{15} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad L_2(g) = \frac{1}{r}((rg)_{,r})_{,r}, \quad L_3(g) = \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r}. \end{aligned}$$

Здесь, если в системе (14) положить функцию сжимаемости $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с легким несжимаемым наполнителем [1].

Краевая задача замыкается добавлением к системе дифференциальных уравнений (14), силовых (12) или кинематических граничных условий на контуре. Например, при жесткой заделке контура пластины при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = v_{,r} = 0,$$

при шарнирном опирании

$$u = \psi = w = v = w_{,rr} = v_{,rr} = 0.$$

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым легким наполнителем при различных нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Плескачевский, Ю. М.** Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. наука, 2004. – 342 с.
- 2 **Kubenko, V. D.** Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, No. 5. – P. 541–547.
- 3 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.
- 4 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, No. 7. – P. 809–816.
- 5 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // Russian Aeronautics. – 2009. – Vol. 52, No. 2. – P. 151–157.
- 6 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.
- 7 **Старовойтов, Э. И.** О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – № 2. – С. 92–96.
- 8 **Москвитин, В. В.** Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.
- 9 **Москвитин, В. В.** К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

10 **Gorshkov, A. G.** Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // *Mechanics of Solids*. – 2001. – Vol. 36, No. 1. – P. 64–69.

11 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

12 **Starovoitov, É. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol. 43, No. 4. – P. 451–459.

13 **Старовойтов, Э. И.** Уругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

14 **Starovoitov, É. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

15 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

16 **Захарчук, Ю. В.** Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.

17 **Захарчук, Ю. В.** Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.

18 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

19 **Старовойтов, Э. И.** К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // *Пробл. прочности*. – 1988. – № 4. – С. 11–15.

Yu. V. ZAKHARCHUK

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THE EQUILIBRIUM EQUATIONS OF ELASTIC-PLASTIC CIRCULAR PLATES WITH COMPRESSIBLE FILLER

The problem of symmetric bending of an asymmetrical in thickness three-layer elastoplastic plate with a lightweight compressible filler is considered. The Kirchhoff's hypotheses are accepted for the thin bearing layers. In a relatively thick filler, a transverse shear is taken into account, radial displacements and deflection vary linearly along the thickness. The differential equations of equilibrium in the efforts are obtained using the Lagrange variational method. The setting of the boundary value problem in the displacements is given in the r, φ, z cylindrical coordinate system.

Получено 29.09.2018