

УДК 514.85

С. Н. БУРЬЯН

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия***МЕХАНИЗМ ДАРБУ: ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА**

Рассматривается математическое описание механизма Дарбу. Вводится параметризация механизма, доказывается корректность его движения и прямолинейность хода одной из вершин  $H$  при определенном случае движения. Конфигурационное пространство механизма вблизи особого положения представляет собой две гладкие кривые, пересекающиеся под ненулевым углом. Показывается, что при особой конфигурации обратная задача динамики не разрешима при ненулевом ускорении точки  $H$ .

**Ключевые слова:** механизм Дарбу, особая точка.

**Введение.** Механизмам параллельной структуры посвящено множество работ. Краткий обзор «классических» параллельных механизмов можно найти, например, в [1]. Важным вопросом является их компьютерное моделирование, как, например, в [2]. Большое внимание при этом уделяется особым положениям механизма, когда возможны потеря управляемости движением, дополнительные степени подвижности или даже самодвижение (self-motion) [3]. В статье [4] исследуется изменение реакций при движении в сингулярные положения качественными методами. Плоские механизмы могут иметь не только кинематические, но и геометрические особенности, такие как у «парадоксального» механизма Чебышева [5].

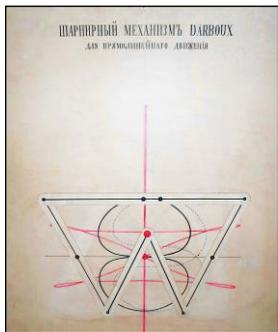


Рисунок 1 – «Шарнирный механизм Darboux» на плакатах О. И. Сомова

В данной работе рассматривается шарнирный механизм Дарбу для прямолинейного движения. Его анализ не удалось найти в литературе, что и послужило поводом для написания статьи. Пожалуй, единственным сохранившимся примером этого механизма является модель на плакатах О. И. Сомова (рисунок 1), которые находятся в музее СПбГУ в здании Двенадцати Коллегий [6].

Для исследования механизма применяются методы аналитической геометрии. Рассматривается движение одной из вершин, положение которой в общем случае неоднозначно. Предыдущие исследования автора по сингулярному маятнику со схожими свойствами можно найти в [7–9]. Рисунки строились в GeoGebra.

**Основная кинематическая цепь.** Рассмотрим механическую систему, расположенную в горизонтальной плоскости (рисунок 2). Зафиксируем по-

ложительное число  $l$ . Пусть вершины  $A$  и  $D$  жестко закреплены,  $|AD| = 2l$ . Стержни  $KB$  и  $CM$  длины  $2l$  каждый могут вращаться вокруг точек  $A$  и  $D$ , которые также являются их серединами. Точки  $B$  и  $C$  соединены стержнем  $BC$  длиной  $2l\sqrt{2}$ . В положении, при котором  $AD$  ортогонально  $KB$ , вершины  $K, B, C$  и  $M$  образуют квадрат, а  $BC$  становится его диагональю (см. рисунок 2). Будем называть такое положение «квадратным».

Введем обозначения для углов отклонения стержней. Для этого рассмотрим прямую  $L_1$ , проходящую через точку  $B$  параллельно  $AD$  и прямую  $L_2$ , проходящую через точку  $D$  ортогонально  $AD$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются в точке  $E$ . Обозначим  $u_1$  (на рисунках  $u$ ) угол  $DAK$ , через  $u_2$  – угол  $EBK$  и через  $u_3$  – угол  $GDC$ , где  $G$  – некоторая точка, лежащая на  $AD$  правее  $D$  (рисунок 3).

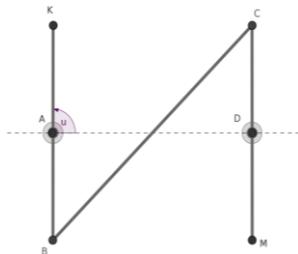


Рисунок 2 – «Квадратное» положение

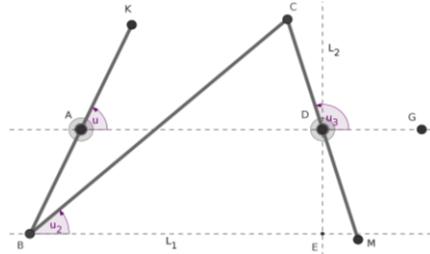


Рисунок 3 – Углы основной кинематической цепи

Введем систему отсчета следующим образом: за начало координат выберем точку  $O$ , ось  $Ox$  совпадает с прямой  $AD$ , а ось  $Oy$  ортогональна  $Ox$ .

Кинематическая связь в векторном виде

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} \equiv (2l, 0) \quad (1)$$

может быть записана также через проекции на координатные оси

$$\begin{aligned} -l \sin(u_1) + \sqrt{2}l \sin(u_2) - l \sin(u_3) &= 0; \\ -l \cos(u_1) + \sqrt{2}l \cos(u_2) - l \cos(u_3) &= 2l. \end{aligned} \quad (2)$$

**Ограниченность изменения углов.** Покажем, что угол  $u_1$  может изменяться только в ограниченных пределах. Для этого рассмотрим некоторое положение механизма и зафиксируем в нем угол  $u_1$ . Тогда в треугольнике  $ABD$  заданы длины всех трех сторон. Так как точки  $A$  и  $D$  фиксированы, то  $ABD$  определен с точностью до симметрии относительно прямой  $AD$ . Длина

$$|BD| = \sqrt{(2l + l \cos(u_1))^2 + (l \sin(u_1))^2} = l\sqrt{5 + 4 \cos(u_1)}. \quad (3)$$

Чтобы для угла  $u_1$  существовала конфигурация  $KBCM$ , необходимо и достаточно, чтобы существовал треугольник  $BDC$ , т. е. между длинами  $|BC|$ ,  $|DC|$  и  $|BD|$  выполнялось неравенство треугольника. «Крайними» будут те значения  $u_1$ , при которых стержни  $BC$  и  $CD$  располагаются в одну линию.

Но  $BC$  и  $CD$  не могут вытянуться в отрезок  $BD$  длиной  $|BC| + |DC|$ : в треугольнике  $ABD$  в этом случае были бы стороны  $|AB| = l$ ,  $|AD| = 2l$ ,  $|BD| = l + 2\sqrt{2}l > l + 2l$  – одна сторона больше суммы двух других.

Из условия  $|BD| \geq |BC| - |CD|$  согласно (3) получаем

$$l\sqrt{5 + 4\cos(u_1)} \geq 2\sqrt{2}l - l. \quad (4)$$

После возведения последнего выражения в квадрат и упрощений имеем

$$\cos(u_1) \geq 1 - \sqrt{2}. \quad (5)$$

При  $u_1 = \pm \arccos(1 - \sqrt{2})$  стержни  $BC$  и  $CM$  располагаются в линию (рисунок 4). Итак, угол  $u_1$  меняется в пределах

$$u_1 \in [-\arccos(1 - \sqrt{2}), \arccos(1 - \sqrt{2})]. \quad (6)$$

Других ограничений на величину угла  $u_1$  нет: при условии (6) длины сторон можно упорядочить:  $|CD| < |BD| < |BC|$ , и неравенство для большей стороны  $|CD| + |BD| \geq |BC|$  выполнено.

Найдем явные выражения для углов  $u_2$  и  $u_3$  как функций от  $u_1$ . Пусть задан угол  $u_1$ , тогда имеем координаты точки  $B(-l\cos(u_1), -l\sin(u_1))$  и положения вершин треугольника  $ABD$  (см. рисунок 5). Обозначим через  $\alpha$  угол  $EBD$  и  $\beta$  – угол  $DBC$ . По теореме косинусов из треугольника  $DBC$  находим

$$\cos\beta = \frac{|BC|^2 + |BD|^2 - |CD|^2}{2|BC||BD|} = \frac{3 + \cos(u_1)}{\sqrt{2}\sqrt{5 + 4\cos(u_1)}}. \quad (7)$$

Угол  $\beta$  равен 0 тогда и только тогда, когда стержни  $BC$  и  $CD$  располагаются вдоль одной прямой. Также  $\beta$  определен с точностью до знака.

Из треугольника  $BDE$  найдем тангенс угла  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(u_1)}{2 + \cos(u_1)}.$$

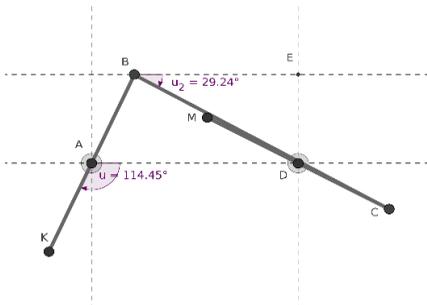


Рисунок 4 – Одно из «крайних» положений основной кинематической цепи

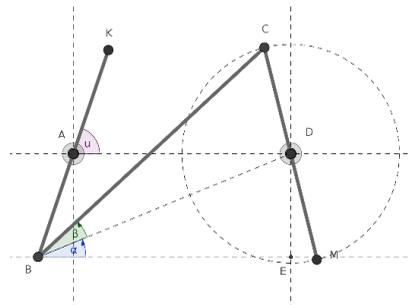


Рисунок 5 – Схема для определения угла  $u_2$

Так как  $\angle EBC = \angle EBD + \angle DBC$ , то

$$u_2 = \arctg \frac{\sin(u_1)}{2 + \cos(u_1)} \pm \arccos \frac{3 + \cos(u_1)}{\sqrt{2}\sqrt{5 + 4\cos(u_1)}}. \quad (8)$$

Перейти от знака «+» к знаку «-» в последней формуле можно только при  $\beta = 0$ . Аналогично можно найти угол  $u_3$ . Для этого рассмотрим точку  $E'(2l, -l)$  и учтем, что  $u_3 = GDC = \frac{3\pi}{2} - E'DB - BDC$ , где  $\frac{3\pi}{2} = GDE'$ . Углы  $E'DB$  и  $BDC$  можно найти из теоремы косинусов. Заметим также, что угол  $E'DB$  заключен внутри отрезка  $(0, \pi)$ , а угол  $BDC$  больше 0.

Таким образом, можно построить явную непрерывную параметризацию  $KBCM$  углом  $u_1$  и эта параметризация *гладкая* внутри интервала (6).

**Корректность движения.** Покажем, что максимум расстояния  $|KM|$  по всем возможным положениям ломаной линии  $KBCM$  достигается при «квадратной» конфигурации. Из уравнения связи (1) получаем

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC},$$

$$|KM|^2 = 4|AD|^2 + |BC|^2 - 4|AD||BC|\cos(AD, BC) = 18l^2 - 8\sqrt{2}l^2 \cos(u_2). \quad (9)$$

Соответственно, максимуму  $|KM|$  отвечает минимум  $\cos(u_2)$ . Кроме того, система (2) инвариантна относительно замены  $(u_1, u_2, u_3)$  на  $(-u_1, -u_2, -u_3)$ , которой геометрически соответствует симметрия ломаной  $KBCM$  относительно прямой  $AD$ . Поэтому достаточно найти наибольшее положительное значение угла  $u_2$ .

Если угол  $u_1$  равен  $\pi/2$ , то угол  $u_2$  равен  $\pi/4$ . Покажем, что угол  $u_2$  не может быть больше  $\pi/4$ . Вначале предположим, что еще при некотором значении  $u_1$  угол  $u_2$  принимает значение  $\pi/4$ . Рассмотрим положения вершин  $A, B, C, D$  при  $u_2 = \pi/4$ . Тогда вектор  $BC$  определен однозначно

$$\overrightarrow{BC} = \left(2\sqrt{2}l \cos(\pi/4), 2\sqrt{2}l \sin(\pi/4)\right) = (2l, 2l). \quad (10)$$

Координаты точки  $C$  находим как векторную сумму  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$x_C = -l \cos(u_1) + 2l, \quad y_C = -l \sin(u_1) + 2l. \quad (11)$$

Посмотрим на ситуацию несколько по-другому: чтобы найти координату точки  $C$ , можно из точки  $P = (2l, 2l)$  выпустить некоторый вектор длиной  $l$ . Из формулы (11) следует, что геометрическое место точек  $C$  – это окружность радиусом  $l$  с центром  $P$  (рисунок 6). Но точка  $C$  также лежит на окружности радиуса  $l$  с центром  $D$  (по условию  $|CD| = l$ ). Две эти окружности имеют только одну общую точку, поскольку расстояние между их центрами равно  $2l$  (сумме радиусов). Эта общая точка  $C' = (2l, l)$  задает треугольник  $ABC'$  по трем сторонам, с точностью до симметрии относительно прямой  $AC'$ . Выбору  $B = (0, -1)$  соответствует  $u_2 = \pi/4$ . При выборе другой точки  $B$

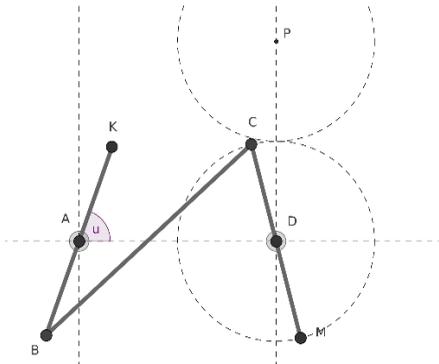


Рисунок 6 – Схема к доказательству  
максимальности  $|KM|$  при  $u_1 = \pi/2$

существовало значение  $u_2$ , большее  $\pi/4$ , то в связи с непрерывностью функции была бы и вторая точка, в которой  $u_2 = \pi/4$  по теореме о промежуточном значении. Получено противоречие.

Значит, именно в положении шарнира, представленном на рисунке 2, достигается глобальный максимум величины  $|KM|$ . При этом  $u_2 = \pi/4$  есть глобальный максимум, а  $u_2 = -\pi/4$  (симметрично) есть глобальный минимум.

Рассмотрим теперь следующую конструкцию. Поскольку максимум  $|KM|$  равняется  $2\sqrt{2}l$ , то к системе  $KBCM$  можно добавить еще два стержня  $KH$  и  $MH$  длины  $\sqrt{2}l$ . Теперь мы получили механизм Дарбу (рисунок 1). Заметим, что при значениях  $u_1$ , лежащих внутри отрезка (6), одному и тому же углу соответствуют два положения точки  $H$ , симметричные относительно прямой  $KM$  (рисунок 7). Геометрически это значит, что через «квадратное» положение проходят две линии

$$(x_K(u_1), y_K(u_1); x_B(u_1), y_B(u_1); x_C(u_1), y_C(u_1); x_M(u_1), y_M(u_1); x_H(u_1), y_H(u_1)), \quad (12)$$

которые различаются координатами точки  $H$ .

**Прямолинейность хода точки  $H$ .** Докажем, что при расположении точки  $H$ , соответствующем рисунку 7, а, траектория ее движения лежит на прямой линии  $L = \{(l, h) \in \mathbb{R}^2 \mid h \in \mathbb{R}\}$ , где  $h$  – вещественное число. Заметим, что вершина  $H$  может совершать и криволинейное движение (см. рисунок 7, б). Зафиксируем некую точку на прямой  $L$  и назовем ее  $H$ . Теперь на время «забудем» о том, что мы говорим про механизм Дарбу.

Рассмотрим окружность  $\omega_1$  радиусом  $l\sqrt{2}$  с центром в точке  $H(l, h)$ , окружность  $\omega_2$  радиусом  $l$  с центром  $A(0, 0)$  и окружность  $\omega_3$  радиусом  $l$  с центром  $D(2l, 0)$  (рисунок 8). Обозначим точку  $S(l, 0)$ . Обозначим точки пересечения окружности  $\omega_1$  с окружностями  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – точки  $K$  и  $M$  соответственно. Причем выберем пару точек  $K, M$  так, что они не симметричны относительно прямой  $L$ .

прямой подсчет говорит, что  $u_2 \approx 8^\circ$ , что явно не является максимумом. Значит, при  $u_1 = \pi/2$  достигается максимум расстояния  $|KM|$ . Симметрично при  $u_1 = -\pi/2$ .

Итак, обобщим полученное: угол  $u_1$  лежит в диапазоне (6), а угол  $u_2$  как функция от  $u_1$  достигает значения  $\pi/4$  только при одном положении линии  $KBCM$ . Можно показать, что на границах интервала (6)  $u_2$  принимает значения, меньшие  $\pi/4$  (рисунок 4). Угол  $u_2$  непрерывно зависит от  $u_1$  согласно (8). Если бы

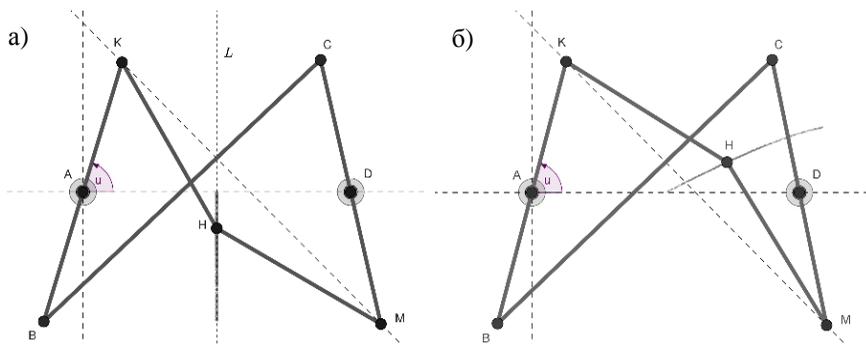


Рисунок 7 – Два положения механизма Дарбу, отвечающие одному и тому же значению  $u_1$

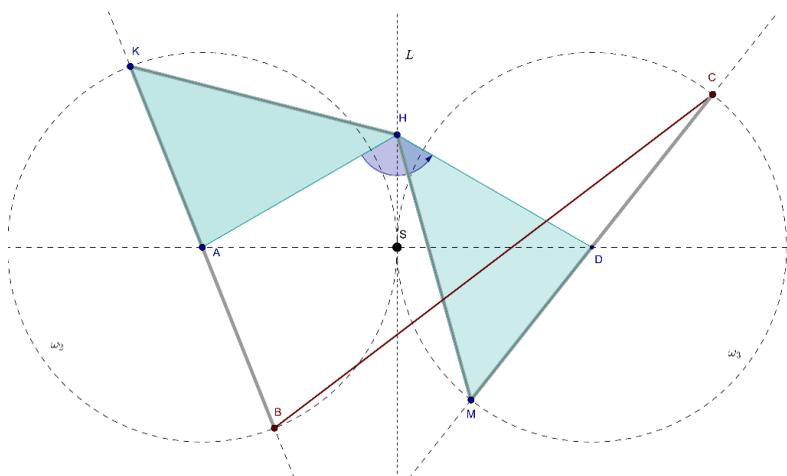


Рисунок 8 – К доказательству прямолинейности хода точки  $H$

Заметим, что треугольники  $HKA$  и  $HMD$  равны по трем сторонам, поскольку  $|AH|^2 = |DH|^2 = l^2 + h^2$ . Более того, треугольник  $HMD$  может быть получен из треугольника  $HKA$  поворотом вокруг точки  $H$  на угол  $\psi = \angle AHD$ . Следовательно, и угол  $\angle KHM = \psi$ . Также при повороте на угол  $\psi$  окружность  $\omega_2$  переходит в  $\omega_3$ .

Пусть луч  $KA$  пересекает  $\omega_2$  в точке  $B$ , а луч  $MD$  пересекает  $\omega_3$  в точке  $C$ . Треугольники  $HKB$  и  $HMC$  равны по двум сторонам и углу между ними (углы при вершинах  $K$  и  $M$ , и  $|KB| = |MC| = 2l$ ,  $|KH| = |MH| = l$ ). Треугольник  $HMC$  получается из треугольника  $HKB$  поворотом на угол  $\angle KHM = \psi$ , поэтому угол  $\angle BHC = \psi$ . Найдем зависимость длины  $|BC|$  от величины  $h$ .

Из треугольника  $BHC$

$$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2 - 2|BH||HC|\cos\psi = 2|BH|^2(1 - \cos\psi). \quad (13)$$

Учитывая, что  $|AH|^2 = |DH|^2 = l^2 + h^2$ , углы  $BHC$  и  $AHD$  равны  $\psi$ , имеем

$$\cos\psi = \frac{(l^2 + h^2) + (l^2 + h^2) - 4l^2}{2(l^2 + h^2)} = \frac{h^2 - l^2}{h^2 + l^2}. \quad (14)$$

Соответственно,

$$1 - \cos\psi = \frac{2l^2}{h^2 + l^2}. \quad (15)$$

В треугольнике  $AKH$   $|AK| = l$ ,  $|KH| = \sqrt{2}l$ ,  $|AH| = \sqrt{l^2 + h^2}$ , и тогда оказывается, что

$$\cos(\angle HKA) = \frac{l^2 + 2l^2 - (l^2 + h^2)}{2l\sqrt{2}l} = \frac{2l^2 - h^2}{2l^2\sqrt{2}}. \quad (16)$$

Величина  $|BH|$  удовлетворяет соотношению

$$|BH|^2 = |KB|^2 + |KH|^2 - 2|BH||KH|\cos(\angle HKA) = 2l^2 + 2h^2. \quad (17)$$

Подставляя выражения (15) и (17) в формулу (13), находим

$$|BC|^2 = \frac{2(2l^2 + 2h^2)2l^2}{h^2 + l^2} \equiv 8l^2. \quad (18)$$

**Вывод.** При движении точки  $H$  по прямой  $L$  величина  $|BC|$  остается такой же, какой она должна быть в механизме Дарбу, а это означает, что движению точки  $H$  по прямой  $L$  соответствует движение механизма Дарбу.

**Движение точки  $H$ .** Будем рассматривать положения механизма Дарбу, соответствующие  $u_1 \approx \pi/2$  (рисунок 9). Поскольку при  $u_1 \neq \pi/2$  длина  $|KM| < 2l\sqrt{2}$ , то положение точки  $H$  можно найти как

$$\vec{AH} = \vec{AK} + \frac{1}{2}\vec{KM} \pm h\vec{n}, \quad (19)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, ортогональный вектору  $KM$ , который равен

$$\vec{n} = \left( -\frac{y_M - y_K}{|KM|}, \frac{x_M - x_K}{|KM|} \right). \quad (20)$$

Поскольку  $|KM| > \varepsilon > 0$ , то  $\vec{n}$  гладко зависит от  $u_1$ . Поэтому, если продифференцировать (19) по  $u_1$ , то получим

$$\vec{AH}' = \vec{AK}' + \frac{1}{2}\vec{KM}' \pm (h'\vec{n} + h\vec{n}'). \quad (21)$$

При  $u_1 = \pi/2$  расстояние  $h = 0$ , поэтому выражения (21), соответствующие разным знакам в (19), отличаются только слагаемым  $h'\vec{n}$ . Из формулы

$$h = \sqrt{2l^2 - \frac{1}{4}|KM|^2} \quad (22)$$

получим предел производной при  $u_1 = \pi/2$ . Поскольку  $|KM'|(\pi/2) = 0$ , и можно показать (например, численно), что  $|KM|''(\pi/2) < 0$ , то разложив функцию  $|KM|(u_1)$  по лемме Адамара в окрестности  $u_1 \approx \pi/2$ , находим

$$|KM|(u_1) = 2l\sqrt{2} + \left(u_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 g(u_1), \quad (23)$$

где  $g(u_1)$  – гладкая функция,  $g(\pi/2) = |KM|''(\pi/2) < 0$ , и, подставив это выражение в (21), находим, что производные вектора  $\overrightarrow{AH}$  различны при разном выборе знака перед  $h\vec{n}$ . Такой результат приводит к тому, что точка  $H$  не переходит с одной полуплоскости относительно подвижной прямой  $KM$  в другую при движении механизма Дарбу, а полученные траектории соединяются под углом в точке  $(h, 0)$ , как показано на рисунке 10. Из него можно также заметить, что гладким является такое движение точки, для которого при прохождении «квадратного» положения параметр  $h$  меняет свой знак. Это следует из дифференцирования формулы (22) и подстановки (23):

$$h' = \frac{-\frac{1}{4}|KM||KM|'}{\sqrt{2l^2 - \frac{1}{4}|KM|^2}} = A(u_1) \frac{u_1 - \frac{\pi}{2}}{\left|u_1 - \frac{\pi}{2}\right| \sqrt{-g(u_1)}}, \quad (24)$$

где  $A(u_1)$  – гладкая функция, такая что  $A(\pi/2) \neq 0$ ;  $\sqrt{-g(u_1)}$  – гладкая функция, поскольку  $g(\pi/2) \neq 0$ . Но при  $u_1 = \frac{\pi}{2} +$  и  $u_1 = \frac{\pi}{2} -$  модуль в выражении (24) раскрывается с разным знаком, поэтому имеет место скачок производ-

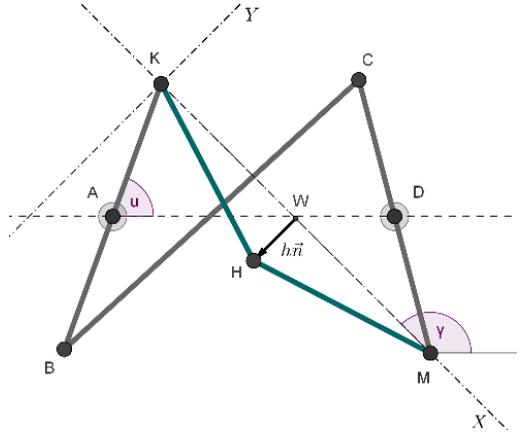


Рисунок 9 – Построения для анализа движения точки  $H$ .  $W$  – середина отрезка  $KM$

ной. Выражение для производной  $h'$  при  $h > 0$ ,  $u_1 > \pi/2$  полностью совпадает с  $h'$  при  $h < 0$ ,  $u_1 < \pi/2$ . Действительно,

$$A(u_1) \frac{u_1 - \pi/2}{(u_1 - \pi/2)\sqrt{-g(u_1)}} = -A(u_1) \frac{u_1 - \pi/2}{-(u_1 - \pi/2)\sqrt{-g(u_1)}}. \quad (25)$$

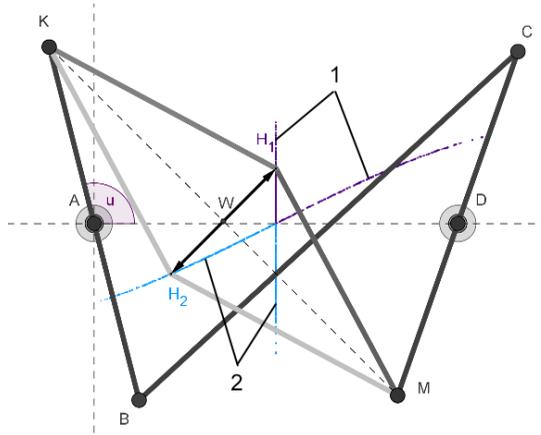


Рисунок 10 – Траектории точки  $H$  при  $u_1 \approx \pi/2$ : две кривые, пересекающиеся под углом в точке  $(h, 0)$ . Линии 1 и 2 соответствуют смещениям точки  $H$  по разные стороны от подвижной прямой  $KM$

Рассмотрим такую модель: в шарнирах  $K$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  и  $H$  находятся точечные массы, стержни предполагаются невесомыми и нерастяжимыми, сила трения и внешние силы не учитываются. Пусть точка  $H$  движется вдоль прямой  $L$ . Тогда ее скорость и ускорение направлены в точности вдоль этой прямой. Определим предел ускорений при  $u_1 \rightarrow \pi/2$ .

С одной стороны, при  $u_1 = \pi/2$  силы реакции со стороны стержней  $KH$  и  $HM$  направлены вдоль одной прямой  $KM$ . С другой стороны, ускорение точки  $H$ , если оно не равно 0, направлено вдоль прямой  $L$ . Но прямые  $L$  и  $KM$  различны, поэтому мы не сможем решить систему  $\vec{w}_H = \Lambda_1 \vec{R}_{KH} + \Lambda_2 \vec{R}_{MH}$  для нахождения ускорения  $\vec{w}_H$  точки  $H$ , так как векторы слева и справа не коллинеарны (здесь  $\vec{R}_{KH}$  и  $\vec{R}_{MH}$  – реакции, действующие на точку  $H$  со стороны стержней  $KH$  и  $MH$  соответственно).

**Заключение.** С помощью приведенных вычислений можно построить численные модели механизма Дарбу как системы материальных точек или твердых тел (стержней). Интерес представляет прохождение «квадратного» положения, а именно: останется ли точка  $H$  по ту же сторону от прямой  $KM$ ,

что была раньше, или же пройдет особое положение, продолжив движение по гладкой кривой? Также интересно было бы узнать, можно ли управлять движением всех вершин механизма вблизи «квадратной» конфигурации.

*Автор благодарит за помощь в подготовке статьи канд. физ.-мат. наук, доцента Санкт-Петербургского государственного университета Кальницкого В. С.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Обзор механизмов с параллельной кинематикой / З. Р. Богус [и др.] // Научные труды КубГТУ. – 2016. – № 10. – С. 86–97.

2 **Доронин, Ф. А.** Кинематика плоского манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы в среде MathCAD / Ф. А. Доронин // Теория механизмов и машин. – 2016. – № 29. – С. 6–20.

3 **Zlatanov, D.** Constraint Singularities of Parallel Mechanisms / D. Zlatanov, I. A. Bonev, C. M. Gosselin // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002). – Washington, D. C., USA, – May 11–15, 2002.

4 **Bandyopadhyay, S.** Analysis of configuration space singularities of closed-loop mechanisms and parallel manipulators / S. Bandyopadhyay, A. Ghosal // Mechanism and Machine Theory. – 2004. – № 39. – С. 519–544.

5 **Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева** / П. Л. Чебышев // Собр. соч. : в 4 т. – Академия наук Союза ССР. – 1944–1951. Т. IV : Теория механизмов. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1948. – 255 с.

6 Очерки по истории механики и физики : учеб. пособие для вузов / И. Е. Лопатухина [и др.]. – СПб. : ВВМ, 2016. – 197 с.

7 **Бурьян, С. Н.** Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством / С. Н. Бурьян // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4 (62). Вып. 4. – С. 541–551.

8 **Burian, S. N.** On the motion of one-dimensional double pendulum / S. N. Burian, V. S. Kalnitsky // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 1959, No 1, 030004. – 7 p.

9 **Бурьян, С. Н.** Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу / С. Н. Бурьян // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2018. – Т. 5 (63), № 4. – С. 658–669.

*S. N. BURIAN*

*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

#### DARBOUX MECHANISM: GEOMETRY AND KINEMATICS

The Darboux mechanism's mathematical foundations are considered. Parametrization of the mechanism is used. The correctness of the mechanism motion and the trajectory straightness of one vertex ( $H$ ) are proved. The configuration space of the mechanism near a special position represents two smooth curves intersecting at a nonzero angle. It is shown that at the special configuration the inverse problem of dynamics is not solvable for the point  $H$  nonzero acceleration.

Получено 12.04.2018