УДК 378.141.2/.5:531

А. О. ШИМАНОВСКИЙ, И. Е. КРАКОВА
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

XV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Представлена информация о XV Международной олимпиаде по теоретической механике, которая состоялась в Белорусском государственном университете транспорта в апреле 2019 г. Приведены условия и решения задач, сведения о результатах олимпиады.

В апреле 2019 г. в Белорусском государственном университете транспорта состоялась очередная пятнадцатая Международная олимпиада по теоретической механике. На сей раз посоревноваться в знаниях и умении решать задачи по теоретической механике приехали 150 студентов – представители вузов Беларуси (10 команд), Китая (7 команд), Польши (1 команда), России (15 команд), Туркменистана (6 команд) и Украины (1 команда). Как и в предыдущие годы олимпиада традиционно включала два конкурса: теоретический (лично-командный) и «Брейн-ринг» (командный) [1–3].

В разработке приведенных в приложении комплектов заданий принимали участие сотрудники кафедры «Техническая физика и теоретическая механика» БелГУТа А. О. Шимановский, М. Г. Кузнецова, И. Е. Кракова, Д. А. Черноус, И. А. Ворожун.

В соответствии с положением об олимпиаде на теоретическом конкурсе участникам предлагались представленные в приложении восемь задач (две по статике, две по кинематике и четыре по динамике), на решение которых отводилось 4 часа. Проверка работ осуществлялась жюри, в составе которого работали преподаватели вузов – участников олимпиады. Максимальный балл по каждой задаче был равен десяти. Оценка выставлялась с точностью до половины балла. Победитель в командном зачете определялся по сумме трех лучших результатов представителей вуза.

В конкурсе «Брейн-ринг» командам, состоящим из трех студентов, на 60 минут предлагались для решения тридцать мини-задач – по десять соответственно по статике, кинематике и динамике. Особенностью данного конкурса является то, что победитель определяется только на основе правильных ответов (решения не проверяются), за каждый из которых присуждается один балл. Если команды набирают равное количество баллов, то им присуждается одинаковое место.

При решении задач теоретического конкурса наибольшие трудности вызвали задачи С1, К2, Д2 и Д3. В задаче С1 лишь немногие участники смогли выделить пять разных случаев, определяющих границы зоны равновесия системы. В задаче К2 надо было показать, что центры обоих колес перемещаются с одинаковой скоростью, что немногие смогли строго доказать. Задача Д2 отличалась нестандартной расчетной схемой, которая более характерна для задач статики, поэтому значительное количество участников не приняли во внимание силы инерции стержней. В задаче Д3 требовалось учесть зависимость выражения кинетической энергии системы не только от обобщенной скорости, но и от обобщенной координаты, с чем редко приходится сталкиваться при решении учебных задач. Каждая предложенная задача была полностью решена по крайней мере одним участником, что подтверждает умеренную их сложность.

Обладатели золотых медалей (в соответствии с положением об олимпиаде ими отмечаются пять лучших участников) набрали от 74 до 77 баллов, что подтверждает их весьма высокий уровень подготовки. Интересно, что такими медалями награждены представители четырех государств: два от России и по одному – Беларуси, Китая и Украины.

В командном зачете лучшие результаты показали Московский физико-технический институт (Россия), Харьковский национальный университет (Украина), Хуачжунский научно-технологический университет (Китай) и Северо-Западный политехнический университет (Китай). В конкурсе «Брейн-Ринг» наибольшее число баллов набрали команды Юго-Восточного университета (Китай), Московского государственного технического университета им. Баумана (Россия), Северо-Западного политехнического университета и Московского физико-технического института. Дополнительную информацию о проведенной олимпиаде можно найти в приложении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Shimanovsky, A. O.** The holding of contests in engineering mechanics / A. O. Shimanovsky // International Journal of Mechanical Engineering Education. – 2013. – Vol. 41, No. 2. – P. 107–114.

2 **Шимановский, А. О.** XIV Международная олимпиада по теоретической механике / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 290–314.

3 **Shimanovsky, A.** Organization of student contests in mechanical engineering subjects as a factor of human potential development / A. Shimanovsky, M. Kuzniatsova // Proceedings of the 7th International Conference on Mechanics and Materials in Design, Albufeira/Portugal 11–15 June 2017. – Porto : INEGI, 2017. – P. 37–38.

A. O. SHIMANOVSKY, I. E. KRAKAVA
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

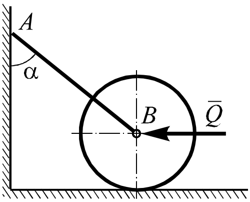
XV INTERNATIONAL ENGINEERING MECHANICS CONTEST

There is presented the information about the 15th International Engineering Mechanics Contest which took place at the Belarusian State University of Transport in April 2019. The problem tasks and solutions and the Contest results information are demonstrated.

Получено 30.09.2019

1 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА (2019 г.)

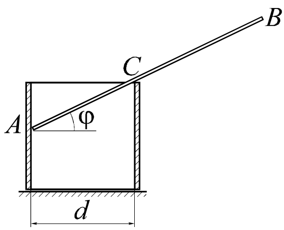
Задача С1–2019



Рукоятка катка, шарнирно соединенная с его осью, опирается своим концом A на вертикальную гладкую стенку. Вес рукоятки равен P, ее длина l, вес катка также равен P, его радиус r. В точке B к катку приложена горизонтальная сила $Q = 2P$. При каких значениях угла α возможно равновесие системы, если коэффициент трения скольжения между катком и горизонтальной плоскостью равен f, а коэффициент трения качения равен δ.

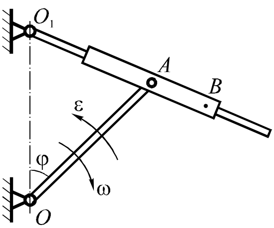
Задача С2–2019

На горизонтальной поверхности стоит абсолютно гладкий цилиндр диаметра d и веса P. В него опускают однородный стержень AB длины $2l$, который находится в равновесии под углом к горизонту. Толщиной стержня и стенок цилиндра можно пренебречь.



Определить, при каком значении угла φ и наименьшем весе Q стержня он может опрокинуть цилиндр, а также реакции в точках A и C в начальный момент опрокидывания. Найти отношение d к l, при котором возможно равновесие стержня.

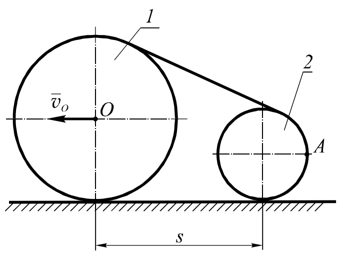
Задача К1–2019



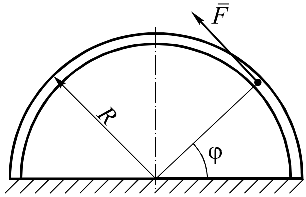
Определить скорость и ускорение точки B кулисного камня механизма в положении, определяемом углом φ, если длина кривошипа $OA = r$, расстояние между осями вращения кривошипа и кулисы $O_1O = r$ и $AB = r/2$. Угловая скорость кривошипа ω, его угловое ускорение ε.

Задача К2–2019

Катки 1 и 2, имеющие радиусы $2R$ и R соответственно, обмотаны нерастяжимой нитью и катятся по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Центр катка 1 движется с постоянной скоростью v_0. Найти скорость и ускорение точки A катка 2 в зависимости от расстояния s.



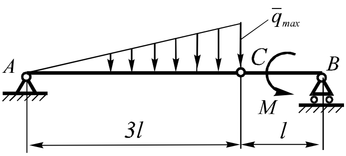
Задача Д1–2019



Тяжелая материальная точка массы m движется в вертикальной плоскости внутри гладкой тонкой трубки, изогнутой по дуге окружности радиуса R. Определить зависимость силы F от угла φ, при которой давление точки на поверхность трубки отсутствует. Сила F направлена по касательной к траектории движения.

Найти также, какому углу φ соответствует наибольшая проекция скорости на вертикальную ось.

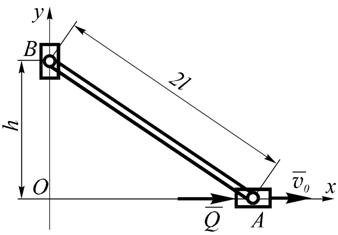
Задача Д2–2019



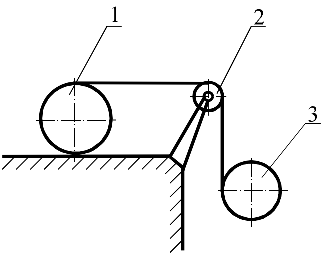
Система, состоящая из двух однородных стержней AC и BC, расположена в вертикальной плоскости. Массы стержней AC и BC $m_{AC} = 3m$, $m_{BC} = m$, их длины $3l$ и l соответственно. К системе, находящейся в покое, приложили нагрузку, изменяющуюся по линейному закону (q_m задано), и пару с моментом M. Определить возникшие в этот момент реакции связей в точках A и B.

Задача Д3–2019

Однородный стержень с длиной $2l$ и массой m двигается в горизонтальной плоскости, опираясь концами на взаимно перпендикулярные направляющие Oy и Ox, причем скорость v_0 точки A постоянна. Массы ползунов A и B одинаковы и равны m. Найти в зависимости от расстояния $h = OB$ приложенную к точке A силу Q, обеспечивающую указанное движение. Трением пренебречь.



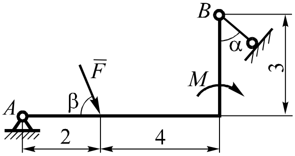
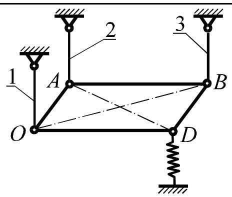
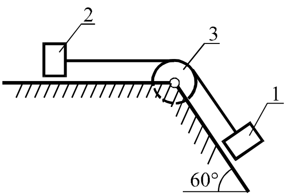
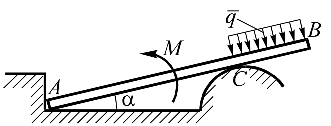
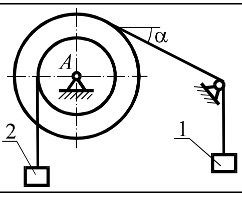
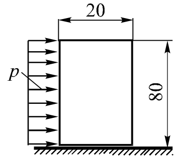
Задача Д4–2019

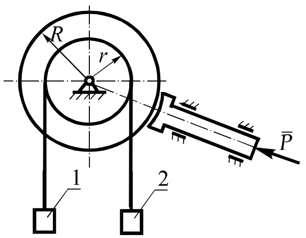


Сплошной однородный цилиндр 3 обмотан нитью, переброшенной через невесомый блок 2 и намотанной на однородный цилиндр 1, катящийся по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между цилиндром 1 и плоскостью f. Массы тел 1 и 3 одинаковы и равны m. Определить реакцию оси блока 2.

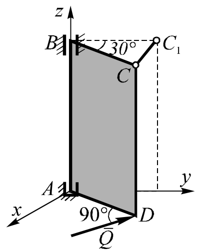
2 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ КОНКУРСА «БРЕЙН-РИНГ» (2019 г.)

СТАТИКА

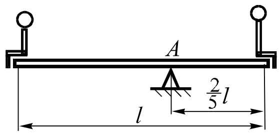
	**1.** Определить, при каком значении угла α рама не будет находиться в равновесии при действии силы F и пары сил с моментом M.
	**2.** Прямоугольная плита, веса G = 1 кН, закреплена на трех вертикальных стержнях 1, 2, 3. Размеры плиты OA = 1,5AB. В точке D на плиту давит пружина силой Q = 0,5 кН. Определить реакцию стержня 2.
	**3.** Грузы 1 и 2 одинаковой массы, связанные нерастяжимой нитью, находятся на наклонной и горизонтальной плоскостях соответственно. Коэффициенты трения грузов о плоскости одинаковы. Определить наименьшее значение коэффициента трения, при котором система грузов будет находиться в равновесии. Трением нити о блок 3 пренебречь.
	**4.** Однородный стержень AB весом $8\sqrt{3}$ кН упирается концом A в выступ и свободно лежит на гладком полуцилиндре. Определить реакцию опоры в точке опирания на полуцилиндр, если на стержень действуют распределенная нагрузка интенсивностью $q = 4$ кН/м и пара сил с моментом M = 20 кН·м. Известно AC = 3 м, BC = 2 м, α = 30°.
	**5.** Грузы 1 и 2 подвешены на канатах, намотанных на ступенчатый барабан. Определить реакцию шарнира A при равновесии, если вес груза 1 равен 30 кН, α = 60°, $R = 2r$.
	**6.** Однородная призма массой 160 кг размерами 20×20×80 см расположена на горизонтальной шероховатой поверхности. Коэффициент трения сцепления равен 0,6. На боковую грань призмы действует равномерно распределенное давление p. Определить максимальное значение p, при котором призма будет находиться в покое.



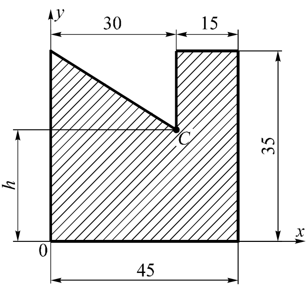
7 К вращающемуся блоку, состоящему из вала радиусом $r = 20$ см и кольца радиусом $R = 40$ см, прижимается силой $P = 100$ Н тормозная колодка. Масса груза 1 неизменна, масса груза 2 плавно увеличивается. Вращение блока прекращается при $m_2 > 4$ кг и возобновляется при $m_2 > 20$ кг. Определить коэффициент трения между колодкой и кольцом.



8. Определить реакцию стержня, удерживающего дверь $ABCD$ от закрывания, если известно $BC = BC_1$, вес двери 14 Н, внешняя сила $Q = 24$ Н.



9. Два мальчика: один массы $5m$, другой массы $1{,}5m$ катаются на специально построенной для них качели, сидя на ее концах. Точка опоры качели-доски находится на расстоянии, равном 2/5 длины доски от мальчика большей массы. Определить массу качели-доски.

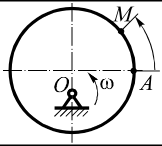
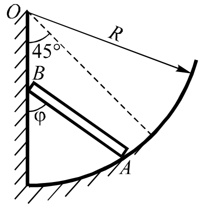
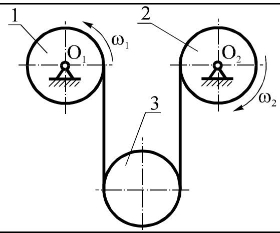
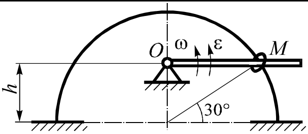
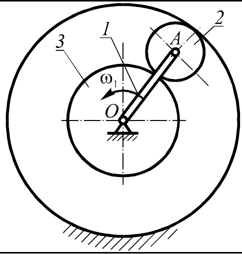
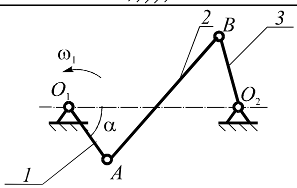
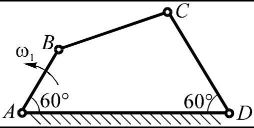


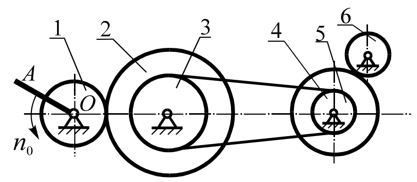
10. Треугольник был вырезан из прямоугольной пластины. Найти размер h, если точка C центр тяжести полученной фигуры.

КИНЕМАТИКА

11. Точка, радиус вектор которой равен $\vec{r} = (1+4t)\vec{i} + 3t \cdot \vec{j}$, движется в плоскости. Определить закон движения точки по траектории.

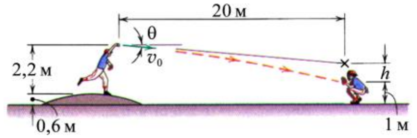
12. Задан закон движения материальной точки в координатной форме $x = 10t + 0{,}4\sin(25t)$; $y = 0{,}4\cos(25t)$. Определить ближайший к началу движения момент времени, соответствующий нулевому значению радиуса кривизны траектории точки.

	**13.** Диск равномерно вращается в плоскости рисунка. По его ободу движется точка M по закону $AM = 4t^2$ (см). Чему должна равняться угловая скорость диска, для того чтобы ускорение Кориолиса точки M в момент времени $t_1 = 1$ с, было равно 24 см/с^2.
	**14.** Балка AB движется в плоскости рисунка так, что ее конец A движется по дуге окружности радиуса R, а точка B движется по вертикальной направляющей. В некоторый момент времени радиус OA составляет с этой вертикалью угол 45°. В этом положении скорость точки A в три раза больше скорости точки B. Найти угол φ, соответствующий данному положению.
	**15.** Шкивы 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей O_1 и O_2, приводя в движение колесо 3. Угловые скорости шкивов равны $\omega_1 = 4$ рад/с, $\omega_2 = 8$ рад/с. Считая радиусы шкивов и колеса одинаковыми, равными 10 см, определить угловую скорость колеса 3.
	**16.** Для заданного положения механизма, определить ускорение Кориолиса точки M, если известны ω и h.
	**17.** Кривошип OA длиной 50 см вращается с переменной угловой скоростью $\omega_1 = 0{,}5t$ рад/с. Радиус шестерни 2 составляет 10 см. Определить модуль ускорения точек обода шестерни 3 через 1 с после начала движения.
	**18.** В механизме кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. Длины стержней $O_1A = O_2B = 1$ м; $AB = \sqrt{2}$ м. Расстояние между осями кривошипов $O_1O_2 = 2$ м. Определить модуль ускорения точки B в положении механизма при $\alpha = 0$.
	**19.** Определить угловую скорость звена CD для данного положения четырехзвенного механизма, если $\omega_1 = 2$ рад/с, длины звеньев: $AB = 1{,}5$ м, $AD = 6$ м, $CD = 3$ м.



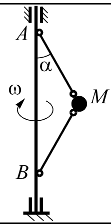
20. В механизме, изображенном на рисунке, рукоятка OA вращается с частотой n_0. Определить, при каком соотношении радиусов R_1/R_2 частота вращения колеса 6 будет больше частоты вращения рукоятки в 5 раз. Известно: $R_2 = 0{,}6$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $R_4 = 0{,}2$ м, $R_5 = 0{,}5$ м.

ДИНАМИКА

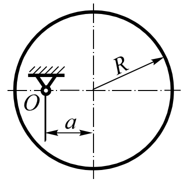


21. Определите высоту h места, в которое питчер должен прицелиться, чтобы мяч оказался в перчатке кэтчера. Мяч выпущен со скоростью 40 м/с.

22. На поверхности диска, вращающегося в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью 5 рад/с, на расстоянии l от оси вращения расположено тело, принимаемое за материальную точку. Коэффициент трения сцепления диска с телом 0,4. Определить наименьшее расстояние l, при котором материальная точка будет слетать с диска.

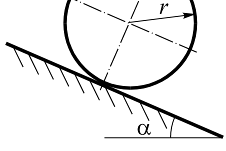


23. Шарик M массы m скреплен шарнирно с двумя одинаковыми невесомыми стержнями MA и MB длины l каждый. Система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси AB. Определить силу в стержне AM, если $\alpha = 30^\circ$.

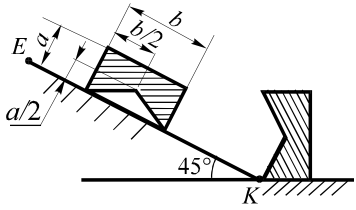


24. Однородный диск массой $0{,}6m$ вращается в вертикальной плоскости под действием силы тяжести относительно оси O, перпендикулярной плоскости диска. Определить угловое ускорение диска в указанном на рисунке положении, если радиус диска $R = 0{,}64$ м, $a = 3R/4$.

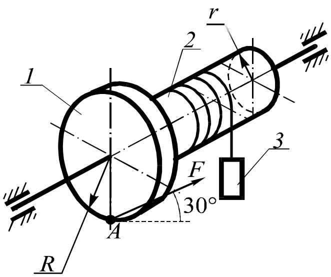
25. Материальная точка движется согласно уравнению $0{,}1\ddot{x} + 0{,}6\dot{x} + 4{,}9x = 0$. Определить частоту соответствующих колебаний.



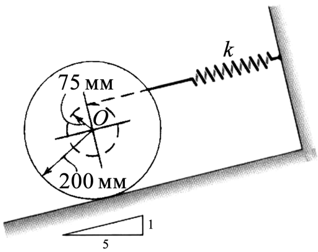
26. Сплошной однородный диск массой m и радиусом r, расположен на шероховатой наклонной поверхности. Коэффициент трения с поверхностью 0,4. Определить угол наклона поверхности, при котором угловое ускорение диска составляет $\varepsilon = g / r\sqrt{3}$. Сопротивлением качению пренебречь.



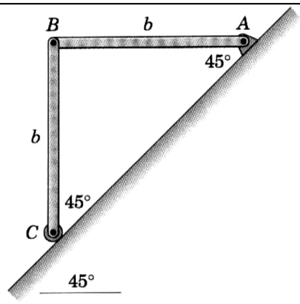
27. Однородная пластина массой $m = \sqrt{3}$ кг с центром тяжести в точке C начала двигаться из состояния покоя по наклонной гладкой плоскости. В начале движения левая опора пластины находилась в точке E. Определить работу силы тяжести пластины, если, достигнув точки K, она перевернулась и легла на правый бок. Известно: $\alpha = 40°$, $b = 2a\sqrt{3}$, $EK = 10a$.



28. Ступенчатый вал массы $m = 20$ кг с радиусом инерции 10 см начинает движение из состояния покоя под действием силы $F = 10$ Н, приложенной в плоскости диска 1 к точке A обода. $R = 25$ см, сила тяжести груза $G = 15$ Н, $r = 12$ см. Найти время, за которое вал сделает один полный оборот.



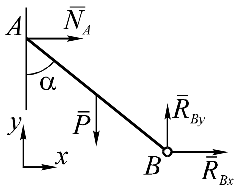
29. Катушка массой 10 кг с радиусом инерции относительно оси O, равным 125 мм, связана с пружиной с коэффициентом жесткости $k = 600$ Н/м с помощью каната, обмотанного вокруг внутреннего радиуса. Учитывая, что катушка выходит из состояния покоя при растяжении пружины 225 мм, рассчитать максимальную скорость центра O при дальнейшем движении. Катушка катится без проскальзывания.



30. Два одинаковых однородных стержня начинают движение из изображенного на рисунке положения в вертикальной плоскости. Определить угловую скорость ω стержня AB в момент, когда стержни становятся коллинеарными.

3 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА

Задача С1–2019



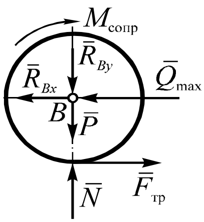
Рассмотрим равновесие рукоятки.

$$\sum M_{iB} = 0 \; ; \; P\frac{l}{2}\sin\alpha - N_A l\cos\alpha = 0 \; ;$$

$$N_A = \frac{P\dfrac{l}{2}\sin\alpha}{l\cos\alpha} = \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha \; ;$$

$$\sum F_{ix} = 0 \; ; \; N_A + R_{Bx} = 0 \; ; \; R_{Bx} = -N_A = -\frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha \; ;$$

$$\sum F_{iy} = 0 \; ; \; R_{By} - P = 0 \; ; \; R_{By} = P \; .$$



Рассматриваем равновесие катка, полагая, что $Q = Q_{max}$.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_{тр} - Q_{max} - x_B = 0 \; ;$$

$$F_{тр} = Q_{max} + x_B = 2P - \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha \; ;$$

$$\sum F_{iy} = 0 \; ; \; N - P - y_B = 0 \; ; \; N = P + y_B = P + P = 2P \; ;$$

$$\sum M_{iB} = 0 \; ; \; F_{тр}r - M_{сопр} = 0 \; ; \; \left(2P - \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)r = M_{сопр} \; .$$

Определяем значение угла α из условия $M_{сопр} \le N \cdot \delta$.

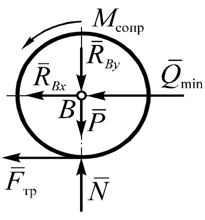
$$(2P - \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha)r \le 2P \cdot \delta \; ;$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha \ge 4 - \dfrac{4\delta}{r}$; $\alpha \ge \operatorname{arctg} 4\left(1 - \dfrac{\delta}{r}\right)$.

Определяем значение угла α из условия $F_{тр} \le fN$.

$$2P - \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha \le 2Pf \; ;$$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha \ge 4 - 4f$; $\alpha \ge \operatorname{arctg}4(1 - f)$.



Теперь определим значение угла α для случая $Q = Q_{min}$. При такой ситуации из уравнений равновесия катка получаем:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -F_{тр} - Q_{min} - x_B = 0 \; ;$$

$$F_{тр} = -Q_{min} - x_B = -2P + \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha \; ;$$

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\ N - P - y_B = 0\ ;\ N = P + y_B = P + P = 2P\ ;$$

$$\sum M_{iB} = 0;\ \ F_{\text{тр}} r - M_{\text{сопр}} = 0\ ;\ \left(\frac{P}{2}\text{tg}\alpha - 2P\right) r = M_{\text{сопр}}\ .$$

Отсюда из условий $M_{\text{сопр}} \le N\delta$ и $F_{\text{тр}} \le fN$ находим:

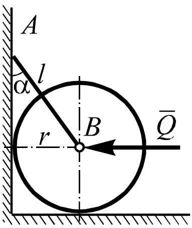
$$\left(\frac{P}{2}\text{tg}\alpha - 2P\right) r \le 2P\delta\ ;\ \text{tg}\alpha \ge 4 + \frac{4\delta}{r}\ ,\ \alpha \ge \text{arctg}\ 4\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)\ ;$$

$$\frac{P}{2}\text{tg}\alpha - 2P \le 2Pf\ ;\ \text{tg}\alpha \ge 4 + 4f\ ,\ \alpha \ge \text{arctg}\big(4(1 + f)\big)\ .$$

Таким образом, равновесие системы возможно в случаях:

1) если $f \le \dfrac{\delta}{r}$, $\text{arctg}4(1 - f) \le \alpha \le \text{arctg}4(1 + f)$;

2) если $f \ge \dfrac{\delta}{r}$, $\text{arctg}4(1 - f) \le \alpha \le \text{arctg}4(1 + f)$.



Размеры r и l могут быть такими, что каток будет касаться стены, и поэтому его нельзя вывести из равновесия силой Q. Для этого случая из геометрии системы получаем:

$$\text{tg}\alpha_{\min} = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}}\ ;\ \alpha_{\min} = \text{arctg}\frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}}\ ;$$

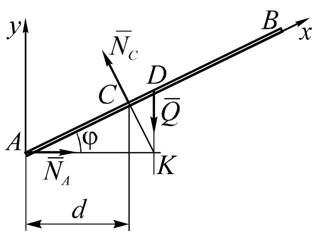
$$\alpha \ge \text{arctg}\frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}}\ .$$

Задача С2–2019

Цилиндр гладкий, поэтому на стержень AB действуют три непараллельные силы, которые при равновесии сходятся в одной точке. Отсюда

$$AK = AD\cos\varphi = l\cos\varphi\ ;\ AK = \frac{AC}{\cos\varphi} = \frac{d}{\cos^2\varphi}\ ;$$

$$l\cos\varphi = \frac{d}{\cos^2\varphi}\ ;\ \cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{d}{l}}\ ;\ \varphi = \arccos\sqrt[3]{\frac{d}{l}}\ .$$



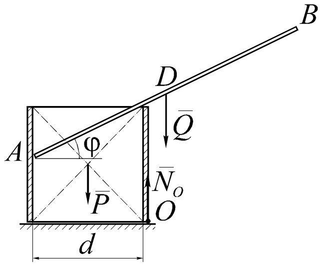
Поскольку $\cos\varphi \le 1$, то равновесие стержня возможно только при условии $d \le l$.

Из уравнений проекций получаем

$$\sum F_{ix} = 0\ ;\ N_A\cos\varphi - Q\sin\varphi = 0\ ;\ N_A = Q\,\text{tg}\,\varphi\ ;$$

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\ N_C\cos\varphi - Q = 0\ ;\ N_C = \frac{Q}{\cos\varphi}\ .$$

Рассмотрим предельное равновесие цилиндра

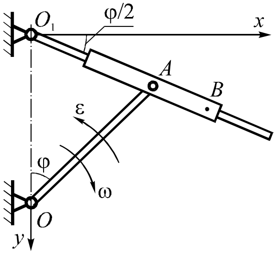


$$\sum M_{iO} = 0;\ Q_{\min}(AD\cos\varphi - d) = P\frac{d}{2};$$

$$Q_{\min}(l\cos\varphi - d) = P\frac{d}{2};$$

$$Q_{\min} = \frac{P\frac{d}{2}}{l\cdot\sqrt[3]{\frac{d}{l}} - d} = \frac{P}{2\left((l/d)^{2/3} - 1\right)}.$$

Задача К1–2019



По условию треугольник OO_1A является равнобедренным. Тогда в изображенной на рисунке декартовой системе координат для точки B имеем:

$$x_B = O_1B\cos\frac{\varphi}{2},\ y_B = O_1B\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Поскольку

$$O_1A = 2r\sin\frac{\varphi}{2};\ O_1B = 2r\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2},$$

то $$x_B = \left(2r\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2},\ y_B = \left(2r\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда проекции вектора скорости точки B:

$$v_{Bx} = \frac{dx_B}{dt} = \left(r\cos\varphi - \frac{r}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\omega;$$

$$v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = \left(2r\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\omega = \left(r\sin\varphi + \frac{r}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\omega.$$

Модуль скорости

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \omega\cdot\left(r^2\cos^2\varphi - \frac{r^2}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \frac{r^2}{16}\sin^2\frac{\varphi}{2} + r^2\sin^2\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2}{2}\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{r^2}{16}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1/2} = \omega\cdot\sqrt{r^2 + \frac{r^2}{16} + \frac{r^2}{2}\sin\frac{\varphi}{2}} = \omega r\sqrt{\frac{17}{16} + \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{2}}.$$

Повторно дифференцируя, определяем проекции ускорения точки B:

$$a_{Bx} = \frac{dv_{Bx}}{dt} = \left(-r\sin\varphi - \frac{r}{8}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\omega^2 + \left(r\cos\varphi - \frac{r}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cdot(-\varepsilon);$$

$$a_{By} = \frac{dv_{By}}{dt} = \left(r\cos\varphi - \frac{r}{8}\sin\frac{\varphi}{2} \right)\cdot\omega^2 + \left(r\sin\varphi + \frac{r}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \right)\cdot(-\varepsilon).$$

Модуль ускорения точки B найдем из формулы $a_B^2 = a_{Bx}^2 + a_{By}^2$:

$$a_B^2 = \omega^4 r^2 \left(\sin\varphi + \frac{1}{8}\cos\frac{\varphi}{2} \right)^2 + 2\omega^2\varepsilon r^2 \left(\sin\varphi + \frac{1}{8}\cos\frac{\varphi}{2} \right)\cdot\left(\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2} \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 r^2 \left(\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2} \right)^2 + \omega^4 r^2 \left(\cos\varphi - \frac{1}{8}\sin\frac{\varphi}{2} \right)^2 -$$

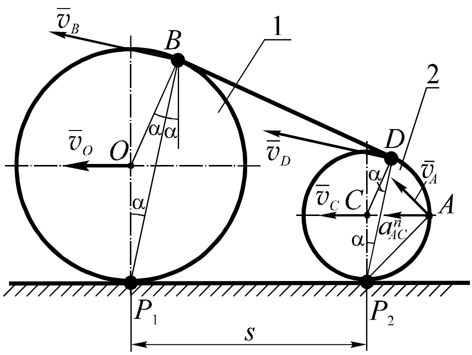
$$- 2\omega^2\varepsilon r^2 \left(\cos\varphi - \frac{1}{8}\sin\frac{\varphi}{2} \right)\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \right) + \varepsilon^2 r^2 \left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \right)^2.$$

В результате преобразований окончательно получаем

$$a_B = r\sqrt{\omega^4\left(\frac{65}{64} + \frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\omega^2\varepsilon}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \varepsilon^2\left(\frac{17}{16} + \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Задача К2–2019

Катки 1 и 2 двигаются плоскопараллельно. При качении без проскальзывания мгновенные центры скоростей находятся в точках контакта катков с поверхностью. Радиусы OB и CD перпендикулярны нити, поэтому треугольники BOP_1 и DCP_2 подобны. Следовательно, $\vec{v}_B \parallel \vec{v}_D$, они образуют одинаковые углы с нитью, и по теореме о проекциях скоростей абсолютно твердого тела получаем $v_B = v_D$.



Поскольку

$$v_B = \frac{v_O}{OP_1} BP_1;\; v_D = \frac{v_C}{CP_2} DP_2,$$

то из подобия треугольников BOP_1 и DCP_2 имеем $v_O = v_C$.

Используя мгновенный центр скоростей, определяем скорость точки A:

$$\frac{v_C}{CP_2} = \frac{v_A}{AP_2},\; v_A = \frac{v_C}{CP_2} AP_2 = v_C\sqrt{2} = v_O\sqrt{2}.$$

Поскольку v_O = const; $CP_2 = R$ = const, то

$$a_C = \frac{dv_O}{dt} = 0;\; \varepsilon_2 = 0.$$

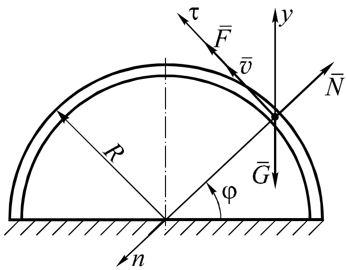
По теореме о сложении ускорений при плоском движении тела имеем

$$\overline{a}_A = \overline{a}_C + \overline{a}^{\tau}_{AC} + \overline{a}^{n}_{AC} .$$

Учитывая, что $a^n_{AC} = \omega_2^2 \; AC = \left(\dfrac{v_C}{R}\right)^2 R = \dfrac{v_O^2}{R}$; $a^{\tau}_{AC} = \varepsilon \cdot AC = 0$, получаем

$$a_A = a^n_{AC} = \frac{v_O^2}{R} .$$

Задача Д1–2019



Вводим естественную систему координат, как это показано на рисунке. Динамические уравнения движения материальной точки

$$ma_{\tau} = F - G\cos\varphi \; , \; ma_n = G\sin\varphi - N \; .$$

Точка движется по дуге окружности, поэтому

$$a_n = \frac{v^2}{R} , \; a_{\tau} = \frac{dv}{dt} .$$

С учетом этого получаем

$$m\frac{dv}{dt} = F - G\cos\varphi \; . \qquad (1)$$

По условию задачи давление материальной точки на поверхность трубки отсутствует ($N = 0$), следовательно

$$a_n = g\sin\varphi \; ; \; \frac{v^2}{R} = g\sin\varphi \; ;$$

$$v^2 = gR\sin\varphi \; . \qquad (2)$$

Дифференцируем по времени

$$2v\frac{dv}{dt} = gR\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \; ;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gR\cos\varphi \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}}{2v} . \qquad (3)$$

Из уравнения (1)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - G\cos\varphi}{m} . \qquad (4)$$

Тогда из (3) и (4) получаем:

$$\frac{F - G\cos\varphi}{m} = \frac{gR\cos\varphi \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}}{2v}.$$

Решая полученное уравнение, с учетом соотношения $v = \omega R$, находим

$$mgR\cos\varphi \cdot \omega = 2v(F - G\cos\varphi);$$

$$mg\cos\varphi = 2F - 2mg\cos\varphi;$$

$$F = \frac{3}{2}mg\cos\varphi.$$

Вертикальная составляющая вектора скорости точки

$$v_y = v\cos\varphi.$$

$$v_y^2 = v^2\cos^2\varphi,\ v_y^2 = gR\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi.$$

Для определения угла, при котором проекция скорости на ось y максимальна, приравняем нулю частную производную по углу φ:

$$\frac{\partial(v_y^2)}{\partial\varphi} = gR(\cos\varphi \cdot \cos^2\varphi - 2\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi) = 0;$$

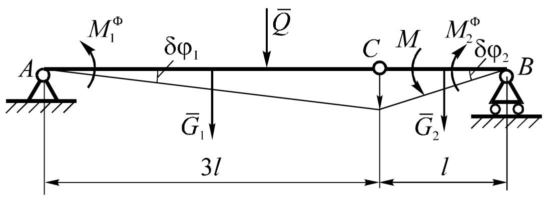
Множитель $\cos\varphi = 0$ соответствует минимуму v_y. Поэтому

$$\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi = 0;\ \cos^2\varphi = 2\sin^2\varphi;\ \mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{1}{2};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Задача Д2–2019

Сообщим системе возможное перемещение, как это показано на рисунке.



Для определения углового ускорения стержня AC запишем общее уравнение динамики материальной системы

$$G_1 \cdot 1{,}5l\,\delta\varphi_1 + Q \cdot 2l\,\delta\varphi_1 - M_1^\Phi\,\delta\varphi_1 + G_2 \cdot 0{,}5l\,\delta\varphi_2 + M\,\delta\varphi_2 - M_2^\Phi\,\delta\varphi_2 = 0.$$

Из рисунка следует, что $3l\,\delta\varphi_1 = l\,\delta\varphi_2$, следовательно

$$G_1 \cdot 1{,}5l\,\delta\varphi_1 + Q \cdot 2l\,\delta\varphi_1 - M_1^\Phi\,\delta\varphi_1 + G_2 \cdot 0{,}5l \cdot 3\delta\varphi_1 + M \cdot 3\delta\varphi_1 - M_2^\Phi \cdot 3\delta\varphi_1 = 0.$$

Возможное перемещение $\delta\varphi_1 \neq 0$, поэтому

$$G_1 \cdot 1{,}5l + Q \cdot 2l - M_1^{\Phi} + G_2 \cdot 1{,}5l + 3M - 3M_2^{\Phi} = 0\,.$$

Моменты сил инерции, действующие на стержни, равны

$$M_1^{\Phi} = \frac{m_1 9l^2}{3} \cdot \varepsilon_1 = \frac{3m \cdot 9l^2}{3} \cdot \varepsilon_1 = 9ml^2\varepsilon_1\,;$$

$$M_2^{\Phi} = \frac{m_2 l^2}{3} \cdot \varepsilon_2 = \frac{1}{3} ml^2 \varepsilon_2\,.$$

В заданном положении системы угловые ускорения стержней связаны соотношением $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$.

Тогда, подставляя выражения моментов сил инерции стержней, получаем

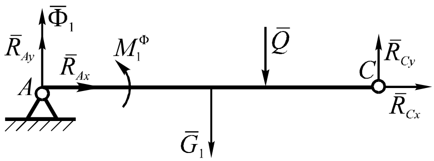
$$mg \cdot 4{,}5l + Q \cdot 2l - 9ml^2\varepsilon_1 + mg \cdot 1{,}5l + 3M - ml^2 \cdot 3\varepsilon_1 = 0\,,$$

$$12ml^2\varepsilon_1 = 6mg \cdot l + Q \cdot 2l + 3M\,.$$

Отсюда находим ускорение стержня AC:

$$\varepsilon_1 = \frac{6mg \cdot l + Q \cdot 2l + 3M}{12ml^2}\,.$$

Рассмотрим силы и моменты, действующие на стержень AC.



$$\sum M_{Ci} = 0\,;\; G_1 \cdot 1{,}5l + Q \cdot l + M_1^{\Phi} - \Phi_1 \cdot 3l - R_{Ay} \cdot 3l = 0\,;$$

$$3mg \cdot 1{,}5l + Q \cdot l + 9ml^2\varepsilon_1 - 3m\varepsilon_1 \frac{3}{2} l \cdot 3l - R_{Ay} \cdot 3l = 0\,.$$

Отсюда находим R_{Ay}:

$$R_{Ay} = \frac{1}{3l}\left(mg \cdot 4{,}5l + Q \cdot l + 9ml^2\varepsilon_1 - 13{,}5m\varepsilon_1 l^2\right) = \frac{Q}{3} + 1{,}5mg - 1{,}5ml\varepsilon_1 =$$

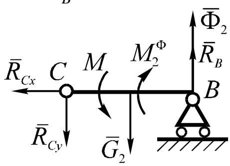
$$= \frac{Q}{3} + 1{,}5mg - 1{,}5ml\left(\frac{g}{2l} + \frac{Q}{6ml} + \frac{M}{4ml^2}\right) = \frac{Q}{3} + 1{,}5mg - \frac{1{,}5mg}{2} - \frac{Q}{4} - \frac{3M}{8l} =$$

$$= \frac{Q}{12} + \frac{3mg}{4} - \frac{3M}{8l}.$$

Поскольку равнодействующая распределенной нагрузки $Q = \frac{1}{2} q_{\max} 3l$, то получаем

$$R_{Ay} = \frac{1}{8} q_{\max} \cdot l + \frac{3mg}{4} - \frac{3M}{8l}.$$

Аналогично, составляя уравнение моментов относительно точки C для стержня BC, получаем значение R_B.



$$\sum M_{Ci} = 0\,;\; M - M_2^{\Phi} + R_B\, l + \Phi_2\, l - G \cdot 0{,}5l = 0\,;$$

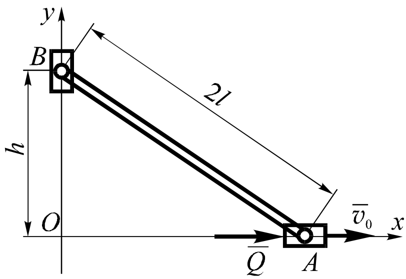
$$R_B = (-M + M_2^{\Phi} - \Phi_2\, l + G \cdot 0{,}5l)\,/\,l = -\frac{M}{l} + \frac{1}{3} ml \cdot \varepsilon_2 - \frac{1}{2} ml\varepsilon_2 + 0{,}5mg =$$

$$= -\frac{M}{l} - \frac{1}{6} ml \left(\frac{3g}{2l} + \frac{Q}{2ml} + \frac{3M}{4ml^2} \right) + 0{,}5mg = \frac{mg}{4} - \frac{Q}{12} - \frac{9M}{8ml} =$$

$$= \frac{mg}{4} - \frac{q_{\max} l}{8} - \frac{9M}{8ml}.$$

Задача Д3–2019

Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем $q = \varphi$.



Кинетическая энергия системы

$$T = T_A + T_B + T_{AB}\,.$$

$$T_A = \frac{mv_A^2}{2}\,,\; T_B = \frac{mv_B^2}{2}\,,\; T_{AB} = \frac{mv_C^2}{24} + \frac{I_C \omega^2}{2}\,.$$

Для определения скоростей точек A и B используем законы изменения их декартовых координат

$$x_A = 2l\cos\varphi\,,\;\; y_B = 2l\sin\varphi\,.$$

Тогда

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = -2l\sin\varphi\cdot\omega = v_0\,;\;\; \omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v_0}{2l\sin\varphi}\,;$$

$$v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = 2l\cos\varphi\cdot\omega = -2l\cos\varphi\cdot\frac{v_0}{2l\sin\varphi} = -v_0\mathrm{ctg}\varphi\,.$$

Поскольку точка C – середина стержня, то ее координаты

$$x_C = x_A/2;\quad y_C = y_B/2,$$

Поэтому $v_{Cx} = \dfrac{v_A}{2} = \dfrac{v_0}{2}$, $v_{Cy} = \dfrac{v_{By}}{2} = -\dfrac{v_0}{2}\mathrm{ctg}\varphi$.

Следовательно, кинетические энергии ползунов A и B, а также однородного стержня приобретают вид

$$T_A = \frac{mv_0^2}{2}\,;\; T_B = \frac{m}{2}v_0^2\mathrm{ctg}^2\varphi\,;\; T_{AB} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_0^2}{4} + \frac{v_0^2}{4}\mathrm{ctg}^2\varphi\right) + \frac{I_C}{2}\frac{v_0^2}{4l^2\sin^2\varphi}\,.$$

Учитывая, что момент инерции стержня $I_C = \dfrac{m\cdot(2l)^2}{12} = \dfrac{ml^2}{3}$, получаем выражение кинетической энергии системы в целом

$$T = T_A + T_B + T_{AB} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 + \mathrm{ctg}^2\varphi + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{ctg}^2\varphi + \frac{1}{12\sin^2\varphi}\right) = \frac{2mv_0^2}{3\sin^2\varphi}\,.$$

Определим величины, входящие в уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\,.$$

Производные от кинетической энергии системы

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 0\,,\;\; \frac{\partial T}{\partial\varphi} = -\frac{4mv_0^2\cos\varphi}{3\sin^3\varphi}\,.$$

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате, равна

$$Q_\varphi = F_x\frac{\partial x}{\partial\varphi} = Q\frac{\partial x_A}{\partial\varphi} = -Q\cdot 2l\sin\varphi\,.$$

Подстановка в уравнения Лагранжа II рода дает:

$$-\frac{4mv_0^2\cos\varphi}{3\sin^3\varphi} = -2Ql\sin\varphi\,.$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{2mv_0^2 \cos\varphi}{3l\sin^4\varphi}.$$

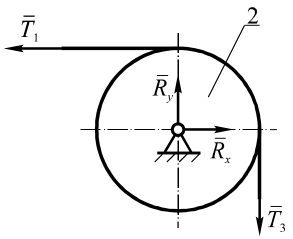
Выразим тригонометрические функции угла φ через заданные размеры:

$$\sin\varphi = \frac{h}{2l};\ \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{h^2}{(2l)^2}} = \frac{\sqrt{4l^2-h^2}}{2l}.$$

В результате подстановки окончательно получаем

$$Q = \frac{2mv_0^2}{3l}\frac{\sqrt{4l^4-h^2}\cdot(2l)^4}{2lh^4} = \frac{16}{3}\frac{mv_0^2\, l^2\sqrt{4l^2-h^2}}{h^4}.$$

Задача Д4–2019



Тело 2 вращается. Его движение описывается динамическим уравнением

$$I_z\varepsilon = \sum M_{zi}.$$

С учетом действующих на тело сил

$$I_{2z}\varepsilon_2 = T_3 r_2 - T_1 r_2.$$

По условию задачи тело 2 невесомо, поэтому $m_2 = 0$ и $I_{2z} = 0$. Следовательно, $T_1 = T_3 = T$.

Из уравнений проекций сил на оси координат получаем:

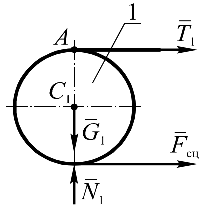
$$R_x - T_1 = 0;\ R_x = T_1;$$

$$R_y - T_3 = 0;\ R_y = T_3.$$

Таким образом, реакция оси вращения выражается через силу натяжения формулой

$$R = \sqrt{T_3^2 + T_1^2} = T\sqrt{2}.$$

Рассмотрим движение по горизонтальной плоскости однородного цилиндра 1. Примем, что сила сцепления цилиндра с поверхностью направлена в рассматриваемом случае вправо (правильность такого выбора будет подтверждена в дальнейшем).



Уравнения движения цилиндра имеют вид

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i; \\ I_C\varepsilon = \sum M_{Ci}. \end{cases}$$

Здесь момент инерции однородного цилиндра $I_C = \dfrac{mr^2}{2}.$

Значение коэффициента трения задано в общем виде, поэтому следует проанализировать возможность движения цилиндра 1 как без проскальзывания, так и при его наличии.

Рассмотрим *случай качения без проскальзывания*. Для него справедливо соотношение $\varepsilon_1 = \dfrac{a_{C1}}{r}$.

С учетом действующих на каток сил

$$\begin{cases} ma_{C1} = T + F_{\text{сц}}; \\ \dfrac{1}{2}mr^2\varepsilon_1 = Tr - F_{\text{сц}}r; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ma_{C1} = T + F_{\text{сц}}; \\ \dfrac{1}{2}ma_{C1} = Tr - F_{\text{сц}}r. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$2T = \frac{3}{2}ma_{C1} \text{ или } ma_{C1} = \frac{4}{3}T .$$

Тогда сила сцепления равна

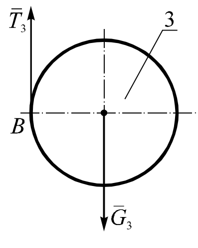
$$F_{\text{сц}} = ma_{C1} - T = \frac{1}{3}T .$$

Знак силы оказался положительным, что свидетельствует о правильности ранее выбранного направления.

Касательную составляющую ускорения точки A катка найдем из соотношения

$$a_A^{\tau} = a_{C1} + \varepsilon_1 r = 2a_{C1}.$$

Однородный цилиндр 3 движется плоскопараллельно. Уравнения его движения



$$\begin{cases} G_3 - T = ma_{C3}; \\ \dfrac{1}{2}mr^2\varepsilon_3 = Tr. \end{cases}$$

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{C3} - a_B^{\tau}}{r} = \frac{a_{C3} - a_A^{\tau}}{r} = \frac{a_{C3} - 2a_{C1}}{r}.$$

Тогда

$$\begin{cases} m_3 g - T = ma_{C3}; \\ \dfrac{1}{2}mr^2\left(\dfrac{a_{C3} - 2a_{C1}}{r}\right) = Tr. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение полученной системы с учетом первого:

$$\frac{1}{2}m(a_{C_3}-2a_{C_1})=T\ ;\ \ \frac{1}{2}ma_{C_3}-ma_{C_1}=T\ ;$$

$$\frac{1}{2}(m_3g-T)-\frac{4}{3}T=T\ ;\ \frac{1}{2}m_3g=T\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1\right);$$

$$\frac{1}{2}m_3g=T\frac{17}{6}\ .$$

Отсюда сила натяжения нити равна

$$T=\frac{3}{17}mg\ .$$

Соответственно реакция оси вращения

$$R=\frac{3\sqrt{2}}{17}mg\ .$$

Сила сцепления в рассматриваемом случае

$$F_{\text{сц}}=\frac{1}{3}T=\frac{1}{17}mg;\ \ F_{\text{сц}}^{\max}=fmg\ ;\ N_1=G_1=mg.$$

Поэтому при $f\le\dfrac{1}{17}$, то тело 1 катится с проскальзыванием.

Рассмотрим *случай качения с проскальзыванием* (мгновенный центр скоростей не находится в точке соприкосновения цилиндра 1 с поверхностью). Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} ma_{C_1}=T+fmg; \\ Tr-F_{\text{сц}}r=\dfrac{1}{2}mr^2\varepsilon_1; \end{cases}$$

Сила сцепления в этом случае $F_{\text{сц}}=fmg$. Тогда ускорение точки A

$$a_A^\tau=a_{C_1}+\varepsilon_1 r=\frac{1}{m}(T+fm+2(T-fmg))=\frac{1}{m}(3T-fmg)\ .$$

Уравнения движения цилиндра 3 приобретают вид

$$\begin{cases} ma_{C_3}=G_3-T; \\ \dfrac{1}{2}mr^2\,\dfrac{a_{C_3}-a_B^\tau}{r}=Tr; \end{cases}$$

Касательные составляющие ускорений точек A и B одинаковы: $a_B^\tau=a_A^\tau$. Тогда можно записать

$$\begin{cases} ma_{C3} = mg - T; \\ \frac{1}{2} m(a_{C3} - a_A^{\tau}) = T. \end{cases}$$

Подставляя полученные выше выражения, находим

$$\frac{1}{2}(mg - T) - \frac{1}{2}(3T - fmg) = T \ ;$$

$$\frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}T - \frac{3}{2}T + \frac{1}{2}fmg = T \ ;$$

$$\frac{1}{2}mg(1 + f) = 3T \ .$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{6}mg(1 + f)$$

и реакция оси вращения

$$R = \frac{\sqrt{2}}{6}mg(1 + f) \ .$$

Следовательно, ответ задачи может быть сформулирован так:

$$\text{при } f \le \frac{1}{17} \quad R = \frac{3\sqrt{2}}{17}mg \ ;$$

$$\text{при } f > \frac{1}{17} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{6}mg(1 + f).$$

4 ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ КОНКУРСА «БРЕЙН-РИНГ»

1. $\alpha = 116{,}565°$. **2.** $S = 0{,}5$. **3.** $f = 0{,}577$. **4.** $R = 14$ кН. **5.** $R_A = 87{,}279$ кН. **6.** $p = 2450$ Па. **7.** $f = 0{,}39$. **8.** $S_{CC_1} = 24{,}85$. **9.** $m = 11m$. **10.** Точка C не может быть центром тяжести. **11.** $s = 5t$. **12.** $t = 0126$ с. **13.** $\omega = 1{,}5$ рад/с. **14.** $\varphi = 55{,}77°$. **15.** $\omega = 2$ рад/с. **16.** $a_{кор} = 2\omega^2 h$ м/с^2. **17.** $a = 0{,}8$ м/с^2. **18.** $a_B = 8{,}944$ м/с^2. **19.** $\omega = 0{,}67$ рад/с. **20.** $R_1/R_2 = 1$. **21**. $h = 1{,}229$ м. **22.** $l = 157$ мм. **23.** $S_{AM} = m/2(\omega^2 l + g/\cos 30°)$. **24.** $\varepsilon = 10{,}809$ рад/с^2. **25.** 6,325 с$^{-1}$ или 1,007 Гц. **26.** $\alpha = 43{,}8°$. **27.** $A_G = 522{,}14a$. **28.** $t = 2{,}62$ с. **29.** $v_O = 1{,}478$ м/с. **30.** $\omega = 5{,}184/\sqrt{b}$ рад/с.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КОНКУРСА

Студенты, набравшие наибольшее число баллов в личном зачете.

Фамилия, имя, отчество участника	Команда	Сумма баллов	Место
Уймин Андрей Иванович	МФТИ	77	I
Иванов Максим Дмитриевич	УГНТУ	76	I
Николаенко Александр Алексеевич	ХНУ	76	I
Толкачев Антон Игоревич	ГГУ	75	I
Hu Xiaonan	NUAA	74	I
Крамаренко Иван Геннадьевич	МФТИ	73	II
Meng Shengguo	SEU	67	II
Смирнов Александр Сергеевич	МФТИ	67	II
Югов Василий Дмитриевич	МФТИ	66	II
Qian LiXiang	HUST	66	II
Cao Yutian	NWPU	62	II
Xu Houlin	DUTP	59	II
Пырх Иван Андреевич	МГТУ	59	II
Li Peng Fei	NWPU	59	II
Li Tengxiao	DUT	59	II
Малинский Антон Олегович	МГТУ	59	II
Xu Shiwei	HUST	58	III
Ji Jinyu	NUAA	57	III
Иваштенко Арина Юрьевна	ХНУ	57	III
Merdanov Mekan	ТГУ	56	III
Мазанов Максим Владимирович	ХНУ	56	III
Tang Ying Hai	DUTP	55	III
Сафиуллин Рамиль Ильдарович	УГНТУ	55	III
Li Tuo	NWPU	55	III
Геворгян Давит Геворгович	МФТИ	55	III
Zhou Chongbo	SEU	53	III
Wu Chutian	HUST	52	III
Wang Jinyang	SEU	51	III
Овчаренко Григорий Вадимович	ХНУ	50	III
Tao Jiale	HoHai	50	III
Рахымджанов Довлет Рахымджанович	ТГЭИ	49	III
Мирошниченко Сергей Александрович	МГТУ	49	III
Агаджанов Эзиз Гурбанмухаммедович	ТСХИ	47	III
Chen Zelong	DUTP	46	III
Леонов Алексей Юрьевич	ЮУрГУ	46	III
Ваганов Иван Витальевич	ЮУрГУ	46	III
Yuanpeng Zhang	LU	46	III
Пономарев Виктор Сергеевич	ЮУрГУ	42	III
Da Wentao	HoHai	42	III
Fengshun Zhang	LU	42	III
Хабибуллин Батыр Альбертович	УГНТУ	41	III
Назарян Хачатур Гарушевич	МФТИ	39	4
Лукин Илья Владимирович	ХНУ	38	5
Клещев Арсений Олегович	УрФУ	37	6
Xing Hanzheng	DUT	36	7

Результаты теоретического конкурса в командном зачете (по сумме трех лучших участников)

Команда	Сумма баллов	Место	Команда	Сумма баллов	Место
МФТИ	217	I	КФУ	62	10
ХНУ	189	II	КНИТУ	48	11
HUST	176	II	СибГУНТ	42	12
NWPU	176	II	ТГПИ	42	12
УГНТУ	172	II	ГГТУ	39	13
SEU	171	II	ОХУТ	37	14
МГТУ	167	II	Военмех	32	15
NUAA	160	II	ТГИТиС	32	15
ЮУрГУ	134	III	УГЗ МЧС	25	16
ГГУ	131	III	ЮРГПУ	20	17
ТГУ	122	III	SGGW	16	18
DUT	122	III	РГАУ-МСХА	15	19
LU	121	III	СПбГАСУ	14	20
HU	119	III	ТГАСУ	12	21
ТГЭИ	92	4	БРУ	11	22
УрФУ	86	5	БНТУ	8	23
ТСХИ	81	6	ИГЭУ	3	24
НГАСУ	80	7	БарГУ	3	24
DBJI	68	8	МГУП	3	24
БелГУТ	63	9	–	–	–

6 КОМАНДЫ-УЧАСТНИЦЫ И ИХ РУКОВОДИТЕЛИ

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова (ВОЕНМЕХ) – Илихменев Андрей Львович.

Барановичский государственный университет (БарГУ) – Гавриленя Андрей Константинович.

Белорусский государственный университет транспорта (БелГУТ) – Шимановский Александр Олегович.

Белорусский государственный университет (БГУ) – Мармыш Денис Евгеньевич.

Белорусский национальный технический университет (БНТУ) – Скляр Ольга Николаевна.

Белорусско-Российский университет (БРУ) – Леванович Николай Андреевич.

Варшавский университет естественных наук (SGGW) – Марек Халецкий.

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого (ГГТУ) – Кроль Дмитрий Григорьевич.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ГГУ) – Капшай Валерий Николаевич.

Ивановский государственный энергетический университет (ИГЭУ).

Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ).

Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ).

Могилевский государственный университет продовольствия (МГУП) – Харкевич Виталий Геннадьевич.

Московский государственный технический университет им. Баумана (МГТУ) – Баркин Михаил Юрьевич.

Московский физико-технический институт (государственный университет) (МФТИ) – Сахаров Александр Вадимович.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (НГАСУ) – Юдин Владимир Алексеевич.

Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К. А. Тимирязева (РГАУ) – Кондратенко Анатолий Иванович.

Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ) – Иванов Павел Сергеевич.

Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева (СибГУ) – Фалькова Екатерина Владимировна, Фисенко Елена Николаевна, Климовский Дмитрий Андреевич.

Томский государственный архитектурно-строительный университет (ТГАСУ) – Геттингер Максим Викторович.

Туркменский государственный университет им. Махтумкули (ТГУ) – Рустам Дурдыев.

Туркменский сельскохозяйственный институт (ТСХИ).

Туркменский государственный педагогический институт имени Сейди (ТГПИ) – Сердар Мырадов.

Туркменский государственный институт транспорта и связи (ТГИТиС).

Университет инженерных технологий Туркменистана имени Огуз хана (УИТТ).

Туркменский государственный энергетический институт (ТГЭИ) – Шатлык Акмырадов.

Университет гражданской защиты МЧС РБ (УГЗ МЧС) – Мартыненко Тарас Михайлович.

Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина (УрФУ) – Рощева Татьяна Анатольевна.

Уфимский государственный нефтяной технический университет (УГНТУ) – Тихонов Александр Юрьевич.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (ХНУ) – Пославский Сергей Александрович.

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. Платова – Нефедов Виктор Викторович.

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ) – Слепова Светлана Владимировна.

Dalian University of Technology (DUT) – Ma Hongyan, Wu Heng.

Hohai University (HU) – Lin Ji, Zhang Hui, Lei Dong, Wang Zhifeng, Wu Xuan.

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (NUAA) – Liu Rongmei, Chen Jianping.

Lanzhou University (LU) – Wang Xingzhe, Yong Huadong, Zhou Jun.

Southeast University (SEU) – Jiang Yijun, Wang Wenjie, Gu Chengjun.

Northwestern Polytechnical University (NWPU) – Wang Yan, Zhang Juan.

Huazhong University of Science and Technology (HUST) – Yang Hanwen, Wang Yuanxun.

7 КОМАНДЫ, ПОКАЗАВШИЕ ЛУЧШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В КОНКУРСЕ «БРЕЙН-РИНГ»

1 SEU – Meng Shengguo, Zhou Chongbo, Wang Jinyang (20 баллов).
МГТУ – Пырх И. А., Малинский А. О., Мирошниченко С. А. (20 баллов).
NWPU – Li Peng Fei, Li Tuo, Cao Yutian (20 баллов).
МФТИ-1 – Югов В. Д., Смиргов А. С., Уймин А. И. (20 баллов).
2 NUAA – Hu Xiaonan, Ji Jinyu, Liu Miao (18 баллов).
DUT – Hu Houlin, Cheng Zelony, Tang Yinghai (18 баллов).
МФТИ-2 – Крамаренко И. Г., Геворгян Д. Г., Назарян Х. Г. (18 баллов).
3 LU – Zhang Chengyao, Zhang Fengshun, Zhang Yuanpeng (17 баллов).
УрФУ-2 – Каримуллин И. С., Симонов М. А., Клещев А. О. (17 баллов).
УГНТУ – Сафиуллин Р. И., Хабибуллин Б. А., Иванов М. Д. (16 баллов).
HUST – Qian Li Xiang, Wu Chutian, Xu Shiwei (15 баллов).
ЮУрГУ-1 – Ваганов И. В., Леонов А. Ю., Пономарев В. С. (15 баллов)
Сборная-1 – Agajanov Eziz, Dursunov Kasymberdi (TAI), Garryyev Mekan (TSITC) (14 баллов).
DUT – Li Tengxiao, Shi Jiancheng, Xing Hanzheng (14 баллов).
ТГУ – Kotyrov Myratgeldi, Amanmadov Allamyrat, Merdanov Mekan (14 баллов).
4 Сборная-2 – Amannmadov A. G., Merdanov P., Rejepov E. (13 баллов).
HoHai – Da Wentao, Chen Pengcheng, Tao Jiale (13 баллов).
ГГУ-1 – Бужан А. В., Павленко А. В., Толкачев А. И. (13 баллов).
ХНУ – Николаенко А. А., Иваштенко А. Ю., Мазанов М. В. (13 баллов).
5 Сборная-3 – Овчаренко Г. В., Лукин И. В. (ХНУ), Костров М. А. (МГТУ) (12 баллов).
6 БелГУТ-2 – Гуторева А. В., Шуберт А. Ю., Демьянчук О. А. (11 баллов).
7 УрФУ-1 – Александрова Е. К., Дьячкова А. В., Мустафина Л. В. (10 баллов).
ЮУрГУ-2 – Широков Ю. А., Циоплиакис Н. И., Федотов Д. А. (10 баллов).
КНИТУ – Алтынбаев Р. А., Назаров Д. С., Царева А. А. (10 баллов).
8 ВОЕНМЕХ – Дидковский Д. А., Целищев Н. В., Кривуля С. В. (8 баллов).
9 Сборная-4 – Si Changxin, Xue Yizhen (DUT), Ермоленков А. В. (БРУ) (7 баллов).
Сборная-5 – Liu Jiahao, Li Hao Da (DBJI), Колячко В. В. (7 баллов).
Сборная-6 – Saparov Bagtyyar (УИТТ), Човдуров Ш., Тоймурадов А. (ТГПИ) (7 баллов).
ТГЭИ – Мамиев Ш., Рахымджанов Д. (7 баллов).
ГГУ-2 – Сомов П. В., Головин Е. Д., Клименко П. В. (7 баллов).
Сборная-7 – Хазипов И. Н., Муртазина А. К (УГНТУ), Кучеренко А. Д. (СибГУНТ) (7 баллов).
НГАСУ – Черемнов Д. Ю., Тимин П. Л., Минченко Е. А. (7 баллов).