

УДК 539.384

А. В. ЯРОВАЯ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОГОННЫМИ НАГРУЗКАМИ**

Рассмотрен осесимметричный изгиб упругой кольцевой трехслойной пластины с легким наполнителем, связанной с упругим основанием Винклера. Нагрузки – погонные силовые и моментные. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях. Приведены численные результаты для трехслойной пластины.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, основание Винклера, осесимметричная деформация, погонные силы и моменты, упругость.

Введение. Деформирование неоднородных элементов конструкций, не связанных с упругим основанием, под действием динамических и квазистатических нагрузок описано в работах [1–8]. Термоупругий изгиб сплошных круговых и кольцевых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием, под действием равномерно распределенных нагрузок рассмотрен в [9–13]. Здесь рассмотрена поперечно нагруженная погонными нагрузками упругая кольцевая трехслойная пластина на деформируемом основании, как это имеет место, например, в настилах и других элементах механических систем.

Математическая постановка задачи. Изгиб трехслойной кольцевой пластины рассматривается в цилиндрической системе координат r, φ, z . Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к радиусу внешнего контура r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя. В несущих слоях с толщинами h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т. е. в нем не учитывается работа касательных напряжений σ_{rz} . Вертикальная нагрузка действует на внешнюю поверхность пластины. На внешнем и внутреннем контурах пластины, радиусы которых r_0 и r_1 , предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в наполнителе ψ и радиальное перемещение u координатной плоскости не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Из гипотезы прямолинейности нормали наполнителя получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1); & u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Деформации в слоях следуют из выражений (1) и соотношений Коши [14]. Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости.

Реакция основания, в соответствии с моделью Винклера, принимается пропорциональной прогибу

$$q_R = \kappa_0 r_1 w,$$

где κ_0 – коэффициент постели.

Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и ее решение будут такими же, как для сплошных пластин [11]

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r;$$

$$w = C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0, \quad (2)$$

где C_1, C_2, \dots, C_8 – константы интегрирования; $\operatorname{ber}(\kappa r), \operatorname{bei}(\kappa r), \operatorname{ker}(\kappa r), \operatorname{kei}(\kappa r)$ – функции Кельвина; $\kappa^4 = \kappa_0 r_1 D, q = q_0 D, w_0$ – частное решение, зависящее от вида нагрузки; коэффициенты

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right),$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k,$$

$$K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k; \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

K_k, G_k – объемный и сдвиговой модули упругости материалов слоев.

В случае жесткой заделки контуров пластины (при $r = r_0, 1$) должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0. \quad (3)$$

При шарнирном опирании контуров ($r = r_0, 1$)

$$u = \psi = w = M_r = 0. \quad (4)$$

В соотношениях (2) функции Кельвина образуют фундаментальную систему решений

$$\phi_n(\kappa r) = \operatorname{ber}(\kappa r), \operatorname{bei}(\kappa r), \operatorname{ker}(\kappa r), \operatorname{kei}(\kappa r),$$

поэтому частное решение w_0 можно получить, используя ядро Коши $K(r, s)$:

$$w_0(r) = \int_{r_0}^r K(r, s) q(s) ds, \quad (5)$$

$$K(r, s) = C_1(s) \phi_1(r) + C_2(s) \phi_2(r) + C_3(s) \phi_3(r) + C_4(s) \phi_4(r).$$

Здесь функции $C_n(s)$ определяются отношениями

$$C_1(s) = \frac{W_1(s)}{W(s)}, \quad C_2(s) = \frac{W_2(s)}{W(s)}, \quad C_3(s) = \frac{W_3(s)}{W(s)}, \quad C_4(s) = \frac{W_4(s)}{W(s)},$$

где определители

$$W(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & \phi_2(r) & \phi_3(r) & \phi_4(r) \\ \phi_1'(r) & \phi_2'(r) & \phi_3'(r) & \phi_4'(r) \\ \phi_1''(r) & \phi_2''(r) & \phi_3''(r) & \phi_4''(r) \\ \phi_1'''(r) & \phi_2'''(r) & \phi_3'''(r) & \phi_4'''(r) \end{vmatrix}; \quad W_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & \phi_2(r) & \phi_3(r) & \phi_4(r) \\ 0 & \phi_2'(r) & \phi_3'(r) & \phi_4'(r) \\ 0 & \phi_2''(r) & \phi_3''(r) & \phi_4''(r) \\ 1 & \phi_2'''(r) & \phi_3'''(r) & \phi_4'''(r) \end{vmatrix};$$

$$W_2(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & 0 & \phi_3(r) & \phi_4(r) \\ \phi_1'(r) & 0 & \phi_3'(r) & \phi_4'(r) \\ \phi_1''(r) & 0 & \phi_3''(r) & \phi_4''(r) \\ \phi_1'''(r) & 1 & \phi_3'''(r) & \phi_4'''(r) \end{vmatrix}; \quad W_3(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & \phi_2(r) & 0 & \phi_4(r) \\ \phi_1'(r) & \phi_2'(r) & 0 & \phi_4'(r) \\ \phi_1''(r) & \phi_2''(r) & 0 & \phi_4''(r) \\ \phi_1'''(r) & \phi_2'''(r) & 1 & \phi_4'''(r) \end{vmatrix};$$

$$W_4(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & \phi_2(r) & \phi_3(r) & 0 \\ \phi_1'(r) & \phi_2'(r) & \phi_3'(r) & 0 \\ \phi_1''(r) & \phi_2''(r) & \phi_3''(r) & 0 \\ \phi_1'''(r) & \phi_2'''(r) & \phi_3'''(r) & 1 \end{vmatrix},$$

штрих вверх обозначает производную по r .

При жесткой заделке граничных контуров пластины решение (2) необходимо подставить в (3). В результате получим линейную систему из восьми алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$C_1 + C_2 = 0; \quad C_1 r_0 + C_2 / r_0 = 0; \quad C_3 + C_4 = 0; \quad C_3 r_0 + C_4 / r_0 = 0;$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \operatorname{ker} \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = w_0(1);$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = 0;$$

$$b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8 = -w_0'(1), \quad b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8 = 0, \quad (6)$$

где

$$b_3 = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa]; \quad b_4 = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa];$$

$$b_{30} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ker}_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa]; \quad b_{40} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ker}_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa];$$

$$b_{31} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)]; \quad b_{41} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)];$$

$$b_{32} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ker}_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)]; \quad b_{42} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ker}_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)].$$

Решение системы (6) будет следующим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_6 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad C_7 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad C_8 = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{ber } \kappa & \text{bei } \kappa & \text{ker } \kappa & \text{kei } \kappa \\ \text{ber}(\kappa r_0) & \text{bei}(\kappa r_0) & \text{ker}(\kappa r_0) & \text{kei}(\kappa r_0) \\ b_3 & b_4 & b_{30} & b_{40} \\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

а остальные определители получаются из приведенного заменой столбца, соответствующего нижнему индексу определителя, на столбец свободных членов из правой части последних четырех уравнений системы.

Если оба контура пластины шарнирно оперты, то решение (2) необходимо подставить в (4). В результате получим систему из восьми линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Изгиб пластины поперечной силой. Пусть на рассматриваемую кольцевую пластину действует погонная поперечная нагрузка $Q(r)$ постоянной интенсивности Q_0 , приложенная вдоль окружности радиуса $r = a$ ($r_0 \leq a \leq r_1$):

$$Q(r) = Q_0 \delta(r - a). \quad (8)$$

Частное решение (5) и его значения на граничных контурах пластины, исходя из определения дельта-функции Дирака $\delta(r)$, при нагрузке (8) будут

$$w_0(r) = DQ_0 \int_0^r K(r, s) \delta(s - a) ds = DQ_0 K(r, a), \quad w'_0(r_1) = DQ_0 \left. \frac{\partial K(r, a)}{\partial r} \right|_{r=r_1},$$

$$w_0(r_1) = DQ_0 K(r_1, a).$$

Таким образом, перемещения в трехслойной кольцевой пластине с защемленными граничными контурами при локальном воздействии погонной поперечной нагрузки описываются выражениями (2) с константами интегрирования (7) при учете соотношений (8).

Численное исследование решения проводилось для пластины единичного радиуса ($r_1 = 1$), слою которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов слоев и оснований приведены в [15, 16]. Геометрические параметры пластины, отнесенные к ее радиусу: $r_0 = 0,2$; $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$.

На рисунке 1 показано изменение прогиба рассматриваемой кольцевой пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных радиусах силовой окружности: 1 – $a = 0,4$; 2 – $a = 0,6$;

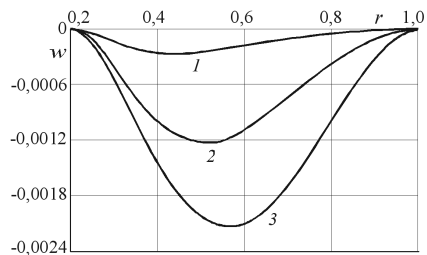


Рисунок 1 – Прогiby кольцевой пластины под действием погонной силы

$3 - a = 0,8$. Интенсивность погонной нагрузки $Q_0 = 500$ кН/м. Максимальных значений перемещения достигают при радиусе силовой окружности $a = 0,6$.

Изгиб пластины погонными моментами. На исследуемую кольцевую пластину действуют погонные моменты интенсивности $M_0 = \text{const}$, распределенные по окружности радиуса $r = a$ ($r_0 \leq a \leq r_1$):

$$M(r) = M_0 \delta(r - a).$$

Соответствующее частное решение (5) и его значения на контуре будут

$$w_0(r) = -DM_0 \left. \frac{\partial K(r,s)}{\partial s} \right|_{s=a}; \quad w'_0(r_1) = -DM_0 \left. \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r \partial s} \right|_{r=r_1, s=a};$$

$$w_0(r_1) = -DM_0 \left. \frac{\partial K(r_1,s)}{\partial s} \right|_{s=a}. \quad (9)$$

Таким образом, перемещения в трехслойной кольцевой пластине под воздействием погонных моментов, описываются выражениями (2), с константами интегрирования (7) при учете соотношений (9).

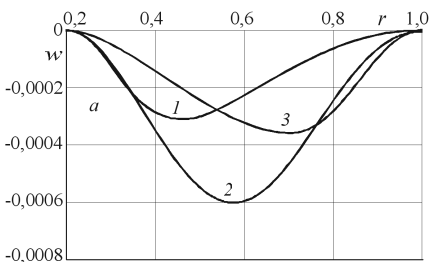


Рисунок 2 – Прогибы пластины под действием погонных моментов

На рисунке 2 показано изменение прогиба рассматриваемой кольцевой пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных радиусах силовой окружности: 1 – $a = 0,4$; 2 – $a = 0,6$; 3 – $a = 0,8$. Интенсивность нагрузки $Q_0 = 1000$ кН/м, коэффициент постели $k_0 = 1000$ МПа/м. Максимальных значений перемещения достигают при радиусе силовой окружности $a = 0,6$.

Выводы. Приведенное в работе общее решение (2) позволяет исследовать любой случай симметричного изгиба локальными нагрузками трехслойной кольцевой пластины с легким заполнителем на упругом основании при различных способах закрепления ее внешнего и внутреннего контуров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Gorshkov, A. G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2001. – Vol. 37, No. 9. – P. 1196–1203.

2 Starovoitov, E. I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 12. – P. 1458–1463.

3 Тарлаковский, Д. В. Нестационарные задачи для упругой полуплоскости с подвижной точкой смены граничных условий // Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 188–206.

4 **Starovoitov, E. I.** Circular sandwich plates under local impulsive loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39, No. 8. – P. 945–952.

5 **Tarlakovskii, D. V.** Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenko // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246–253.

6 **Qiu, X.** Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / X. Qiu, V. S. Deshpande, N. A. Fleck // *Journal of Applied Mechanics*. – 2004. – Vol. 71, No. 5. – P. 637–645.

7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

8 **Яровая, А. В.** Перемещения в трехслойной ортотропной пластине с усиливающей накладкой / А. В. Яровая // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 224–232.

9 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2006. – Vol. 42, No. 2. – P. 206–213.

10 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Прикладная механика*. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 94–103.

11 **Журавков, М. А.** Нелинейное деформирование трехслойного металлополимерного стержня локальными нагрузками / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Полимерные материалы и технологии*. – 2016. – Т. 2, № 1. – С. 68–74.

12 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб трехслойного стержня ступенчато-переменной толщины / Э. И. Старовойтов, Е. Э. Старовойтова // *Актуальные вопросы машиноведения*. – 2012. – Т. 1. – С. 202–205.

13 **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб трехслойной прямоугольной пластины с нерегулярной границей / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Актуальные вопросы машиноведения*. – 2015. – Т. 4. – С. 201–204.

14 **Starovoitov, E. I.** Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. V. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.

15 **Яровая, А. В.** Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

16 **Старовойтов, Э. И.** Сопrotивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : Физматлит, 2008. – 384 с.

A. V. YAROVAYA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

BENDING OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE ON THE ELASTIC BASIS BY LINEAR LOADS

The axisymmetric bending of an elastic circular three-layer plate with light filler resting on the Winkler's elastic base is considered. The loads are the linear forces and torques. For the description of the package kinematics considering its asymmetrical thickness the broken normal hypothesis are accepted. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained. Numerical results for a three-layer plate are presented.

Получено 31.10.2019