

УДК 539.384

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹, М. А. ЖУРАВКОВ²¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПОГОННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Рассмотрено осесимметричное деформирование трехслойной круговой пластины погонными нагрузками. Материалы несущих слоев пластины приняты упругопластическими, наполнитель – нелинейно упругий. Для описания кинематики пакета используются гипотезы ломаной нормали. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине относительно толстом наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учитывается работа наполнителя при сдвиге. Приведена постановка соответствующей краевой задачи. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Решение краевой задачи получено методом упругих решений Ильюшина. Численные результаты получены для пластины, слой которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Исследовано влияние физической нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, осесимметричная деформация, погонные силы и моменты, упругость, пластичность.

Введение. Современные требования машиностроения к оценке прочностных характеристик композитных конструкций, работающих в условиях повышенных внешних нагрузок, обуславливают необходимость создания расчетных моделей, описывающих деформирование в физически нелинейной области при различного вида нагрузках, в том числе погонных.

Этой проблеме посвящен ряд публикаций. Свободные, вынужденные колебания и динамические напряжения в неоднородных пластинах и оболочках исследовались в статьях [1–6]. Отдельные задачи квазистатического деформирования упругопластических трехслойных элементов конструкций, в том числе связанных с упругим основанием, при однократных и циклических нагрузках решены в работах [7–12].

Здесь приведены аналитические решения краевых задач об осесимметричном деформировании трехслойной круговой пластины кольцевыми погонными силовыми и моментными нагрузками. Выполнены расчеты для случая металлополимерных материалов слоев.

1. Постановка и общее решение задачи. Для внешних несущих слоев несимметричной по толщине ($h_1 \neq h_2$) трехслойной круговой пластины приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности деформированной нормали к срединной поверхности. Наполнитель –

жесткий, достаточно толстый ($h_3 = 2c$). Для него справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая поворачивается относительно срединной поверхности на дополнительный угол $\psi(r)$. Учтена работа заполнителя при сдвиге. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою.

К наружной поверхности первого слоя ($z = c + h_1$) приложена нагрузка. В силу ее симметрии тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ – здесь и далее номер слоя). Прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 . На контуре предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$).

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются нелинейные физические уравнения состояния:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\epsilon_u^{(k)}))\epsilon_\alpha^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\epsilon^{(k)}; \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_3(\epsilon_u^{(3)}))\epsilon_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\epsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования; $\omega_k(\epsilon_u^{(k)})$ – функции физической нелинейности материалов слоев, которые при $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю, $\epsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, $\epsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести (физической нелинейности); $s_{rz}^{(3)}$, $\epsilon_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе; k – номер слоя.

Система уравнений равновесия рассматриваемой трехслойной пластины в случае равномерно распределенной поверхностной нагрузки $q(r)$ получено в [13]. Ее решение проведено методом упругих решений:

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3^{(n)} K_1(\beta r) + \Psi_r^{(n)}; \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \Psi^{(n)} + C_7^{(n)} r + \frac{C_8}{r} \right]; \\ w^{(n)} &= \frac{1}{b_3} \left[b_2 \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \Psi_r^{(n)} dr \right) - \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) - L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right) dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} + C_6 \ln r + C_4^{(n)} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где n – номер приближения; a_i – коэффициенты, выражаемые через геометрические и упругие параметры материалов слоев, формулы для которых приведены в [13]; $I_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка, $K_1(\beta r)$ – функция Макдональда; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_2^{-1} , L_3^{-1} – интегральные операторы

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f \, dr \, dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr;$$

$\Psi_r^{(n)}(r)$ – частное решение уравнения Бесселя

$$\Psi_r^{(n)}(r) = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f^{(n-1)} r \, dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f^{(n-1)} r \, dr;$$

$f^{(n-1)}(r)$ – подынтегральная функция, включающая нелинейные добавки и определяемая по результатам предыдущего приближения

$$f^{(n-1)}(r) = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[h_\omega^{(n-1)} - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} p_\omega^{(n-1)} + \frac{b_2}{b_3 r} \int (q - q_\omega^{(n-1)}) r \, dr \right],$$

величины $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$ называются «дополнительными» внешними нагрузками, их на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения

$$h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)} \, ,_r + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)}) - Q_\omega^{(n-1)}; \quad p_\omega^{(n-1)} = T_{r\omega}^{(n-1)} \, ,_r + \frac{1}{r} (T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)});$$

$$q_\omega^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)} \, ,_{rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega}^{(n-1)} \, ,_r - M_{\varphi\omega}^{(n-1)} \, ,_r);$$

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}, T_k) \vartheta_\alpha^{(k,n-1)} \, dz;$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}, T_k) \vartheta_\alpha^{(k,n-1)} z \, dz;$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c (T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}) \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$Q_\omega^{(n-1)} = \int_{-c}^c 2G_k \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}, T_k) \vartheta_{rz}^{(k,n-1)} \, dz;$$

$$\beta^2 = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ определяются на каждом шаге приближения исходя из граничных условий и ограниченности решения в центре пластины.

Погонная поперечная сила. Пусть на рассматриваемую трехслойную пластину действует погонная поперечная сила постоянной интенсивности $Q(r) = Q_0$, приложенная к окружности радиуса $r = a$. Итерационное решение построено по решению (2) при стремлении толщины кольца распределенной нагрузки к нулю и сохранении ее модуля. В результате получим

$$\begin{aligned}\Psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3^{(n)} K_1(\beta r) + \Psi_r^{(n)}; \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)}, \quad \Psi^{(n)} = \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8^{(n)}}{r}; \\ w^{(n)} &= \frac{b_2}{b_3} \int \Psi^{(n)} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(Q) dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1^{(n)}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)},\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_r^{(n)} &= \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \left(\frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\ &\quad - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + \\ &\quad + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right]; \\ \int L_3^{-1}(Q) dr &= \frac{Q_0 a}{4} \left(r^2 - a^2 - a^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r).\end{aligned}$$

Численные результаты получены для круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-4–Д16Т. Все необходимые функции нелинейности этих материалов, введенные соотношениями (1), приведены в [13, 14]. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , относительные толщины слоев: $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$. Интенсивность погонной нагрузки $Q_0 = 4$ МН/м.

Графики на рисунке 1 иллюстрируют изменение прогиба w в центре пластины в зависимости от радиуса силовой окружности b . Результаты расчетов показывают, что учет физической нелинейности материалов слоев увеличивает расчетные прогибы на 17 %.

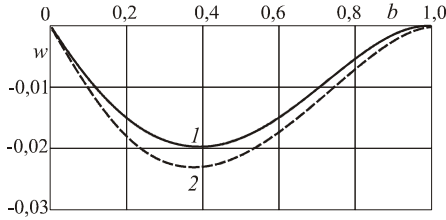


Рисунок 1 – Зависимость прогиба от радиуса силовой окружности:
1 – упругий материал; 2 – с учетом физической нелинейности

Погонные моменты. На исследуемую пластину действуют погонные моменты интенсивности $M_0 = \text{const}$, распределенные по окружности радиуса $r = a$. Решение задачи проведем, используя разность решений (3) для двух одинаковых погонных поперечных сил, действующих на близко расположенных окружностях радиусов $r = a - \xi$ и $r = a + \xi$. В этой разности произведем замену $Q_0 = M_0/(2\xi)$ и устремим параметр ξ к нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3^{(n)} K_1(\beta r) + \psi_r^{\prime(n)}; \\ w^{(n)} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi_r^{\prime(n)} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{\prime(n-1)}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(M') dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{\prime(n-1)}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1^{(n)}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)}; \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)}, \quad \psi_r^{(n)} = \frac{a_2}{a_1} \psi_r^{\prime(n)} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{\prime(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8^{(n)}}{r}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)} &= \frac{\gamma_1 M_0}{\beta} H_0(a-r) \left(\frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) (I_0(\beta a) + I_1(\beta a) \beta a) - \right. \\ &\quad \left. - I_1(\beta r) (K_0(\beta a) - K_1(\beta a) \beta a) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2 r} - \right. \\ &\quad \left. - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{\prime(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{\prime(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{\prime(n-1)} r dr \right) dr \right] + \right. \\ &\quad \left. + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{\prime(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{\prime(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{\prime(n-1)} r dr \right) dr \right] \right]; \\ \int L_3^{-1}(M_0') dr &= \frac{M_0}{4} \left(2r^2 - 2a^2 - 3a^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r). \end{aligned}$$

Численные результаты в рамках введенных ранее предположений при интенсивности погонных моментов $M_0 = 0,3 \text{ МН}$.

На рисунке 2, *a* и *б* показано изменение сдвига в заполнителе и прогиба круговой трехслойной пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены в соответствии с формулами (4) при радиусе моментной окружности $a = 0,75$: 1 – упругие; 2 – физически нелинейные. При изотермическом нагружении учет физической нелинейности материалов слоев приводит к изменению значения упругого прогиба на 14 %. У сдвигов максимумы в виде пиков наблюдаются вдоль радиусов приложения погонных моментов. Их величина при учете нелинейности материалов слоев увеличивается по модулю.

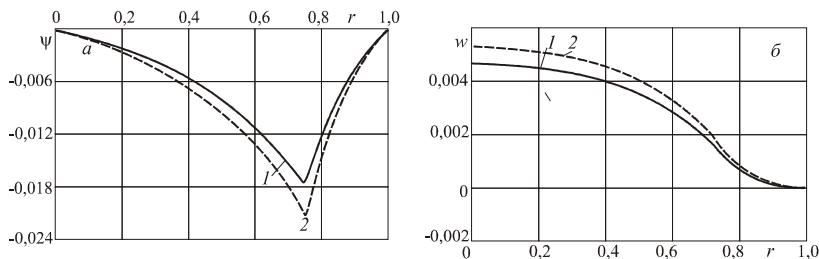


Рисунок 2 – Изменение сдвига (*a*) и прогиба (*б*) вдоль радиуса пластины

Заключение. Полученные решения уравнений равновесия трехслойных круговых пластин позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние при погонных силовых и моментных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние физической нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T18P-090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.
- 2 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.
- 3 **Tarлакoвskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarлакoвskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
- 4 **Тарлаковский, Д. В.** Нестационарные задачи для упругой полуплоскости с подвижной точкой смены граничных условий // Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 188–206.
- 5 **Qiu, X.** Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / X. Qiu, V. S. Deshpande, N. A. Fleck // Journal of Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 71, No. 5. – P. 637–645.

6 Ivañez, I. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – Vol. 133. – P. 1127–1136.

7 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

8 Starovoirov, E. I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E. I. Starovoirov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

9 Старовойтов, Э. И. Напряженно-деформированное состояние трехслойной ортотропной пластины с жесткой накладкой при цилиндрическом изгибе / Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 2 (31). – С. 107–112.

10 Старовойтов, Э. И. Упругая трехслойная балка в температурном поле под действием сосредоточенной силы / Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 220–229.

11 Козел, А. Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

12 Козел, А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

13 Старовойтов, Э. И. Сопrotivление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : Физматлит, 2008. – 384 с.

14 Трацевская, Е. Ю. Экспериментальное исследование динамических характеристик неустойчивости трехфазных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 2. – С. 57–64.

E. I. STAROVOITOV¹, M. A. ZHURAVKOV²

¹*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

²*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

DEFORMATION OF A THREE-LAYER ELASTOPLASTIC PLATE BY LINEAR LOADS

An axisymmetric deformation of a three-layer circular plate by linear loads is considered. The materials of the bearing layers of the plate are elastic-plastic, the filler is nonlinear elastic. For the asymmetric in thickness three-layer plate the kinematic hypothesis of a broken normal are assumed. In the thin external layers the Kirchhoff's hypotheses are applied. The filler is no compressible through thickness and relatively thick so for its description the Timoshenko's hypothesis on the straightness and incompressibility of the deformed normal. The work of the filler at shear is taken into account. The formulation of a corresponding boundary value problem is given. The equilibrium equations are obtained by the Lagrange variational method. The boundary problem solution is obtained by the Ilyushin's elastic solution method. Numerical results are calculated for a plate with layers made from D16T–fluoroplast-4–D16T materials. The boundary conditions correspond to the hinge support of the plate contour. The influence of the physical nonlinearity of the layer materials on the displacements in the plate is investigated.

Получено 01.09.2019