

УДК 539.377

*А. В. НЕСТЕРОВИЧ**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ  
КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ  
ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ**

Рассмотрено равномерное растяжение-сжатие и кручение упругой трехслойной круговой пластины под действием постоянных радиальных и тангенциальных нагрузок в температурном поле. Уравнения равновесия получены вариационными методами и решены методом прямого интегрирования. Проведен численный анализ напряженного состояния при различных температурах. Приведены графики распределения напряжений в слоях пластины вдоль радиуса.

**Ключевые слова:** круговая пластина, растяжение-сжатие, кручение, напряженное состояние, температура.

**Введение.** Пластинчатые системы в настоящее время широко применяются в строительной отрасли, судостроении, при создании авиакосмических объектов. Поэтому проблема расчета подобных элементов конструкций является актуальной.

Деформированию и колебаниям слоистых элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки соответствующих краевых задач и методы расчета приведены в монографиях [1, 2]. Результаты, связанные с изотермическими динамическими нагружениями слоистых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [3–5]. Квазистатические нагружения слоистых элементов конструкций приведены в [6, 7]. Определение напряжений в контактной задаче с подвижными границами изложено в [8]. Термопластическое деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в публикациях [9–12]. Деформирование различных пластин со сжимаемым наполнителем представлены в [13–15]. Результаты по осесимметричному и неосесимметричному деформированию круговой однослойной пластины приведены в [16–19]. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении получены в [20].

В предлагаемой работе рассматривается осесимметричное деформирование трехслойной круговой пластины в своей плоскости. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной со срединной плоскостью наполнителя. К верхней плоскости пластины приложена непрерывно распределенная нагрузка, проекции которой на радиальную и тангенциальную оси координат:  $p_r(r, \varphi), p_\varphi(r, \varphi)$ .

Уравнения равновесия в перемещениях упругой трехслойной пластины при деформировании в своей плоскости получены из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$a_1 \left( u_r, r_{rr} + \frac{u_r r_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -p_r, \quad a_2 \left( u_\varphi, r_{rr} + \frac{u_\varphi r_r}{r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) = -p_\varphi, \quad (1)$$

где  $u_r$ ,  $u_\varphi$  – радиальное и тангенциальное перемещения;  $a_i$  – коэффициенты, зависящие от температуры и определяемые через геометрические и упругие характеристики материалов слоев:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left( K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) dz,$$

$G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – модули сдвига и объемной деформации материалов;  $k$  – номер слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия (1) не содержат температуру  $T$  в явном виде, но ее воздействие скажется на модулях упругости, входящих в коэффициенты  $a_i$ . Зависимость модулей от температуры предполагается линейной и описываемой формулой Белла [1]

$$\{G(t), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(t),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где  $T_m$  – температура плавления материала;  $G(0)$ ,  $K(0)$ ,  $E(0)$  – значения модулей при «нулевой» температуре, которые можно определить, зная  $G_0$  при некоторой температуре, например комнатной  $T_0$ , тогда  $G(0) = G_0/\varphi(T_0)$ .

Решение системы уравнений (1) будет следующим:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r} \int_0^r \int_0^r p_r dr dr, \quad u_\varphi = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{1}{a_2 r} \int_0^r \int_0^r p_\varphi dr dr, \quad (2)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий, причем  $C_2 = C_4 = 0$  из условия ограниченности перемещений в центре пластины.

При жесткой заделке и шарнирном опирании контура при  $r = r_0$  перемещения будут равны нулю, тогда при постоянных нагрузках  $p_r, p_\varphi$  получим

$$C_1 = \frac{p_r r_0}{3a_1}, \quad C_3 = \frac{p_\varphi r_0}{3a_2}.$$

В результате, перемещения (2) приводятся к виду

$$u_r = \frac{p_r r}{3a_1} (r_0 - r), \quad u_\varphi = \frac{p_\varphi r}{3a_2} (r_0 - r). \quad (3)$$

В этом случае деформации будут одинаковы во всех слоях и определяться из соотношений Коши [1] и перемещений (3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = u_{r,r} &= \frac{p_r}{3a_1}(r_0 - 2r), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{p_r}{3a_1}(r_0 - r), \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = -\frac{p_\varphi r}{6a_{13}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты напряжений в слоях рассматриваемой пластины получим с помощью закона Гука и с учетом гипотезы Дюгамеля – Неймана с использованием деформаций (4):

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \frac{p_r}{3a_1} \left( K_k(T_k)(2r_0 - 3r) + G_k(T_k) \left( \frac{2}{3}r_0 - 2r \right) \right) - 3K_k(T_k)\alpha_0^{(k)}T_k, \quad (5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{p_r}{3a_1} \left( K_k(T_k)(2r_0 - 3r) + \frac{2}{3}G_k(T_k)r_0 \right) - 3K_k(T_k)\alpha_0^{(k)}T_k, \quad \sigma_{r\varphi}^{(k)} = -\frac{G_k(T_k)p_\varphi}{3a_{13}}r,$$

где  $\alpha_0^{(k)}$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $T_k$  – приращение температуры; ( $k = 1, 2, 3$ ).

**Численные результаты** получены при постоянных нагрузках  $p_r = p_\varphi = 50$  МПа, распределенных по всей поверхности пластины. Материалы слоев Д16Т-фторопласт-Д16Т, радиус пластины  $r_0 = 1$  м. Термомеханические характеристики материалов заимствованы из [2, 21–23].

На рисунке 1 показано изменение радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$ : *a* – в несущих слоях пластины, *б* – в наполнителе при различных температурах: 1 –  $T = 293$  К, 2 –  $T = 313$  К, 3 –  $T = 333$  К.

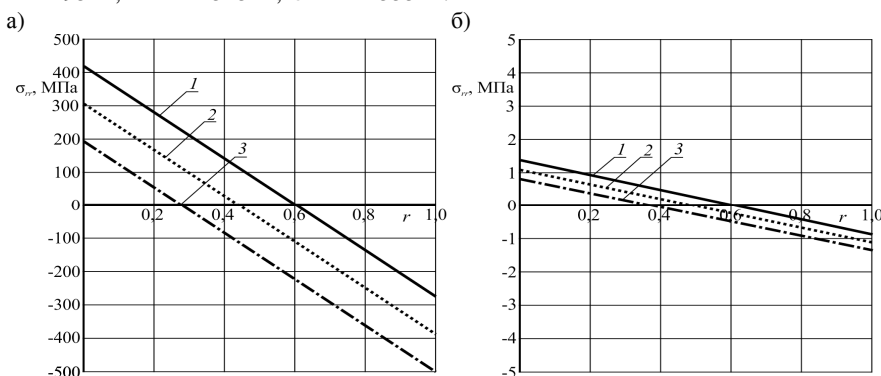


Рисунок 1 – Изменение радиальных напряжений в пластине

В холодном состоянии пластины напряжения максимальны в центре, при нагреве на  $20^\circ$  они уменьшаются на 27 %, при нагреве на  $40^\circ$  – на 54 %. На контуре пластины напряжения сжатия вырастают по модулю до 84 % и ста-

новятся больше, чем в центре. В заполнителе наблюдается аналогичный процесс: в центре напряжения уменьшаются до 40 %, на контуре вырастают по модулю до 62 %. Аналогичное изменение тангенциальных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  иллюстрирует рисунок 2. В центре пластины они совпадают с радиальными напряжениями, на контуре – меньше по модулю (нумерация кривых пружня).

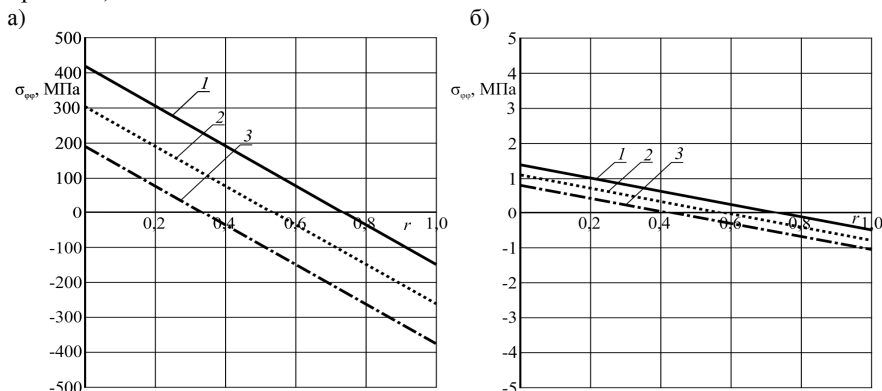


Рисунок 2 – Изменение тангенциальных напряжений в пластине

На рисунке 3 отображены изменения касательных напряжений  $\sigma_{r\varphi}$ , возникающих за счет деформации кручения: *a* – в несущих слоях, *б* – в заполнителе (нумерация кривых пружня). Здесь нагревание слабо влияет на их величину.

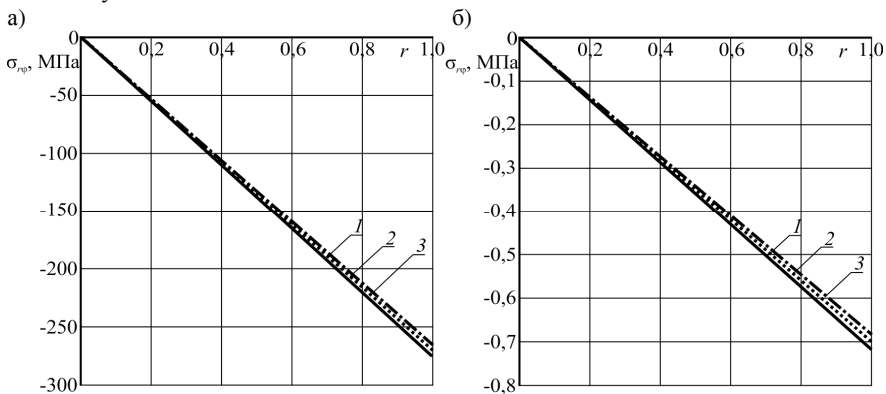


Рисунок 3 – Изменение сдвиговых напряжений в пластине

**Заключение.** Предложенная постановка и решение краевой задачи позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойных круговых пластин под действием термосилового нагружения в своей плоскости.

Численные расчеты показали существенное влияние температуры на напряжения в пластине.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Starovoitov E. I.** Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.

2 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : Физматлит, 2008. – 384 с.

3 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34, № 5. – С. 70–79.

4 **Starovoitov, E. I.** Circular sandwich plates under local impulsive loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 8. – P. 945–952.

5 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

6 **Москвитин, В. В.** Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.

7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

8 **Tarlakovskii, D. V.** Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotkov // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246–253.

9 **Старовойтов, Э. И.** Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

10 **Starovoitov, E. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

11 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

12 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

13 **Захарчук, Ю. В.** Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4(33). – С. 53–57.

14 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

15 **Зеленая, А. С.** Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 10. – С. 67–74.

16 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.

17 **Нестерович, А. В.** Осесимметричное растяжение-сжатие круговой трехслойной пластины в температурном поле / А. В. Нестерович // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019 : сб. статей по материалам конф. с междунар. участием. – Чебоксары : ИД Среда, 2019. – С. 42–46.

18 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

19 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

20 **Нестерович, А. В.** Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

21 **Starovoitov, E. I.** Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No. 5. – P. 561–570.

22 **Трацевская, Е. Ю.** Экспериментальное исследование динамических характеристик неустойчивости трехфазных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 2. – С. 57–64.

23 **Трацевская, Е. Ю.** Экспериментальное исследование характеристик пластичности неводонасыщенных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 1. – С. 54–65.

*A. V. NESTEROVICH*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **THE STRESS STATE OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE UNDER THE AXISYMMETRIC LOADING IN ITS PLANE**

The uniform tension-compression and torsion of an elastic three-layer circular plate under the action of constant radial and tangential loads in the temperature field is considered. The equilibrium equations are obtained by the variational methods and solved by the direct integration. The numerical analysis of the stress state at different temperatures is carried out. The diagrams of the plate layers stress distribution along the radius are shown.

Получено 08.11.2019