

УДК 624.072.23

О. В. КОЗУНОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

УЧЕТ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ШАРНИРНО СОЕДИНЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

Предлагается универсальный подход для расчета шарнирно соединенных железобетонных балок на упругом основании Винклера, который основан на смешанном методе строительной механики. Физическая нелинейность материала балок рассматривается как переменная жесткость участков Жемочкина. После нахождения сил в связях области контакта каждой балки с упругим основанием в результате линейного расчета определяются величины изгибающих моментов. Затем по ним находится касательная жесткость для каждого участка по зависимости «момент-кривизна» в виде гиперболического тангенса. Приведен численный пример расчета деформирования системы из трех шарнирно соединенных железобетонных балок на винклеровском основании под действием внешней нагрузки.

Ключевые слова: шарнирно соединенные балки, физическая нелинейность, основание Винклера, смешанный метод строительной механики, метод Жемочкина.

Введение. Из анализа научной литературы по расчету шарнирно-соединенных конструкций на упругом основании [1–4] можно сделать вывод об отсутствии общего подхода к решению этой проблемы, справедливого для шарнирно-соединенных балок и плит и оснований, которые описываются различными моделями, под действием произвольной внешней нагрузки.

В работе предлагается универсальный подход для расчета шарнирно-соединенных балок с учетом их физической нелинейности на упругом основании, основанный на смешанном методе строительной механики [5] и методе Жемочкина с учетом функций влияния упругой среды [6]. Этот подход справедлив для балок различной длины и жесткости, расположенных на любой модели упругого основания и находящихся под действием произвольной внешней вертикальной нагрузки.

Постановка задачи. Рассмотрим систему шарнирно-соединенных балок на упругом основании под действием внешней нагрузки (рисунок 1). Требуется: определить распределение контактных напряжений под балками, внутренние усилия (поперечные силы и изгибающие моменты) в балках, силы в шарнирах и осадки упругого основания. Предполагаем [7], что на контакте балки с основанием действуют только нормальные напряжения, для балок справедливы гипотезы теории изгиба, шарниры между балками являются цилиндрическими. Распределение контактных напряжений по ширине конструкции – равномерное.

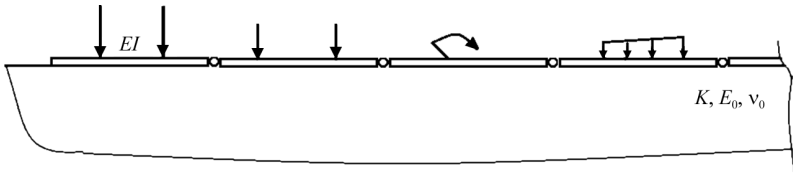


Рисунок 1 – Расчетная модель системы шарнирно-соединенных балок на упругом основании

Разобьем каждую балку на участки равной длины и в центре каждого участка поставим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт балки с упругим основанием (рисунок 2). Полученную статически неопределимую систему решаем смешанным методом строительной механики [5], приняв за неизвестные усилия X_k в связях Жемочкина в контактной зоне, линейные и угловые перемещения u_j , φ_j введенных на краях балок защемления и поперечные силы Q_j в разрезанных промежуточных шарнирах.

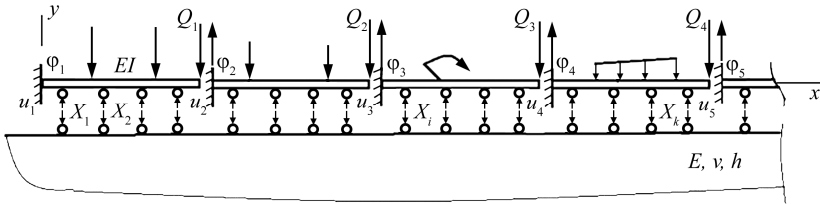


Рисунок 2 – Основная система и неизвестные смешанного метода, связи Жемочкина в контактной зоне

Алгоритм расчета. На рисунке 2 приведена основная система смешанного метода, система канонических уравнений которого для расчета одной балки с номером j имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,m}X_m + u_j - \varphi_j x_1 - \delta_{1Q}Q_j + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{m,1}X_1 + \dots + \delta_{m,m}X_m + u_j - \varphi_j x_m - \delta_{mQ}Q_j + \Delta_{mP} = 0; \\ - \sum_{k=1}^m X_k + Q_j + R = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k x_k - \lambda Q_j - M = 0; \\ \sum_{k=1}^m \delta_{kQ}X_k - \delta_{jQ}Q_j - u_j + \lambda \varphi + \Delta_{jP} + u_{j+1} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\delta_{i,k}$ – линейное смещение, возникающее в i -й связи Жемочкина от единичного воздействия, приложенного в k -й связи Жемочкина; m – число участков и связей Жемочкина на одной балке; $\delta_{i,Q}$ – линейное смещение, возникающее в i -й связи Жемочкина, от поперечной силы в промежуточном шарнире j -й балки; Q_j – поперечная сила в разрезанном шарнире по правую сторону балки с номером j ; Δ_{iP} – линейное смещение, возникающее в i -й связи Жемочкина от внешней нагрузки; R, M – равнодействующая внешних сил и момент равнодействующей относительно введенного защемления на балке с номером j ; λ – линейный параметр, в данной постановке задачи соответствует длине деформируемой балки; Δ_{jP} – линейное смещение, возникающее в промежуточном шарнире j -й балки, от ее внешней нагрузки.

Коэффициенты при неизвестных системы канонических уравнений смешанного метода (1) имеют следующий вид:

1) для основания Винклера [8]

$$\delta_{i,k} = \frac{1}{Kbc} + \frac{\lambda^3}{3EI} w_{i,k}, \quad i = k; \quad (2)$$

$$\delta_{i,k} = \frac{\lambda^3}{3EI} w_{i,k}, \quad i \neq k,$$

где K – коэффициент постели упругого основания; b и c – размеры участка Жемочкина на балке (b – ширина балки); EI – изгибная жесткость балки;

2) для упругого полупространства с модулем упругости E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0

$$\delta_{i,k} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 c} F_{i,k} + \frac{\lambda^3}{3EI} w_{i,k}, \quad (3)$$

где безразмерная функция влияния Жемочкина $F_{i,k}$ определяется соотношениями [6]

$$F_{i,i} = 2 \frac{c}{b} \left[\ln \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \ln \left(\frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} \right) \right];$$

$$F_{i,k} = \frac{1}{|x_i - x_k|}. \quad (4)$$

Отметим, что последнее уравнение в (1) выражает условие отсутствия взаимного вертикального перемещения в промежуточном шарнире между соседними балками. Свободные члены системы (1) зависят от вида внешней нагрузки и определяются с использованием формул (5) (см. далее).

Безразмерные прогибы балки с защемлением на краю балки в основной системе смешанного определяются по формуле [6]

$$w_{i,k} = \frac{x_i^2}{\lambda^2} \left(3 \frac{x_k}{\lambda} - \frac{x_i}{\lambda} \right), \quad x_k > x_i; \quad (5)$$

$$w_{i,k} = \frac{x_k^2}{\lambda^2} \left(3 \frac{x_i}{\lambda} - \frac{x_k}{\lambda} \right), \quad x_k < x_i.$$

Если обозначить число балок через N , то общее число неизвестных усилий в связях Жемочкина, линейных и угловых перемещений введенных защемлений на балках и поперечных сил в промежуточных шарнирах для расчета этой системы шарнирно-соединенных балок выразится формулой

$$N(m+2) + N - 1. \quad (6)$$

Структура системы разрешающих уравнений для системы шарнирно-соединенных балок имеет диагональный вид. Блоки по главной диагонали образованы по системе (1), побочные блоки являются нулевыми в случае упругого основания Винклера (2), в случае упругого полупространства они характеризуют взаимное влияние балок и определяются с использованием формул (3), (4).

Учет физической нелинейности материала в балке. Алгоритм нелинейного расчета. После нахождения сил в связях Жемочкина на контакте каждой балки с упругим основанием в результате линейного расчета определяются величины изгибающих моментов в сечениях всех балок известными методами строительной механики [6].

По вычисленным значениям моментов определяется касательная жесткость для каждого участка Жемочкина по зависимости «момент-кривизна» для сечений балки. В работе она принята в виде гиперболического тангенса, предложенного ранее в работе автора [9].

Поэтому

$$B_i^{(1)} = \frac{B_0}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{B_0}{M_{\text{lim}}} \chi_i^{(0)} \right)}, \quad (7)$$

где B_0 – начальная изгибная жесткость участка Жемочкина с номером i по упругому расчету (нулевая итерация); M_{lim} – предельный момент, воспринимаемый сечением балки. В работе определялся по программе Бета [10]; $\chi_i^{(0)}$ – кривизна на участке Жемочкина с номером i , определяемая после упругого расчета по формуле конечных разностей [7].

$$\chi_i^{(0)} = \frac{y_{i+1}^{(0)} - 2y_i^{(0)} + y_{i-1}^{(0)}}{c^2}, \quad (8)$$

где $y_i^{(0)}$ – вертикальное перемещение в центре участка Жемочкина с номером i по упругому расчету. Оно определяется по известным усилиям в связях для упругого основания Винклера по формуле

$$y_i^{(0)} = \frac{\chi_i^{(0)}}{k}, \quad (9)$$

а для упругого полупространства –

$$y_i^{(0)} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^N F_{i,n} \chi_n^{(0)}. \quad (10)$$

В дальнейшем расчете необходимо определить коэффициенты канонических уравнений $\delta_{i,k}^{(1)}$ и $\Delta_{iP}^{(1)}$ как для балки переменной жесткости. Для этого используем представление интеграла Мора [6] в виде суммы

$$\delta_{i,k}^{(1)} = \sum_{n=1}^m \frac{M_i^n M_k^n}{B_n^{(1)}} \Delta x. \quad (11)$$

Соответствующие перемножаемые эпюры для балки приведены на рисунке 3. Аналогичным образом определяются свободные члены $\Delta_{iP}^{(1)}$ системы (1).

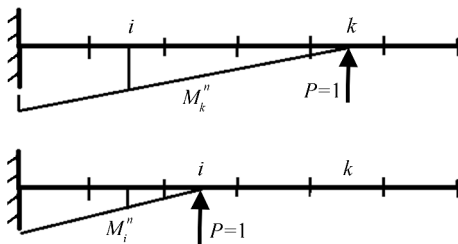


Рисунок 3 – Перемножаемые эпюры для балки переменной жесткости

По вычисленным значениям $\delta_{i,k}^{(1)}$ и $\Delta_{iP}^{(1)}$ снова решается система (1) и определяются новые значения $X_i^{(1)}$ в связях Жемочкина. Для определения скорректированных величин жесткости $B_i^{(2)}$ на каждом участке Жемочкина повторяются вычисления (7)–(11).

Далее снова определяются $\delta_{i,k}^{(2)}$ и $\Delta_{iP}^{(2)}$, решается система (1), определяются $X_i^{(2)}$ и т.д. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\left| M_i^{(r)} - M_i^{(r-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad (12)$$

где ε – заданная величина погрешности.

Численные результаты. Рассмотрим систему из трех шарнирно соединенных балок одинаковой длины $l = 5$ м и сечением $1,2 \times 0,4$ м из тяжелого бетона класса $C^{20/25}$ на упругом основании Винклера с коэффициентом постели $K = 2000$ кН/м³. Средняя балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = 120$ кН/м. При расчете каждая балка разбивалась на 21 участок Жемочкина.

В таблице 1 приведены численные значения контактных напряжений, осадок, моментов и жесткостей в опасном сечении (по центру) средней балки для первых двух итераций. Поперечные силы в двух промежуточных шарнирах после последней итерации равны 97,04 кН.

Таблица 1 – Результаты нелинейного расчета

Номер итерации	0 (упругий расчет)	1 (первая итерация)	2 (вторая итерация)
Контактные напряжения, кПа	82,57	82,41	82,41
Осадка, мм	9,806	9,810	9,810
Максимальный изгибающий момент в средней балке, кН·м	118,959	118,897	118,894
Жесткость по центру средней балки, кН·м ²	185920	182070	181171

Анализ численных результатов таблицы 1 подтверждает тот факт, что учет физической нелинейности приводит к росту прогибов балок, а усилия в них уменьшаются. Надо отметить, что в одиночной балке на упругом основании Винклера под действием равномерно распределенной нагрузки изгибающие моменты отсутствуют. В системе шарнирно-соединенных балок такого не наблюдается.

Заключение. В работе предложена относительно несложная методика расчета шарнирно соединенных железобетонных балок на упругом основании с учетом физической нелинейности балок. Методика основана на смешанном методе строительной механики с использованием метода Б. Н. Жемочкина, функции влияния которого позволяют учесть различные модели упругой среды при моделировании основания.

Физическая нелинейность материала балок учитывается путем аппроксимации зависимости «момент-кривизна» в железобетонной балке функцией гиперболический тангенс и дальнейшим использованием переменной (касательной) жесткости в итерационном алгоритме нелинейного расчета, с последующим анализом его сходимости.

С помощью прикладной программы Mathematica 10.4 для системы из трех шарнирно-соединенных железобетонных балок на упругом основании

Винклера приведен численный пример нелинейного расчета. Показано, что учет нелинейности несущественно влияет на результаты расчеты напряженно-деформированного состояния системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Корнев, Б. Г.** Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Корнев. – М. : Стройиздат, 1954. – 127 с.

2 **Попов, Г. Я.** О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве / Г. Я. Попов // Изв. вузов, Строительство и архитектура. – 1959. – № 3. – С. 25–33.

3 **Симвулиди, И. А.** Составные балки на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М. : Высш. шк., 1961. – 204 с.

4 **Серебряный, Р. В.** Расчет тонких шарнирно-соединенных плит на упругом основании / Р. В. Серебряный. – М. : Стройиздат, 1962. – 64 с.

5 **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М. : Высш. шк., 1991. – 439 с.

6 **Жемочкин, Б. Н.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – М. : Стройиздат, 1962. – 239 с.

7 **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.

8 **Winkler, E.** Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit / E. Winkler. – Prag : Verlag von H. Dominicus, 1867. – 1 Theil. – 388 p.

9 **Козунова, О. В.** Применение МКР в нелинейных расчетах балок на однородном упругом слое / О. В. Козунова // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2008. – Вып. 17. – С. 373–381.

10 **ПК Радуга.** Версия 2. Руководство пользователя / сост. О. Н. Лешкевич. – Новополоцк : Изд. ПГУ. – 31 с.

O. KOZUNOVA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ACCOUNTING OF PHYSICAL NONLINEARITY OF HINGE-CONNECTED REINFORCED CONCRETE BEAMS ON THE ELASTIC WINKLER FOUNDATION

In the paper a universal approach is proposed for calculating the articulated reinforced concrete beams on the Winkler elastic base, using the mixed method of structural mechanics. The beams material physical nonlinearity is taken into account through the variable stiffness of Zhemochkin's section. After determining the loads in the each beam-elastic base contact joints as a result of linear calculation, the values of the bending moments for the each beam are defined. Then the tangential stiffness for each section is determined from the obtained values from the "moment-curvature" dependence in the form of a hyperbolic tangent. There is presented the numerical example of the deformation calculation for a system of three articulated reinforced concrete beams on the Winkler base under the influence of an external load.

Получено 30.11.2019