

УДК 539.384

А. С. ЗЕЛЕНАЯ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИЗГИБ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Рассмотрен изгиб физически нелинейной прямоугольной трехслойной пластины при действии термосиловых нагрузок. Система уравнений равновесия получена с помощью вариационного принципа Лагранжа. При определении влияния температуры на упругие характеристики материала несущих слоев принималась формула Белла. В работе получено аналитическое решение рассматриваемой краевой задачи, а также проведена его численная реализация для трехслойной пластины.

Ключевые слова: термоупругопластический изгиб, физически нелинейная пластина, трехслойная пластина, сжимаемый наполнитель, пластичность.

Введение. В работах [1–4] рассмотрен изгиб и деформирование трехслойных пластин в температурных и терморadiационных полях. Статьи [5, 6] посвящены исследованию стержней при воздействии на них температуры. Колебания трехслойных стержней и панелей рассмотрены в [7, 8]. Напряженно-деформированное состояние трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем исследовано в [9–12]. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем рассмотрен в [13, 14]. В [15, 16] рассматривается деформирование упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле, в том числе при цилиндрическом изгибе.

В данной работе выполнена постановка и решение задачи об изгибе термоупругопластической трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем.

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого наполнителя. Для изотропных несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа. В жестком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1). Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым наполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка

q , проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, и тепловой поток интенсивностью q_t , направленный перпендикулярно первому несущему слою. За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев ($k = 1, 2$).

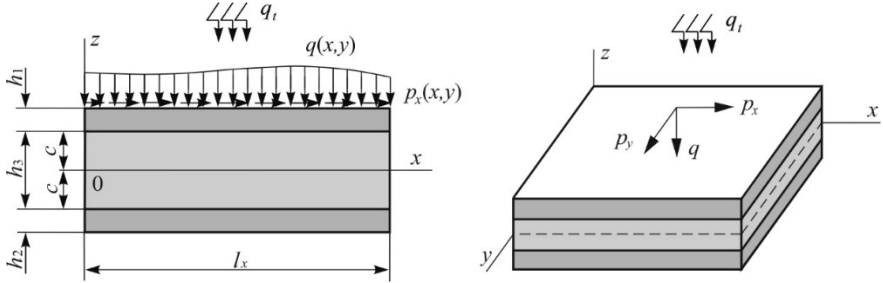


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

В слоях пластины используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций с учетом температуры

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k) \left(1 - \omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T_k) \right) \vartheta_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\epsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k) \quad (i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\vartheta_{ij}^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $\epsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k -м слое; $\omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции Ильюшина пластичности в несущих слоях, которые в случае $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_r^{(k)} \omega^{(k)}(T_k)$ равны нулю; $\epsilon_r^{(k)}(T_k)$ – предел текучести материала; $\omega^{(3)}(\epsilon_u^{(3)}, T_k)$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, равная нулю при $\epsilon_u^{(3)} \leq \epsilon_s^{(3)}(T_k)$; $\epsilon_s^{(3)}(T_k)$ – предел физической нелинейности заполнителя; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 .

Исходя из соотношений (1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые, которые будут включать температурные добавки

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \vartheta_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k) \epsilon^{(k)} \delta_{ij},$$

$$\sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k) \omega^{(k)} \vartheta_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k. \quad (2)$$

Аналогичную операцию проведем и с внутренними усилиями, получим ($k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^{(k)} &= N_{xx}^{(k)0} - N_{xx}^{(k)\omega}, & N_{yy}^{(k)} &= N_{yy}^{(k)0} - N_{yy}^{(k)\omega}, & M_{xx}^{(k)} &= M_{xx}^{(k)0} - M_{xx}^{(k)\omega}, \\
 M_{yy}^{(k)} &= M_{yy}^{(k)0} - M_{yy}^{(k)\omega}, & M_{xy}^{(k)} &= M_{xy}^{(k)0} - M_{xy}^{(k)\omega}, & Q_{xy}^{(k)} &= Q_{xy}^{(k)0} - Q_{xy}^{(k)\omega}, \\
 N_{zz}^{(3)} &= N_{zz}^{(3)0} - N_{zz}^{(3)\omega}, & M_{xz}^{(3)} &= M_{xz}^{(3)0} - M_{xz}^{(3)\omega}, & M_{yz}^{(3)} &= M_{yz}^{(3)0} - M_{yz}^{(3)\omega}, \\
 Q_{xz}^{(3)} &= Q_{xz}^{(3)0} - Q_{xz}^{(3)\omega}, & Q_{yz}^{(3)} &= Q_{yz}^{(3)0} - Q_{yz}^{(3)\omega}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Обобщенные усилия с помощью соотношений (3) также разобьем на линейные и нелинейные составляющие:

$$H_{1x} = H_{1x}^0 - H_{1x}^\omega, \quad H_{1x}^0 = \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2c}, \quad H_{1x}^\omega = \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \quad H_{1y} = H_{1y}^0 - H_{1y}^\omega, \quad H_{1y}^0 = \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2c},$$

$$H_{1y}^\omega = \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2c}, \quad H_2 = H_2^0 - H_2^\omega, \quad H_2^0 = \frac{N_{zz}^{(3)0}}{2c}, \quad H_2^\omega = \frac{N_{zz}^{(3)\omega}}{2c},$$

$$P_{1x} = P_{1x}^0 - P_{1x}^\omega, \quad P_{1x}^0 = \frac{N_{xx}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)0}}{2c} + N_{xx}^{(1)0}, \quad P_{1x}^\omega = \frac{N_{xx}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)\omega}}{2c} + N_{xx}^{(1)\omega},$$

$$P_{2x} = P_{2x}^0 - P_{2x}^\omega, \quad P_{2x}^0 = \frac{N_{xx}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)0}}{2c} + N_{xx}^{(2)0}, \quad P_{2x}^\omega = \frac{N_{xx}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)\omega}}{2c} + N_{xx}^{(2)\omega},$$

$$P_{1y} = P_{1y}^0 - P_{1y}^\omega, \quad P_{1y}^0 = \frac{N_{yy}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{yy}^{(3)0}}{2c} + N_{yy}^{(1)0}, \quad P_{1y}^\omega = \frac{N_{yy}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{yy}^{(3)\omega}}{2c} + N_{yy}^{(1)\omega},$$

$$P_{2y} = P_{2y}^0 - P_{2y}^\omega, \quad P_{2y}^0 = \frac{N_{yy}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)0}}{2c} + N_{yy}^{(2)0}, \quad P_{2y}^\omega = \frac{N_{yy}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)\omega}}{2c} + N_{yy}^{(2)\omega},$$

$$V_1 = V_1^0 - V_1^\omega, \quad V_1^0 = \frac{Q_{xy}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)0}}{2c} + Q_{xy}^{(1)0}, \quad V_1^\omega = \frac{Q_{xy}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)\omega}}{2c} + Q_{xy}^{(1)\omega},$$

$$V_2 = V_2^0 - V_2^\omega, \quad V_2^0 = \frac{Q_{xy}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)0}}{2c} + Q_{xy}^{(2)0}, \quad V_2^\omega = \frac{Q_{xy}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)\omega}}{2c} + Q_{xy}^{(2)\omega},$$

$$S_{1x} = S_{1x}^0 - S_{1x}^\omega, \quad S_{1x}^0 = \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{xx}^{(1)0} - M_{xx}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)0},$$

$$S_{1x}^\omega = \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{xx}^{(1)\omega} - M_{xx}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)\omega},$$

$$S_{2x} = S_{2x}^0 - S_{2x}^\omega, \quad S_{2x}^0 = - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{xx}^{(2)0} - M_{xx}^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)0},$$

$$S_{2x}^\omega = - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{xx}^{(2)\omega} - M_{xx}^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)\omega},$$

$$\begin{aligned}
S_{1y} &= S_{1y}^0 - S_{1y}^\omega, & S_{1y}^0 &= \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{yy}^{(1)0} - M_{yy}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)0}, \\
S_{1y}^\omega &= \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{yy}^{(1)\omega} - M_{yy}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)\omega}, \\
S_{2y} &= S_{2y}^0 - S_{2y}^\omega, & S_{2y}^0 &= - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{yy}^{(2)0} - M_{yy}^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)0}, \\
S_{2y}^\omega &= - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{yy}^{(2)\omega} - M_{yy}^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)\omega}, \\
T_{1x} &= T_{1x}^0 - T_{1x}^\omega, & T_{1x}^0 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, & T_{1x}^\omega &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
T_{2x} &= T_{2x}^0 - T_{2x}^\omega, & T_{2x}^0 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, & T_{2x}^\omega &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
T_{1y} &= T_{1y}^0 - T_{1y}^\omega, & T_{1y}^0 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)0}}{2c}, & T_{1y}^\omega &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
T_{2y} &= T_{2y}^0 - T_{2y}^\omega, & T_{2y}^0 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)0}}{2c}, & T_{2y}^\omega &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
U_1 &= U_1^0 - U_1^\omega, & U_1^0 &= (2c + h_1) Q_{xy}^{(1)0} - 2M_{xy}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)0} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)0}, \\
U_1^\omega &= (2c + h_1) Q_{xy}^{(1)\omega} - 2M_{xy}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)\omega}, \\
U_2 &= U_2^0 - U_2^\omega, & U_2^0 &= (2c + h_2) Q_{xy}^{(2)0} + 2M_{xy}^{(2)0} + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)0} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)0}, \\
U_2^\omega &= (2c + h_2) Q_{xy}^{(2)\omega} + 2M_{xy}^{(2)\omega} + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)\omega} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)\omega}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Входящие в (4) линейные (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») составляющие внутренних усилий вычисляются через напряжения и деформации по формулам (2).

Система уравнений равновесия в обобщенных усилиях:

$$\begin{aligned}
H_{1x}^0 - V_{1'y}^0 - P_{1x'x}^0 &= p_x + H_{1x}^\omega - V_{1'y}^\omega - P_{1x'x}^\omega, \\
H_{1x}^0 + V_{2'y}^0 + P_{2x'x}^0 &= H_{1x}^\omega + V_{2'y}^\omega + P_{2x'x}^\omega, \\
H_{1y}^0 - V_{1'x}^0 - P_{1'y}^0 &= p_y + H_{1y}^\omega - V_{1'x}^\omega - P_{1'y}^\omega, \\
H_{1y}^0 + V_{2'x}^0 + P_{2'y}^0 &= H_{1y}^\omega + V_{2'x}^\omega + P_{2'y}^\omega, \\
S_{1x'xx}^0 + H_2^0 - T_{1x'x}^0 - U_{1'xy}^0 + S_{1y'y}^0 - T_{1y'y}^0 &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q + \frac{p_x \text{,} x h_1}{2} + \frac{p_y \text{,} y h_1}{2} + S_{1x \text{,} xx}^\omega + H_2^\omega - T_{1x \text{,} x}^\omega - U_{1 \text{,} xy}^\omega + S_{1y \text{,} yy}^\omega - T_{1y \text{,} y}^\omega, \\
&\quad S_{2x \text{,} xx}^0 - H_2^0 - T_{2x \text{,} x}^0 - U_{2 \text{,} xy}^0 + S_{2y \text{,} yy}^0 - T_{2y \text{,} y}^0 = \\
&= S_{2x \text{,} xx}^\omega - H_2^\omega - T_{2x \text{,} x}^\omega - U_{2 \text{,} xy}^\omega + S_{2y \text{,} yy}^\omega - T_{2y \text{,} y}^\omega. \tag{5}
\end{aligned}$$

Выразим внутренние усилия (3) через искомые перемещения u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} , w_1 , w_2 и подставим в систему уравнений равновесия (5). Получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающую изгиб упругопластической пластины в температурном поле:

$$\begin{aligned}
&a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x \text{,} xx}^n - a_5 u_{2x \text{,} xx}^n - a_{19} u_{1x \text{,} yy}^n - a_{18} u_{2x \text{,} yy}^n - a_{21} u_{1y \text{,} xy}^n - a_{23} u_{2y \text{,} xy}^n + \\
&\quad + a_2 w_1^{\prime \prime} \text{,} x + a_3 w_2^{\prime \prime} \text{,} x - 2a_{24} w_1^{\prime \prime} \text{,} xyy + a_{25} w_2^{\prime \prime} \text{,} xyy - 2a_6 w_1^{\prime \prime} \text{,} xxx + a_7 w_2^{\prime \prime} \text{,} xxx = p_x + p_\omega^{n-1}, \\
&-a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x \text{,} xx}^n - a_9 u_{2x \text{,} xx}^n - a_{18} u_{1x \text{,} yy}^n - a_{20} u_{2x \text{,} yy}^n - a_{23} u_{1y \text{,} xy}^n - a_{22} u_{2y \text{,} xy}^n - a_{10} w_1^{\prime \prime} \text{,} x - \\
&\quad - a_{17} w_2^{\prime \prime} \text{,} x - a_{24} w_1^{\prime \prime} \text{,} xyy + 2a_{25} w_2^{\prime \prime} \text{,} xyy - a_6 w_1^{\prime \prime} \text{,} xxx + 2a_7 w_2^{\prime \prime} \text{,} xxx = s_\omega^{n-1}, \\
&a_1 u_{1y}^n - a_1 u_{2y}^n - a_4 u_{1y \text{,} yy}^n - a_5 u_{2y \text{,} yy}^n - a_{19} u_{1y \text{,} xx}^n - a_{18} u_{2y \text{,} xx}^n - a_{21} u_{1x \text{,} xy}^n - a_{23} u_{2x \text{,} xy}^n + a_2 w_1^{\prime \prime} \text{,} y + \\
&\quad + a_3 w_2^{\prime \prime} \text{,} y - 2a_{24} w_1^{\prime \prime} \text{,} xyy + a_{25} w_2^{\prime \prime} \text{,} xyy - 2a_6 w_1^{\prime \prime} \text{,} yyy + a_7 w_2^{\prime \prime} \text{,} yyy = p_y + h_\omega^{n-1}, \\
&-a_1 u_{1y}^n + a_1 u_{2y}^n - a_5 u_{1y \text{,} yy}^n - a_9 u_{2y \text{,} yy}^n - a_{18} u_{1y \text{,} xx}^n - a_{20} u_{2y \text{,} xx}^n - a_{23} u_{1x \text{,} xy}^n - a_{22} u_{2x \text{,} xy}^n - a_{10} w_1^{\prime \prime} \text{,} y - \\
&\quad - a_{17} w_2^{\prime \prime} \text{,} y - a_{24} w_1^{\prime \prime} \text{,} xyy + 2a_{25} w_2^{\prime \prime} \text{,} xyy - a_6 w_1^{\prime \prime} \text{,} yyy + 2a_7 w_2^{\prime \prime} \text{,} yyy = r_\omega^{n-1}, \\
&-a_2 u_{1x \text{,} x}^n - a_2 u_{1y \text{,} y}^n + a_{10} u_{2x \text{,} x}^n + a_{10} u_{2y \text{,} y}^n + 2a_6 u_{1x \text{,} xxx}^n + a_6 u_{2x \text{,} xxx}^n + 2a_6 u_{1y \text{,} yyy}^n + a_6 u_{2y \text{,} yyy}^n + \\
&\quad + 2a_{24} u_{1x \text{,} xyy}^n + a_{24} u_{2x \text{,} xyy}^n + 2a_{24} u_{1y \text{,} xxy}^n + a_{24} u_{2y \text{,} xxy}^n + a_{11} w_1^{\prime \prime} \text{,} xx + a_{11} w_1^{\prime \prime} \text{,} yy - a_{12} w_2^{\prime \prime} \text{,} xx - \\
&\quad - a_{12} w_2^{\prime \prime} \text{,} yy + a_{15} w_1^{\prime \prime} \text{,} xxx + a_{15} w_1^{\prime \prime} \text{,} yyy - a_{16} w_2^{\prime \prime} \text{,} xxx - a_{16} w_2^{\prime \prime} \text{,} yyy + a_{26} w_1^{\prime \prime} \text{,} xyy - a_{28} w_2^{\prime \prime} \text{,} xyy + \\
&\quad + a_8 w_1^{\prime \prime} - a_8 w_2^{\prime \prime} = q + 0,5 p_x \text{,} x h_1 + 0,5 p_y \text{,} y h_1 + q_\omega^{n-1}, \\
&-a_3 u_{1y \text{,} y}^n - a_3 u_{1x \text{,} x}^n + a_{17} u_{2y \text{,} y}^n + a_{17} u_{2x \text{,} x}^n - a_7 u_{1y \text{,} yyy}^n - a_7 u_{1x \text{,} xxx}^n - 2a_7 u_{2y \text{,} yyy}^n - 2a_7 u_{2x \text{,} xxx}^n - \\
&\quad - 2a_{27} u_{2y \text{,} xxy}^n - a_{25} u_{1y \text{,} xxy}^n - 2a_{25} u_{2x \text{,} xxy}^n - a_{25} u_{1x \text{,} xyy}^n - a_{12} w_1^{\prime \prime} \text{,} xx - a_{12} w_1^{\prime \prime} \text{,} yy + a_{14} w_2^{\prime \prime} \text{,} xx + \\
&\quad + a_{14} w_2^{\prime \prime} \text{,} yy - a_{16} w_1^{\prime \prime} \text{,} xxx - a_{16} w_1^{\prime \prime} \text{,} yyy + a_{13} w_2^{\prime \prime} \text{,} xxx + a_{13} w_2^{\prime \prime} \text{,} yyy - a_{28} w_1^{\prime \prime} \text{,} xyy + a_{27} w_2^{\prime \prime} \text{,} xyy - \\
&\quad - a_8 w_1^{\prime \prime} + a_8 w_2^{\prime \prime} = g_\omega^{n-1}, \tag{6}
\end{aligned}$$

где n – номер приближения; p_ω^{n-1} , s_ω^{n-1} , h_ω^{n-1} , r_ω^{n-1} , q_ω^{n-1} , g_ω^{n-1} – величины, соответствующие нелинейным слагаемым, выражаемые по формулам:

$$\begin{aligned}
p_\omega^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)} \text{,} y - P_{1x}^{\omega(n-1)} \text{,} x, \quad s_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)} \text{,} y + P_{2x}^{\omega(n-1)} \text{,} x, \\
h_\omega^{n-1} &= H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)} \text{,} x - P_{1y}^{\omega(n-1)} \text{,} y, \quad r_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)} \text{,} x + P_{2y}^{\omega(n-1)} \text{,} y, \\
q_\omega^{n-1} &= S_{1x}^{\omega(n-1)} \text{,} xx + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)} \text{,} x - U_1^{\omega(n-1)} \text{,} xy + S_{1y}^{\omega(n-1)} \text{,} yy - T_{1y}^{\omega(n-1)} \text{,} y, \\
g_\omega^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} \text{,} xx - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} \text{,} x - U_2^{\omega(n-1)} \text{,} xy + S_{2y}^{\omega(n-1)} \text{,} yy - T_{2y}^{\omega(n-1)} \text{,} y. \tag{7}
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений получим методом Бубнова-Галеркина, который предполагает разложение искомых перемещений и внешних нагрузок в ряды по системам базисных функций. Тогда искомые перемещения выражаются следующим образом:

$$u_{kx} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kxpm}^n \Psi_{xpm}(x, y), \quad u_{ky} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kypm}^n \Psi_{ypm}(x, y),$$

$$w_k = \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{kpm}^n \Psi_{zpm}(x, y), \quad (8)$$

где U_{kxpm}^n , U_{kypm}^n , W_{kpm}^n – неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге ($k = 1, 2$); Ψ_{xpm} , Ψ_{ypm} , Ψ_{zpm} – системы базисных ортогональных функций, удовлетворяющие граничным условиям.

Внешние нагрузки

$$p_{\omega}^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} p_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{xpm}(x, y), \quad s_{\omega}^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} s_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{xpm}(x, y),$$

$$h_{\omega}^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} h_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{ypm}(x, y), \quad r_{\omega}^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} r_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{ypm}(x, y),$$

$$q_{\omega}^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{zpm}(x, y), \quad g_{\omega}^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{zpm}(x, y),$$

$$q = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \Psi_{zpm}(x, y). \quad (9)$$

После подстановки перемещений (8), нагрузок и дополнительных усилий (9) в систему (6) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U_{1xpm}^n , U_{2xpm}^n , U_{1ypm}^n , U_{2ypm}^n , W_{1pm}^n , W_{2pm}^n :

$$b_1 U_{1xpm}^n + b_2 U_{2xpm}^n + b_{11} U_{1ypm}^n + b_{12} U_{2ypm}^n + b_3 W_{1pm}^n + b_4 W_{2pm}^n = p_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_2 U_{1xpm}^n + b_5 U_{2xpm}^n + b_{12} U_{1ypm}^n + b_{13} U_{2ypm}^n + b_6 W_{1pm}^n + b_7 W_{2pm}^n = s_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_{11} U_{1xpm}^n + b_{12} U_{2xpm}^n + b_{14} U_{1ypm}^n + b_{15} U_{2ypm}^n + b_{16} W_{1pm}^n + b_{17} W_{2pm}^n = h_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_{12} U_{1xpm}^n + b_{13} U_{2xpm}^n + b_{15} U_{1ypm}^n + b_{18} U_{2ypm}^n + b_{19} W_{1pm}^n + b_{20} W_{2pm}^n = r_{\omega pm}^{n-1},$$

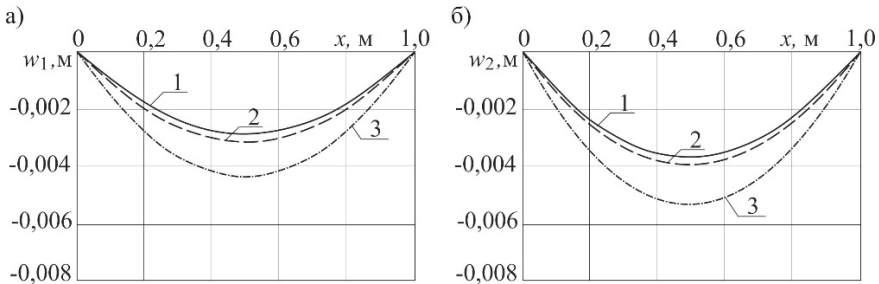
$$b_3 U_{1xpm}^n + b_6 U_{2xpm}^n + b_{16} U_{1ypm}^n + b_{19} U_{2ypm}^n + b_8 W_{1pm}^n + b_9 W_{2pm}^n = q_{pm} + q_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_4 U_{1xpm}^n + b_7 U_{2xpm}^n + b_{17} U_{1ypm}^n + b_{20} U_{2ypm}^n + b_9 W_{1pm}^n + b_{10} W_{2pm}^n = g_{\omega pm}^{n-1}.$$

Коэффициенты b_i вычисляются через величины a_i , зависят от температуры, параметров p и m .

Численный параметрический анализ. Численные расчеты получены для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т–фторопласт–4–Д16Т. Размеры пластины $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,2$ м, $l_x = 1$ м, $l_y = 1$ м. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -2$ МПа, интенсивность теплового потока $q_t = 5000$ Дж/(м²·с). При определении влияния температуры на упругие характеристики материала несущих слоев принималась формула Белла. Температура первого несущего слоя принимается равной температуре заполнителя в месте склейке, т. е. $T_1 = T_3(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t , идет на нагревание заполнителя. Температура второго несущего слоя также не изменяется по толщине и принимается равной температуре заполнителя в месте их склейки $T_2 = T_3(-c, t)$.

На рисунке 2 показано влияние температуры и учет физически нелинейных свойств материалов слоев на прогибы несущих слоев пластины.



Кривая 1 соответствует упругой пластине, кривая 2 – термоупругой, 3 – термоупругопластической

Рисунок 2 – Прогибы несущих слоев пластины

Температурное воздействие приводит к увеличению максимальных прогибов в первом несущем слое на 7 %, а во втором на 9 %. Воздействие температуры и учет физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению максимальных прогибов пластины в первом несущем слое на 31 %, во втором на 42 % по сравнению с упругой пластиной.

На рисунке 3 показаны продольные перемещения в слоях пластины. Нумерация кривых прежняя. В первом несущем слое при нагревании пластины продольные перемещения незначительно уменьшаются, в то время как во втором слое возрастают до 8 %. При нагревании и учете физически нелинейных свойств пластины продольные перемещения в первом слое уменьшаются до 3 %, а во втором слое возрастают на 56 % по сравнению с упругой пластиной.

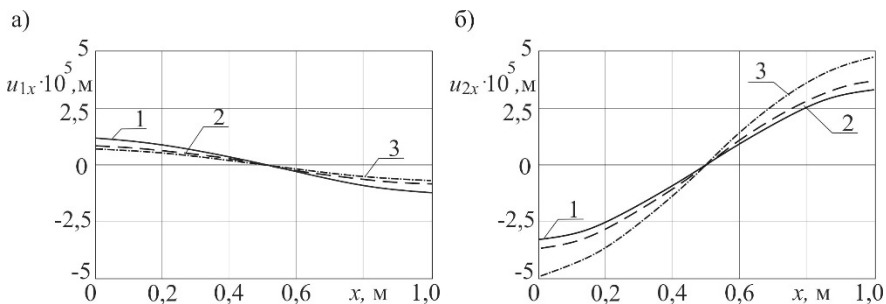


Рисунок 3 – Продольные перемещения в несущих слоях пластины

Вывод. Полученное в работе аналитическое решение позволяет исследовать деформирование физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин при действии термосиловых нагрузок. Численные результаты показали, что воздействие температуры способствует увеличению перемещений до 9 %, а при дополнительном учете физически нелинейных свойств материалов слоев перемещения увеличиваются до 56 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Старовойтов, Э. И. Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки : междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2014. – Вып. 8. – С. 179–185.

2 Starovoitov, E. I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47, No. 5. – P. 580–589.

3 Starovoitov, E. I. Deformation of an elastoplastic circular three-layer plate in a temperature field / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Mechanics of composite materials. – 2019. – Vol. 55, No. 4. – P. 503–512.

4 Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.

5 Старовойтов, Э. И. Влияние теплового потока на напряженное состояние трехслойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 1. – С. 64–76.

6 Леоненко, Д. В. Термосиловое нагружение трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем на упругом основании / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – № 6 (111). – С. 67–73.

7 Леоненко, Д. В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

8 Кракова, И. Е. Свободные колебания транспортных пакетов из сэндвич-панелей / И. Е. Кракова, О. И. Якубович // Механика. Исследования и инновации:

междунар. сб. науч. тр. / Беларус. гос. ун-т транспорта. – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 150–154.

9 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Беларус. гос. ун-т транспорта.* – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 195 – 203.

10 **Нестерович, А. В.** Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2019.* – Вып. 34. – С. 154–159.

11 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2018.* – Вып. 33. – С. 318–323.

12 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель, 2018.* – Вып. 11. – С. 127–133.

13 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* – 2018. – № 4. – С. 88–97.

14 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Беларус. гос. ун-т транспорта.* – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.

15 **Зеленая, А. С.** Изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2019.* – Вып. 34. – С. 172–178.

16 **Зеленая, А. С.** Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2019. – № 1 (38). – С. 45–49.

A. S. ZELENAYA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

BENDING OF THE THERMOELASTIC PLASTIC THREE-LAYER RECTANGULAR PLATE WITH COMPRESSIBLE FILLER

The bending of a physically nonlinear rectangular three-layer plate under an active thermal-force load is considered. The system of equilibrium equations is obtained using the Lagrange variation principle. To determine the effect of temperature on the elastic characteristics of the bearing layers material, the Bell's formula was applied. In the investigation, an analytical solution of the considered boundary value problem is obtained, and its numerical implementation for a three-layer plate is performed.

Получено 25.11.2019