

УДК 534.121.1

*Ю. В. ГРОМЫКО**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Рассмотрено динамическое нагружение упругой трехслойной кольцевой пластины, мгновенно приложенной и импульсной нагрузками. Принято, что в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа; в несжимаемом по толщине легком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. Аналитическое решение задачи получено в виде разложения в ряд по собственным функциям. Представлены графики зависимости максимальных прогибов пластины при различных граничных условиях в случае мгновенно приложенной нагрузки и импульсного воздействия.

**Ключевые слова:** трехслойная кольцевая пластина, упругость, собственные частоты, мгновенно приложенная нагрузка, импульсное воздействие.

**Введение.** Трехслойные элементы конструкций, состоящие из двух несущих слоев и заполнителя, получили значительное распространение благодаря высокой прочности при относительно малой массе. В условиях динамических нагрузок они оказываются наиболее рациональными. Исследованиям динамического нагружения слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные работы. Постановки и методы решения соответствующих начально-краевых задач приведены в монографиях [1, 2]. Свободные и вынужденные колебания трехслойных упругих и вязкоупругих оболочек рассмотрены в статьях [3, 4]. Работы [5, 6] посвящены исследованию динамического поведения круговых трехслойных пластин, связанных и несвязанных с упругим основанием. В них получены трансцендентные уравнения для собственных чисел, исследован спектр собственных частот, построены системы собственных фундаментальных функций, получены решения начально-краевых задач при различных нагрузках. Динамическое поведение кольцевой трехслойной пластины изучалось в статьях [7–10].

Здесь рассмотрены колебания трехслойной круговой пластины с центральным отверстием под действием кольцевой равномерно распределенной нагрузки.

**Постановка задачи.** Рассматриваются осесимметричные вынужденные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины круговой формы с центральным отверстием. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную. Для внешних несущих слоев ( $h_1 \neq h_2$ ) используются гипотезы Кирхгофа, для легкого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ) – гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Работа заполнителя в тангенциальном направлении пренебрегает-

ся. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ . На контурах пластины предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующей относительному сдвигу слоев.

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют  $u_\varphi^k = 0$ , а прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$  ( $k$  – номер слоя). В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее внешнему радиусу  $a$ ; через  $h_k$  обозначена толщина  $k$ -го слоя.

В работе [10] для подобной пластины вариационными методами получена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания, которая будет справедлива и в рассматриваемом случае. Для описания прогиба пластины, при свободных колебаниях введена система собственных ортонормированных функций

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} [J_0(\beta_n r) + k_{1n} I_0(\beta_n r) + k_{2n} Y_0(\beta_n r) + k_{3n} K_0(\beta_n r)], \quad (1)$$

где  $J_0, Y_0, I_0, K_0$  – функции Бесселя и Макдональда нулевых порядков; нормировочные коэффициенты  $d_n$  и параметры  $k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}$  выражены через значения функций Бесселя на внешнем и внутреннем контурах, геометрические и упругие характеристики материалов слоев [10].

Искомое решение  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  и  $w(r, t)$  и внешняя нагрузка  $q(r, t)$  представляются в виде разложений в ряд по системам функций (1):

$$\begin{aligned} u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t); \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \\ q(r, t) &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n r dr, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции  $\phi_n(r, t)$  выражены через собственные функции (1).

Уравнение для определения неизвестной функции времени  $T_n(t)$  имеет вид

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) будет

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) q_n(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $\omega_n$  – собственные частоты.

Коэффициенты  $A_n, B_n$  следуют из начальных условий движения

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r),$$

$$A_n = \int_{r_0}^1 f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_{r_0}^1 g(r) v_n r dr. \quad (5)$$

Таким образом, прогиб, относительный сдвиг и радиальное перемещение в кольцевой трехслойной пластине определяются соотношениями (2) с учетом (4), (5).

**Равномерно распределенная нагрузка.** Предположим, что на рассматриваемую пластину действует внезапная динамическая нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности внешнего несущего слоя

$$q(r, t) = q_0(t). \quad (6)$$

Подставляя (6) в формулу для коэффициентов нагрузки (2), получим для них интегральное выражение

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (7)$$

Начальные условия движения (2) принимались нулевыми, что позволяет положить константы интегрирования  $A_n = B_n = 0$ . После этого перемещения в пластине определяются соотношениями (2), а функция времени  $T_n(t)$  вычисляется по формуле (4) с учетом (7).

$$T_n(t) = \frac{q_0(1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 \omega_n^2} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (8)$$

Вид функции  $v_n$ , входящей в (7) и (8), зависит от условий закрепления. Для случая защемления обоих контуров он будет определяться формулой (1). Интеграл от этой функций по радиусу будет иметь вид

$$\int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr = \frac{1}{\beta_n} [J_1(\beta_n) + k_{1n} I_1(\beta_n) + k_{2n} Y_1(\beta_n) - k_{3n} K_1(\beta_n) - r_0 (J_1(\beta_n r_0) + k_{1n} I_1(\beta_n r_0) + k_{2n} Y_1(\beta_n r_0) - k_{3n} K_1(\beta_n r_0))]. \quad (9)$$

**Импульс равномерно распределенной нагрузки.** Импульсными будем называть нагрузки, время воздействия которых не превышает четверти наибольшего из периодов собственных колебаний  $t_0 = 2\pi / \omega_0$ . Для их описания будем использовать дельта функцию Дирака  $\delta(t)$

$$\int_a^b f(\tau) \delta(\tau - x) d\tau = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}.$$

Аналитически импульсную нагрузку можно представить в виде

$$q(r, t) = q_1 \delta(t), \quad q_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Задача, как правило, сводится к отысканию параметров  $q_n(t)$  разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени  $T_n(t)$ . Подставив (10) в (7), получим параметры разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций  $v_n$ :

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t)}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (11)$$

Искомая функция времени  $T_n(t)$  с учетом (11) будет следующей:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_1 \sin(\omega_n t)}{M_0 \omega_n} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (12)$$

Интегралы в выражениях (11) и (12) вычисляются по формулам типа (9) в зависимости от способа закрепления контура пластины.

**Численные результаты** получены для пластины единичного радиуса, слою которой набраны из материалов: Д16Т – фторопласт – Д16Т. Характеристики материалов приведены в [11, 12]. Рассматривались два вида граничных условий: внешний и внутренний контуры заделаны; внутренний контур заделан, внешний – свободен. Соотношение толщин слоев в пакете:  $h_3 = 20h_1 = 20h_2 = 0,1$ . Интенсивности поверхностных нагрузок:  $q_0 = -1,5 \cdot 10^3$  Па,  $q_1 = -100$  Па · с. Отсчетный момент времени принят  $t = \pi/\omega_0$ , с.

На рисунках 1, 2 показано изменение прогиба  $w$  вдоль радиуса пластины  $r$  при мгновенно приложенной нагрузке и импульсном воздействии соответственно: 1 – внешний и внутренний контуры заделаны; 2 – внутренний контур заделан, внешний свободен. Здесь при одинаковой по величине мгновенно приложенной нагрузке во втором случае прогиб больше примерно в 8 раз, что объясняется меньшей жесткостью закрепления и всей системы в целом. При импульсном воздействии максимальный прогиб защемленной по обоим контурам пластины в 2,4 раза меньше прогиба на свободном краю. Это говорит о том, что при импульсном нагружении жесткость пластины в зависимости от граничных условий играет меньшую роль, чем при мгновенном приложении поверхностной нагрузки постоянной интенсивности.

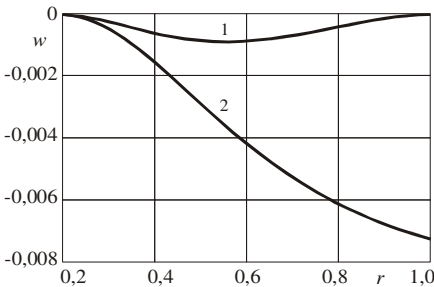


Рисунок 1 – Прогиб при мгновенно приложенной нагрузке

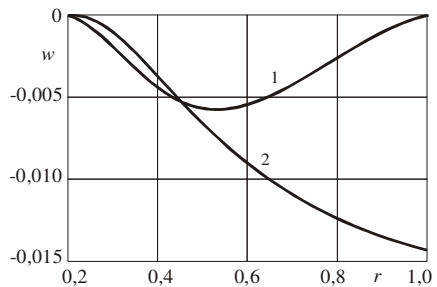


Рисунок 2 – Прогиб при импульсном воздействии

**Выводы.** Результаты проведенных исследований позволили оценить влияние жесткости закреплений на прогиб кольцевой пластины при импульсном воздействии. Они показывают, что граничные в этом случае условия незначительно влияют на деформации пластины.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Starovoitov, E. I.** Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey. – 2012. – 346 p.
- 2 **Андреев, А. Н.** Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 2001. – 288 с.
- 3 **Старовойтов, Э. И.** Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
- 4 **Старовойтов, Э. И.** Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21. № 2. – С. 162–169.
- 5 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.
- 6 **Starovoitov, E. I.** Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No. 5. – P. 561–570.
- 7 **Громыко, Ю. В.** Свободные колебания трехслойной кольцевой упругой пластины // Материалы, технологии, инструменты. – 2001. – Т. 6, № 4. – С. 9–12.
- 8 **Громыко, Ю. В.** Тепловой удар по трехслойной кольцевой пластине / Ю. В. Громыко // Материалы, технологии, инструменты. – 2002. – Т. 7, № 2. – С. 19–24.
- 9 **Громыко, Ю. В.** О собственных частотах колебаний кольцевой трехслойной пластины / Ю. В. Громыко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2007. – № 2. – С. 59–63.
- 10 **Громыко, Ю. В.** Колебания трехслойной круговой пластины с отверстием при резонансе / Ю. В. Громыко // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 41–48.
- 11 **Трацевская, Е. Ю.** Экспериментальное исследование динамических характеристик неустойчивости трехфазных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 2. – С. 57–64.
- 12 **Трацевская, Е. Ю.** Экспериментальное исследование характеристик пластичности неводонасыщенных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 1. – С. 54–65.

*Yu. V. GROMYKO*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## OSCILLATIONS OF THE ANNULAR THREE-LAYER PLATE AT AN IMPULSE ACTION

There is considered the dynamic loading of an elastic three-layer annular plate under the action of the instantly applied and pulsed loads. It is assumed that in the thin bearing layers, the Kirchhoff's hypotheses hold true; in the lightweight filler incompressible along its thickness the Timoshenko's hypothesis is realized. The analytical solution of the problem is obtained in the form of expansion in a series of eigenfunctions. The diagrams of the dependence of the plate maximal deflections on the different boundary conditions for the cases of the instantaneous applied load and impulse action are presented.

Получено 31.10.2019