

Как было отмечено в начале статьи, для правильной работы механизмов параллельной структуры большое значение имеет синхронность работы приводов. Полученные выражения являются основой для проектирования системы управления такого устройства. Рассматриваемый механизм может использоваться при работе с плоскими поверхностями, где требуются высокие параметры точности. Это может быть шлифовка, лазерная, плазменная или гидроабразивная резка заготовок из листового сортамента.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1 **Рыбак, Л. А.** Эффективные методы решения задач кинематики и динамики робота станка параллельной структуры / Л. А. Рыбак, В. В. Ержуков, А. В. Чичварин. – М. : Физматлит. – 2011. – 148 с.

2 Прогрессивное машиностроительное оборудование / В. В. Ержуков [и др.] ; под ред. А. В. Киричека. – М. : Изд. дом «Спектр», 2011. – 248 с.

3 **Кузнецов, Ю. Н.** Компоновки станков с механизмами параллельной структуры / Ю. Н. Кузнецов, Д. А. Дмитриев, Г. Е. Диневич ; под ред. Ю. Н. Кузнецова. – Херсон : ПП Вишемирский В. С., 2010. – 471 с.

4 Обработкающее оборудование нового поколения. Концепция проектирования / В. Л. Афонин [и др.] ; под ред. В. Л. Афонина. – М. : Машиностроение, 2001. – 256 с.

*D. A. KLIMOVSKIY, L. P. NAZAROVA, P. A. ORLIN, M. S. RUDENKO,  
N. A. SMIRNOV, E. V. FALKOVA*

*Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev,  
Krasnoyarsk, Russia*

#### **A NONLINEAR MOVEMENT PROBLEM FOR THE POINT OF A PARALLEL KINEMATIC MACHINE BASED ON TWO ROCKERS**

In the paper it is solved the nonlinear movement problem for the point of a parallel kinematic machine with two degrees of freedom based on two rockers. There were defined the main kinematic parameters for control elements.

Получено 09.04.2017

---

**ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 10. Гомель, 2017**

УДК 531.8

*А. В. ЛОКТИОНОВ*

*Витебский государственный технологический университет, Беларусь*

#### **РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Рассмотрен расчет малых колебаний эллиптического маятника с учетом сил тяжести ползуна и шарика. Составлены и решены дифференциальные уравнения, описывающие движения тел системы. В работе принято, что в начальный момент

угол отклонения стрелы маятника от вертикали и скорость ползуна равны нулю, угловая скорость вращения стрелы не равна нулю. С учетом принятых начальных условий получены уравнения малых колебаний ползуна и маятника.

**Ключевые слова:** эллиптический маятник, малые колебания, уравнения Лагранжа II рода, уравнения движения.

В работе [1] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. При этом использован координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра тяжести системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил и начальной скорости центра масс системы по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения шарика  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = 0$ , угол отклонения  $\phi = \phi_0 \neq 0$ . В работах [2, 3] изложено решение уравнения малых колебаний эллиптического маятника при заданной начальной угловой скорости движения. Однако исследования выполнены без учета силы тяжести шарика эллиптического маятника. В данной статье рассмотрено решение задачи в более полной постановке.

Составим уравнение движения эллиптического маятника (рисунок 1), состоящего из ползуна 1 массы  $m_1$ , скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика 2 массы  $m_2$ , соединённого с ползунком стержнем  $AB$  длины  $l$ . Стержень может вращаться вокруг оси  $A$ , перпендикулярной плоскости рисунка, которая связана также с ползунком 2. При составлении уравнений движения учтем силу тяжести шарика 1 и ползуна 2. Массой стержня пренебрегаем.

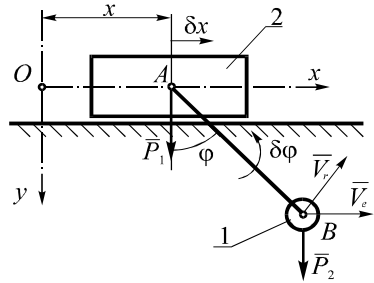


Рисунок 1 – Расчетная схема

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщённых координат перемещение ползуна по горизонтальной плоскости ( $q_1 = x$ ) и угол поворота стержня  $AB$  вокруг оси  $A$  ( $q_2 = \phi$ ). Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_\phi. \end{aligned} \quad (1)$$

Определим кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2,$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – кинетические энергии ползуна 1 и шарика 2 соответственно.

Ползун совершает поступательное движение, поэтому

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2.$$

Считая шарик 2 материальной точкой массы  $m_2$ , имеем, что  $T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}$ .

Для определения абсолютной скорости  $V_2$  шарика, совершающего сложное движение, применим теорему о сложении скоростей точки

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Переносная скорость  $\vec{V}_e$  направлена параллельно оси  $x$ , при этом  $\vec{V}_e = \dot{x}$ , а относительная скорость  $\vec{V}_r$  перпендикулярна радиусу относительного вращения  $AB$  и  $V_r = l\dot{\varphi}$ . Тогда абсолютная скорость равна

$$V_2^2 = V_e^2 + V_r^2 + 2V_r V_e \cos \varphi = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x} \cos \varphi.$$

Получим, что  $T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x} \cos \varphi)$ .

Следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x} \cos \varphi),$$

или

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi.$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi],$$

(2)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x} \cos \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi.$$

Определим обобщённые силы системы. Заданными силами являются силы тяжести ползуна  $\vec{P}_1$  и шарика  $\vec{P}_2$ .

Для вычисления обобщённой силы  $Q_x$  дадим системе такое возможное перемещение, при котором обобщённая координата  $x$  получает приращение  $\delta x > 0$ , а угол поворота  $\varphi$  при этом не изменяется, то есть  $\delta \varphi = 0$ . Сумма работ заданных сил на возможных перемещениях точек системы,

соответствующих приращению  $\delta x$  равна нулю, так как заданные силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  перпендикулярны возможному перемещению  $\delta x$ :

$$\delta A_x = 0 \text{ и } Q_x = 0. \quad (3)$$

Для определения обобщённой силы  $Q_\varphi$  дадим системе такое возможное перемещение, при котором угол  $\varphi$  получит приращение  $\delta\varphi > 0$ , а координата  $x$  остаётся неизменной ( $\delta x = 0$ ). Тогда работа силы тяжести  $\vec{P}_1$  равна нулю, а работу силы тяжести  $\vec{P}_2$  вычислим как работу силы, приложенной к стержню  $AB$ , вращающемуся вокруг оси  $z$ , проходящей через точку  $A$ , перпендикулярно плоскости рисунка. Момент силы  $\vec{P}_2$  относительно оси

$$M_z(\vec{P}_2) = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Следовательно, работа этой силы на возможном перемещении  $\delta\varphi$

$$\delta A_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi \delta\varphi,$$

откуда обобщённая сила

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi. \quad (4)$$

Выражения (2), (3) и (4) подставляем в уравнения (1):

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] = 0,$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi,$$

или окончательно

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] = 0,$$

$$l \ddot{\varphi} + \cos \varphi \ddot{x} + g \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Уравнения (5) являются дифференциальными уравнениями движения эллиптического маятника. Для их решения положим, что  $\cos \varphi \approx 1$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда уравнения (5) примут вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \quad l \ddot{\varphi} + \ddot{x} + g \varphi = 0.$$

Из первого уравнения полученной системы найдем  $\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi}$ .

Подставив это выражение во второе уравнение системы, имеем

$$\frac{l m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + g \varphi = 0, \text{ или } \ddot{\varphi} + \frac{g(m_1 + m_2) m_1}{l m_1} \varphi = 0. \quad (6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6) свободных колебаний маятника имеет вид  $\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные

интегрирования. С учетом начальных условий при  $t = t_0 = 0$   $\varphi = \varphi_0$  и  $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$  получим

$$C_1 = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \quad C_2 = \frac{\omega_0}{k}.$$

Уравнение малых колебаний эллиптического маятника будет иметь вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\omega_0}{k} \sin kt.$$

С учетом принятых начальных условий получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\omega_0}{k}.$$

При  $\varphi_0 = 0$  уравнение свободных колебаний маятника принимает вид

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k} \sin kt, \quad (7)$$

где частота колебаний  $k = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{lm_1}}$ , а закон изменения угловой скорости

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \cos kt. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение перемещения ползуна эллиптического маятника при  $\omega = \omega_0$  с учетом равенства (8) принимает вид

$$\ddot{x} = \frac{m_2 lk}{m_1 + m_2} \omega_0 \sin kt. \quad (9)$$

Учитывая, что  $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$ , равенство (9) можно представить в виде

$$dV_x = \frac{m_2 lk}{m_1 + m_2} \omega_0 \sin kt dt.$$

Интегрируя, получим

$$V_x = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0 \cos kt + C_3.$$

Поскольку в начальный момент ползун находился в покое, то

$$C_3 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0,$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \left[ \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0 \right] (1 - \cos kt),$$

$$dx = \left[ \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0 \right] (1 - \cos kt) dt.$$

Обозначим

$$\left[ \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0 \right] = A.$$

Тогда

$$dx = Adt - A \cos ktdt.$$

Интегрируя, находим

$$x = At - \frac{A}{k} \sin kt + C_4.$$

Так как при  $t = t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $C_4 = 0$ , получим закон движения ползуна в зависимости от времени при заданной начальной угловой скорости вращения стержня

$$x = At - \frac{A}{k} \sin kt = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0 \left( t - \frac{\sin kt}{k} \right).$$

Приведенное решение задачи о колебаниях эллиптического маятника может быть использовано при самостоятельной работе студентов над темами «Уравнения Лагранжа II рода» и «Малые колебания».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2 / А. А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1971. – 488 с.
- 2 Локтионов, А. В. К вопросу о составлении дифференциального уравнения при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2010. – Вып. 4. – С. 162–166.
- 3 Локтионов, А. В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 26. – С. 138–143.

A. V. LOKTIONOV

Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

#### SOLUTION OF THE ELLIPTIC PENDULUM SMALL OSCILLATIONS EQUATIONS

There is considered the calculation of the equation of an elliptical pendulum oscillation taking into account the gravity of the slide and the ball. The differential equations describing the system motion are written and solved. In the work it was assumed that at the initial moment of the deflection angle of the pendulum boom from the vertical position and the slider velocity are equal to zero, the angular velocity of the boom rotation is not equal to zero. Taking into account the adopted initial conditions the equations of the slide and the pendulum small oscillations are obtained.

Получено 26.11.2014