

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

Рассмотрен упругопластический изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем на упругом основании. При описании кинематики несимметричного по толщине пакета стержня для несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. В заполнителе перемещения по толщине изменяются линейно. Реакция основания описывается моделью Винклера. Получена система уравнений равновесия и ее решение в перемещениях. Приведены численные результаты для трехслойного стержня.

Ключевые слова: упругопластичность, трехслойный стержень, упругое основание, поперечный изгиб, метод упругих решений.

Введение. Деформирование слоистых стержней и пластин при статических и динамических нагрузках исследовалось в работах [1–5], трехслойных оболочек – [2, 6, 7]. В представленной работе приводится постановка и решение задачи об изгибе трехслойного упругопластического стержня, лежащего на упругом основании, со сжимаемым физически нелинейным заполнителем.

Постановка и решение задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень со сжимаемым заполнителем, наружные несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а заполнитель – нелинейно-упругий. При деформировании несущих слоев выполняются гипотезы Бернулли, в жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, для заполнителя учитывается его обжатие, деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев; h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя); b_0 – ширина стержня. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена к внешней плоскости первого слоя (рисунок 1). На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x)$.

Продольные и поперечные перемещения слоев $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w_1(x), u_1(x), w_2(x)$ и $u_2(x)$:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\
u^{(2)} &= u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\
u^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right); \\
w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

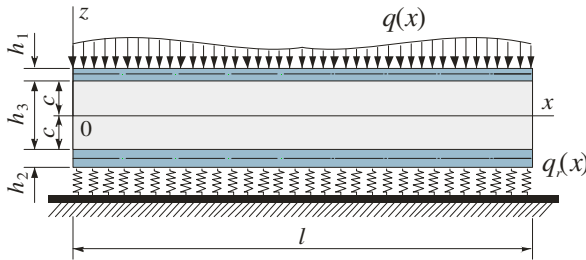


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня

Компоненты тензора деформаций в слоях получим, используя соотношения Коши и выражения (1):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)} &= u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,xx} \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\
\varepsilon_x^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_{1,x} + \frac{h_1}{4} w_{1,xx} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_{2,x} - \frac{h_2}{4} w_{2,xx} \right), \\
\varepsilon_{xz}^{(3)} &= \left(\frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4} \right) w_{1,x} + \left(\frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4} \right) w_{2,x} + \frac{u_1 - u_2}{4c}, \\
\varepsilon_z^{(3)} &= \frac{1}{2c} (w_1 - w_2) \quad (-c \leq z \leq c); \\
\varepsilon_x^{(2)} &= u_{2,x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,xx} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\
\varepsilon_{xz}^{(1)} &= \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в рассматриваемом случае будут следующими ($\vartheta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$; $i, j = x, y, z$):

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_x^{(k)}; \quad \vartheta_x^{(k)} = \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(k)} \quad (k = 1, 2); \quad (3)$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}); \quad \vartheta_x^{(3)} = \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)}.$$

Введем внутренние усилия и моменты:

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz; \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz; \quad (4)$$

$$Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz; \quad N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz; \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz,$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений; интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемого стержня следуют из вариационного принципа Лагранжа [2]:

$$\delta A_e - \delta A_i = 0, \quad (5)$$

где δA_e – вариация работы внешних сил; δA_i – вариация работы внутренних сил упругости;

$$\delta A = b_0 \int_0^l (q \delta w_1 - q_R \delta w_2) dx; \quad (6)$$

$$\delta A_i = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx.$$

В слоях стержня используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [8], которые в девиаторно-шаровой форме имеют вид:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k (1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})) \vartheta_{ij}^{(k)}, \quad (7)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z).$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\vartheta_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций (2); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое, $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – при $k = 1, 2$ это функции

пластичности Ильюшина [2], которые в случае $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_T^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\epsilon_T^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega^{(3)}(\epsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\epsilon_u^{(3)} \leq \epsilon_s^{(3)}$; $\epsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Рассмотрим методику решения краевой задачи. Исходя из соотношений (7) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}; \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k \vartheta_{ij}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)} \delta_{ij}; \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} \vartheta_{ij}^{(k)}. \quad (8)$$

Для рассматриваемого трехслойного стержня, с учетом формул для дивергента и шаровой части тензора деформаций (3), получим

– для несущих слоев

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}; \quad \sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)} = K_k^+ \epsilon_{xx}^{(k)};$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} = \frac{4}{3} G_k \epsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)};$$

– для заполнителя

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3 \vartheta_{xx}^{(3)} + 3K_3 \epsilon^{(3)} = K_3^+ \epsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{zz}^{(3)};$$

$$\sigma_{xx}^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_{xx}^{(3)} \omega^{(3)} = \frac{2}{3} G_3 (2\epsilon_{xx}^{(3)} - \epsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)}; \quad \sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega};$$

$$\sigma_{zz}^{(3)0} = 2G_3 \vartheta_{zz}^{(3)} + 3K_3 \epsilon^{(3)} = K_3^+ \epsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{xx}^{(3)};$$

$$\sigma_{zz}^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_{zz}^{(3)} \omega^{(3)} = \frac{2}{3} G_3 (2\epsilon_{zz}^{(3)} - \epsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)};$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)0} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)};$$

$$\sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}.$$

Здесь $\omega^{(k)} \equiv \omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)})$ – универсальные функции нелинейности материалов

слоев, определяемые экспериментально; $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k$; $K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k$.

Проведя операцию, подобную (9), с внутренними усилиями (4), получим:

$$\begin{aligned}
N_x^{(k)} &= N_x^{(k)0} - N_x^{(k)\omega}; & N_z^{(3)} &= N_z^{(3)0} - N_z^{(3)\omega}; & M_x^{(k)} &= M_x^{(k)0} - M_x^{(k)\omega}; \\
M_{xz}^{(3)} &= M_{xz}^{(3)0} - M_{xz}^{(3)\omega}; & Q^{(3)} &= Q^{(3)0} - Q^{(3)\omega}.
\end{aligned} \tag{10}$$

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. В практике часто используют известную модель Винклера (Winkler E.), согласно которой в нашем случае

$$q_r = \kappa_0 w_2, \tag{11}$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), причем реакция основания всегда направлена в сторону, противоположную уноу прогибу.

После подстановки в (5) значения работ (6), используя выражения (8)–(11), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в итерационном виде

$$\begin{aligned}
& a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_1^n,_{xx} - a_5 u_2^n,_{xx} + a_2 w_1^n,_{,x} + a_3 w_2^n,_{,x} - 2a_6 w_1^n,_{xxx} + a_7 w_2^n,_{xxx} = p_\omega^{n-1}; \\
& -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_1^n,_{xx} - a_9 u_2^n,_{xx} - a_{10} w_1^n,_{,x} - a_{17} w_2^n,_{,x} - a_6 w_1^n,_{xxx} + 2a_7 w_2^n,_{xxx} = h_\omega^{n-1}; \\
& a_2 u_1^n,_{,x} - a_{10} u_2^n,_{,x} + 2a_6 u_1^n,_{xxx} + a_6 u_2^n,_{xxx} + a_{11} w_1^n,_{xx} - a_{12} w_2^n,_{xx} + \\
& + a_{13} w_1^n,_{xxx} - a_{16} w_2^n,_{xxx} + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + \frac{1}{2} p,_{,x} h_1 + q_\omega^{n-1}; \\
& -a_3 u_1^n,_{,x} + a_{17} u_2^n,_{,x} - a_7 u_1^n,_{xxx} - 2a_7 u_2^n,_{xxx} - a_{12} w_1^n,_{xx} + a_{14} w_2^n,_{xx} - \\
& - a_{16} w_1^n,_{xxx} + a_{13} w_2^n,_{xxx} - a_8 w_1^n + (a_8 + \kappa_0) w_2^n = g_\omega^{n-1},
\end{aligned} \tag{12}$$

где a_i ($i=1, \dots, 17$) – коэффициенты, которые выражаются через объемный и сдвиговой модули упругости материалов K_k, G_k и геометрические параметры слоев стержня;

$$\begin{aligned}
p_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b_0} (H_1^{\omega(n-1)} - P_1^{\omega(n-1)},_{,x}); & q_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b_0} (S_1^{\omega(n-1)},_{,xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_1^{\omega(n-1)},_{,x}); \\
g_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b_0} (S_2^{\omega(n-1)},_{,xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_2^{\omega(n-1)},_{,x}); & H_1^{\omega(n-1)} &= \frac{2Q^{(3)\omega(n-1)}}{c}; \\
H_2^{\omega(n-1)} &= \frac{N_z^{(3)\omega(n-1)}}{2c}; \\
T_1^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}; & T_2^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}; \\
S_1^{\omega(n-1)} &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)\omega(n-1)} - M_x^{(1)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2^{\omega(n-1)} &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)\omega(n-1)} - M_x^{(2)\omega(n-1)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)}; \\
P_1^{\omega(n-1)} &= \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(1)\omega(n-1)}; \\
P_2^{\omega(n-1)} &= \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(2)\omega(n-1)}; \\
N_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) dz \quad (k = 1, 2); \\
M_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) z dz \quad (k = 1, 2); \\
N_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) dz; \\
N_z^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)(n-1)} - \varepsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) dz; \\
M_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) z dz; \\
M_z^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)(n-1)} - \varepsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) z dz; \\
Q^{(3)\omega(n-1)} &= 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)(n-1)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) dz.
\end{aligned}$$

Примем условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Граничные условия в сечениях $x = 0$; l (здесь l – длина стержня) принимают в перемещениях следующий вид:

$$w^{kn} = u^{kn}, \quad ,_x = w^{kn}, \quad ,_{xx} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (13)$$

где k – номер несущего слоя; n – номер линейного приближения.

Решение системы дифференциальных уравнений (12) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (13):

$$\begin{aligned}
u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right); \quad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right); \\
w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right); \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right),
\end{aligned} \quad (14)$$

где U_{1m}^n , U_{2m}^n , W_{1m}^n , W_{2m}^n – неизвестные амплитуды перемещений, соответствующие n -му шагу.

Поперечную нагрузку $q(x)$ и дополнительные «внешние» усилия представим в виде разложений в следующие ряды:

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \quad q_{\omega m}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\
 q_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \quad g_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\
 g_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \quad (15) \\
 h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad h_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \\
 p_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad p_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx.
 \end{aligned}$$

После подстановки перемещений (14) и нагрузок (15) в (12) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для искоемых амплитуд перемещений $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$:

$$\begin{cases}
 b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\
 b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\
 b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\
 b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1}.
 \end{cases} \quad (16)$$

Здесь параметры b_i выражаются через коэффициенты a_n и зависят от параметра m .

Амплитуды $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ получим, решив систему (16). Далее по формулам (14) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1), деформации – из (2), напряжения – из (7).

Численные результаты. Исследование деформирования проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т. Расчетные коэффициенты жесткости соответствуют слабым ($\kappa_0 = 1$), средним ($\kappa_0 = 100$) и весьма жестким ($\kappa_0 = 10^5$ МПа/м) основаниям. Геометрические параметры слоев стержня: $h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18$. Нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня и прижимает его к упругому основанию. Ее величина подбирались в соответствии с жесткостью основания таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени, но деформации оставались малыми, т. е. в рамках принятой модели.

Как следует из рисунка 2, в рассматриваемом случае деформирования стержня на основании *малой жесткости* только его заполнитель проявляет физически нелинейные свойства (темная заливка). Несущие слои остаются упругими.

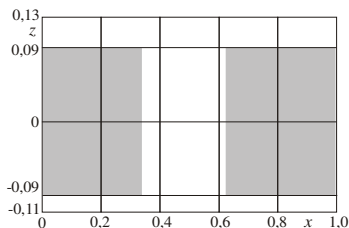


Рисунок 2 – Зоны физически нелинейного деформирования (темная заливка)

На рисунке 3 показаны области нелинейного деформирования в слоях стержня (темная заливка), покоящегося на основании средней жесткости. Заполнитель на 83 % деформируется физически нелинейно. Области пластичности в несущих слоях занимают в среднем 35 % объема материала.

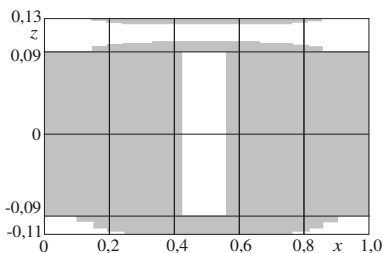


Рисунок 3 – Зоны пластичности и физической нелинейности материалов слоев (темная заливка) при основании средней жесткости

На рисунке 4 показаны области нелинейного деформирования в слоях стержня (темная заливка), покоящегося на основании высокой жесткости. Весь заполнитель деформируется физически нелинейно. Области пластичности в несущих слоях занимают в среднем 90 % объема материала.

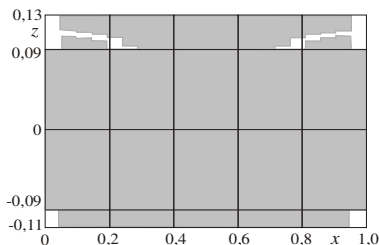


Рисунок 4 – Зоны пластичности и физической нелинейности материалов слоев (темная заливка) при основании высокой жесткости

Заключение. Таким образом, учет пластичности и физической нелинейности материалов слоев в трехслойном стержне, связанном с упругим основанием, приводит к существенному уточнению его напряженно-деформированного состояния. Нелинейные свойства материала заполнителя проявляются в первую очередь на слабых основаниях. При увеличении жесткости основания пластические деформации появляются в несущих слоях, распространяясь от середины стержня к торцам.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.

3 Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // International applied mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

4 **Леоненко, Д. В.** Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

5 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д. В. Леоненко // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

6 **Леоненко, Д. В.** Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

7 Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю. С. Соломонов [и др.]. – М. : Физматлит, 2014. – 408 с.

8 **Ильюшин, А. А.** Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – Ч. 1. Уругопластические деформации. – 376 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ELASTOPLASTIC BENDING OF THE THREE-LAYERED ROD ON AN ELASTIC BASE

Elastoplastic bending of a three-layered rod with compressible filler and on an elastic base is considered. For the description of kinematics of asymmetrical in thickness rod package in the bearing layers there were accepted the Bernoulli hypotheses. The displacements of the filler change linearly along the thickness. The reaction of the foundation is described by the Winkler's model. A system of equilibrium equations and its solution in displacements are obtained. Numerical results for a three-layer rod are presented.

Получено 29.09.2017