

УДК 539.3

Ю. В. ЗАХАРЧУК

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Рассмотрена задача о симметричном изгибе несимметричной по толщине упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе учтены поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб, который изменяется линейно по толщине. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Постановка краевой задачи в перемещениях приведена в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Аналитическое решение получено в итерационном виде.

**Ключевые слова:** трехслойная круглая пластина, сжимаемый наполнитель, перемещения, упругость.

**Введение.** Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Еще одна группа слоев предназначена для защиты от тепловых химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1–4]. Исследования деформирования слоистых упругопластических систем при циклических нагружениях описаны в работах [5–8]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в публикациях [9–15]. Результаты, связанные с колебаниями круговых трехслойных элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [15–21].

Следует отметить, что и деформирование и колебания трехслойных круговых пластин исследовались только в случае несжимаемого наполнителя. Это вызвано определенными математическими трудностями при постановке и решении соответствующих краевых задач. Однако учет сжимаемости за-

полнителя в большей степени адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций. Поэтому целью представленной работы стала разработка методики аналитического решения краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

**Постановка краевой задачи.** Рассмотрим упругую круговую трехслойную пластину со сжимаемым/растягиваемым наполнителем (рисунок 1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Систему координат свяжем со срединной плоскостью наполнителя. Для тонких несущих слоев с толщинами  $h_1 \neq h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В наполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ , зависимость прогиба по толщине принимается линейной.

На внешний слой пластины действует симметричная распределенная нагрузка с вертикальной  $q = q(r)$  и горизонтальной  $p = p(r)$  составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию наполнителя ( $\psi = 0, v = 0$  при  $r = r_0$ ). Через  $w(r)$  и  $u(r)$  обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя,  $v(r)$  – функция, характеризующая сжимаемость наполнителя. Обозначим через  $h_k$  толщину  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя), при этом  $h_3 = 2c$ .

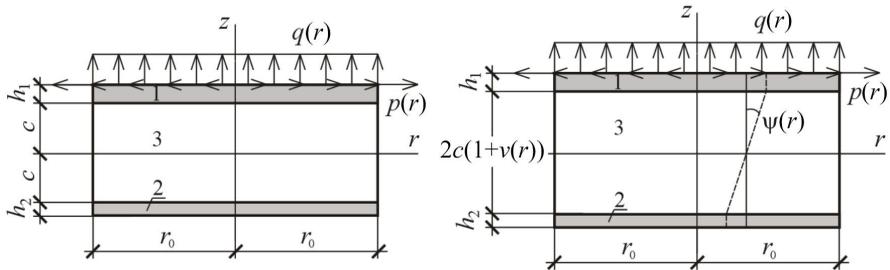


Рисунок 1 – Схема деформирования круговой трехслойной пластины

Продольные и поперечные перемещения в слоях  $u^{(k)}(r, z)$  и  $w^{(k)}(r, z)$  можно выразить через четыре искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$  следующими соотношениями:

для несущих слоев 1, 2

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c), & w^{(1)} &= w(r) + v(r)c, & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c), & w^{(2)} &= w(r) - v(r)c, & (-c - h_2 \leq z \leq -c); \end{aligned} \quad (1)$$

для наполнителя 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z), \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + v(r)z, \quad (-c \leq z \leq c),$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}c), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ &\quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - z(w_{,rr} - v_{,rr}c), \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ &\quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}z), \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z)), \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}(\psi - w_{,r} - 2v_{,r}z + w_{,r} + v_{,r}z) = \frac{1}{2}(\psi - v_{,r}z), \quad \varepsilon_z^{(3)} = v, \quad (-c \leq z \leq c).\end{aligned}\tag{2}$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$  выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned}T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ S_\alpha^{(3)} &= \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad Q^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad M_{rz}^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} z dz, \quad T_z^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}),\end{aligned}\tag{3}$$

где интегралы берутся по толщине  $k$ -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – суммарная вариация работы внешних сил  $\delta A_1$  и контурных усилий  $\delta A_2$ ;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p\delta u) r dr d\varphi.\tag{4}$$

Вариация работы контурных усилий  $T_r^0$ ,  $H_r^0$ ,  $M_r^0$ ,  $Q^0$ ,  $D_r^0$ ,  $M_{rz}^0$ :

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v_{,r} + M_{rz}^0 \delta v) d\varphi.\tag{5}$$

Вариация работы сил упругости:

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \int (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + 2 \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \varepsilon_{rz}^{(3)} dz + \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] r dr d\varphi, \quad (6)$$

где двойной интеграл распространен по срединной поверхности заполнителя  $S$ .

Вариации перемещений в слоях следуют из (1), деформаций – из (2). Рассмотрим суммарный интеграл по толщине слоев, входящий в виртуальную работу сил упругости (6). Для радиальных составляющих будет:

$$\begin{aligned} \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} \delta \varepsilon_r^{(1)} dz &= \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} [\delta u_{,r} + c \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr} c)] dz = \\ &= T_r^{(1)} \delta u_{,r} + c T_r^{(1)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(1)} \delta w_{,rr} - c M_r^{(1)} \delta v_{,rr}; \\ \int_{h_2} \sigma_r^{(2)} \delta \varepsilon_r^{(2)} dz &= \int_{h_2} \sigma_r^{(2)} [\delta u_{,r} - c \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} - \delta v_{,rr} c)] dz = \\ &= T_r^{(2)} \delta u_{,r} - c T_r^{(2)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(2)} \delta w_{,rr} + c M_r^{(2)} \delta v_{,rr}; \\ \int_{h_3} \sigma_r^{(3)} \delta \varepsilon_r^{(3)} dz &= \int_{h_3} \sigma_r^{(3)} [\delta u_{,r} + z \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr} z)] dz = \\ &= T_r^{(3)} \delta u_{,r} + M_r^{(3)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(3)} \delta w_{,rr} - S_r^{(3)} \delta v_{,rr}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем интегралы для тангенциальных составляющих. Просуммировав, имеем:

$$\begin{aligned} \delta W = \iint_S [T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} - D_r \delta v_{,rr} + Q^{(3)} \delta \psi - M_{rz}^{(3)} \delta v_{,r} + T_z^{(3)} \delta v + \\ + \frac{1}{r} (T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} - D_\varphi \delta v_{,r})] r dr d\varphi, \quad (7) \end{aligned}$$

где внутренние усилия  $T_a$ ,  $M_a$ ,  $H_a$ ,  $D_a$ ,  $Q^{(3)}$ ,  $M_{rz}^{(3)}$  и  $T_z^{(3)}$  ( $a = r, \varphi$ ) описываются соотношениями (3).

Вариацию потенциальной энергии проинтегрируем в полярной системе координат. Подынтегральное выражение в (7) можно разбить на два интеграла, вынося в первом из них операцию дифференцирования за общую скобку, а во втором – группируя слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_0^{2\pi} \{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + [(r M_r)_{,r} - M_\varphi] \delta w - r D_r \delta v_{,r} + \\ + [(r D_r)_{,r} - r M_{rz}^{(3)} - D_\varphi] \delta v \} d\varphi - \iint_{r \varphi} \{ [(r T_r)_{,r} - T_\varphi] \delta u + [(r H_r)_{,r} - H_\varphi - r Q^{(3)}] \delta \psi + \\ + [(r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}] \delta w + [(r D_r)_{,rr} - r T_z^{(3)} - D_{\varphi,r} - (r M_{rz}^{(3)})_{,r}] \delta v \} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (4), (5) и потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомым функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым наполнителем:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q^{(3)} = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r} - M_{rz}^{(3)}) - T_z^{(3)} - M_{rz}^{(3)},r = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

На границе  $r = 1$  должны выполняться силовые условия:

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0, \\ D_r = D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) - M_{rz}^{(3)} = M_{rz}^0.$$

Выразим внутренние обобщенные усилия (3) через перемещения. Для этого напряжения в слоях рассматриваемой пластины представим через деформации с помощью закона Гука в девiatorно-шаровой форме:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)} \delta_{ij}, \quad (9)$$

где

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{ij}^{(k)}, \quad \vartheta_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}), \quad (i, j = r, \varphi, z; k = 1, 2, 3).$$

Шаровая и девiatorная части тензора деформаций в (9) будут

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}), \quad \vartheta_r^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)}, \\ \vartheta_\varphi^{(k)} = \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \quad \varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \vartheta_r^{(3)} = \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_\varphi^{(3)} = \varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_z^{(3)} = \varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)}, \quad \vartheta_{rz}^{(3)} = \varepsilon_{rz}^{(3)}.$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями (10) законом Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij} = 2G_k \left( \frac{2}{3} \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3} \varepsilon_\phi^{(k)} \right) + 3K_k \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)}) = \\
&= \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right) \varepsilon_r^{(k)} + \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) \varepsilon_\phi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_r^{(k)} + K_k^- \varepsilon_\phi^{(k)}, \quad (k=1, 2), \\
\sigma_r^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3} \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_\phi^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)} \right) + 3K_3 \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\
&= \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \varepsilon_r^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right) (\varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = K_3^+ \varepsilon_r^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\
\sigma_\phi^{(k)} &= 2G_k \left( \frac{2}{3} \varepsilon_\phi^{(k)} - \frac{1}{3} \varepsilon_r^{(k)} \right) + 3K_k \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)}) = \\
&= \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right) \varepsilon_\phi^{(k)} + \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) \varepsilon_r^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_\phi^{(k)} + K_k^- \varepsilon_r^{(k)}, \quad (k=1, 2), \quad (11) \\
\sigma_\phi^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3} \varepsilon_\phi^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)} \right) + 3K_3 \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\
&= \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \varepsilon_\phi^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right) (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = K_3^+ \varepsilon_\phi^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\
\sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3} \varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_\phi^{(3)} \right) + 3K_3 \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\
&= \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \varepsilon_z^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right) (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)}) = K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)}), \quad \sigma_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)},
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

Используя соотношения (9), (10), (11), выразим обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$ . Подставив их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (8), получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_5 v_{,r}) + 2c K_3^- v_{,r} &= -p, \\
L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r} - a_7 v_{,r}) - 2c G_3 \psi &= 0, \\
L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_8 v_{,r}) &= -q, \\
L_3(a_5 u + a_7 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) + \frac{2}{3} c^3 \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &\left( 2K_3 - \frac{1}{3} G_3 \right) - \\
- 2c K_3^+ v - 2c K_3^- \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right) &= 0,
\end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя),  $L_3$  определяются соотношениями:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \quad a_4 = c^2(h_1K_1^+ + h_2K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+), \\
a_5 &= c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+], \\
a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+, \\
a_7 &= c^2[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+], \\
a_8 &= c[h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ - h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+], \\
a_9 &= c^2 \left( h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{5}c^3K_3^+ \right), \\
L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\
L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.
\end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к (12) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0. \quad (13)$$

Следует отметить, что если в системе (12) положить  $v(r) \equiv 0$ , то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым наполнителем [1–7].

**Решение краевой задачи.** Решение поставленной краевой задачи (12), (13) проведем с помощью метода малого параметра. Для этого предположим, что функция сжимаемости  $v(r)$  мала, и ее на первом шаге можно положить равной нулю  $v^{(0)}(r) \equiv 0$ , в первых трех уравнениях системы (12). Затем нужно решить полученную систему из этих уравнений. По найденным функциям  $u^{(1)}(r)$ ,  $\psi^{(1)}(r)$ ,  $w^{(1)}(r)$  вычисляются слагаемые в четвертом уравнении (12), в которые эти функции входят. После чего получим дифференциальное уравнение для нахождения первого приближения функции сжимаемости  $v^{(1)}(r)$ . В дальнейшем для  $n$ -го шага приближения имеем следующую итерационную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w^{(n)})_{,r} &= -p + L_2(a_5v^{(n-1)})_{,r} - 2cK_3^-v^{(n-1)}_{,r}, \\
L_2(a_2u^{(n)} + a_4\psi^{(n)} - a_5w^{(n)})_{,r} &- 2cG_3\psi^{(n)} = L_2(a_7v^{(n-1)})_{,r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w^{(n)},_r) &= -q + L_3(a_8v^{(n-1)},_r), \\
&- L_3(a_9v^{(n)},_r) + \frac{2}{3}c^3 \left( v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r} \right) \left( 2K_3 - \frac{1}{3}G_3 \right) - \\
&- 2cK_3^+ v^{(n)} = -L_3(a_5u^{(n)} + a_7\psi^{(n)} - a_8w^{(n)},_r) + 2cK_3^- \left( u^{(n)},_r + \frac{u^{(n)}}{r} \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
p^{(n-1)} &= L_2(a_5v^{(n-1)},_r) - 2cK_3^- v_{,r}, \quad h^{(n-1)} = L_2(a_7v^{(n-1)},_r), \\
q^{(n-1)} &= L_3(a_8v^{(n-1)},_r), \\
g^{(n)} &= -L_3(a_5u^{(n)} + a_7\psi^{(n)} - a_8w^{(n)},_r) + 2cK_3^- \left( u^{(n)},_r + \frac{u^{(n)}}{r} \right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Итерации при решении системы уравнений (14) принимают вид

$$\begin{aligned}
L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w^{(n)},_r) &= -p + p^{(n-1)}, \\
L_2(a_2u^{(n)} + a_4\psi^{(n)} - a_5w^{(n)},_r) - 2cG_3\psi^{(n)} &= h^{(n-1)}, \\
L_3(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w^{(n)},_r) &= -q + q^{(n-1)}, \\
&- L_3(a_9v^{(n)},_r) + \frac{2}{3}c^3 \left( v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r} \right) \left( 2K_3 - \frac{1}{3}G_3 \right) - 2cK_3^+ v^{(n)} = g^{(n)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

После однократного интегрирования из третьего уравнения (16) следует

$$L_2(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w_{,r}^{(n)}) = -\frac{1}{r} \left( \int (q - q^{(n-1)})rdr - C_1 \right).$$

Константа интегрирования  $C_1$  будет определена далее.

Используя полученное уравнение и первое из (16), можно исключить из второго уравнения этой же системы радиальное перемещение  $u^{(n)}(r)$  и прогиб  $w^{(n)}(r)$ . В результате для нахождения функции  $\psi^{(n)}(r)$  следует неоднородное модифицированное уравнение Бесселя

$$L_2(\psi^{(n)}) - \beta^2 \psi^{(n)} = f, \tag{17}$$

где  $\beta^2 = 2cb_3G_3 / (b_1b_3 - b_2^2)$ .

В правой части уравнения (17) находится функция

$$f(r) = \gamma_1 \left[ \frac{(p - p^{(n-1)})(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_1} + \frac{b_2}{r} \left( \int (q - q^{(n-1)})rdr - C_1 \right) \right] + b_3h^{(n-1)}, \tag{18}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{b_1 b_3 - b_2^2}.$$

Соответствующие числовые множители включены в константу интегрирования  $C_1$ .

Решение полученного уравнения можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения  $\psi_0^{(n)}$  и частного решения  $\psi_r^{(n)}$  неоднородного уравнения (17)

$$\psi^{(n)} = \psi_0^{(n)} + \psi_r^{(n)}, \quad (19)$$

причем

$$L_2(\psi_0^{(n)}) - \beta^2 \psi_0^{(n)} = 0.$$

Решение этого уравнения известно [19]:

$$\psi_0^{(n)} = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r). \quad (20)$$

Здесь  $I_1(\beta r)$  – модифицированная функция Бесселя первого порядка,  $K_1(\beta r)$  – функция Макдональда первого порядка.

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка, частное решение уравнения (17) можно получить, используя два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения

$$\psi_r^{(n)} = K_1(\beta r) \int \frac{I_1(\beta r) f(r)}{W} dr - I_1(\beta r) \int \frac{K_1(\beta r) f(r)}{W} dr, \quad (21)$$

где  $W$  – определитель Вронского. В нашем случае

$$W\{I_1, K_1\} = K_{1,r} I_1 - I_{1,r} K_1 = -\frac{1}{r}.$$

Таким образом, частное решение (21) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\psi_r^{(n)} = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr. \quad (22)$$

Суммируя (20) и (22), получаем искомое решение для сдвига (19). После этого прогиб и радиальное перемещение следуют из оставшихся уравнений системы (16). В результате

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) - K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr; \\ w^{(n)} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p - p^{(n-1)}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q - q^{(n-1)}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1}{4 b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_4}{4} r^2 + C_5 \ln r + C_6; \end{aligned} \quad (23)$$

$$u^{(n)} = \frac{a_3}{a_1} w_{,r}^{(n)} - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)} - \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p - p^{(n-1)}) + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}.$$

Здесь по формуле  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  – линейные интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам, введенным в (12)

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr; \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f dr dr dr. \quad (24)$$

Вычислив по формулам (15), (23) функцию  $g^{(m)}(r)$  и подставив ее в четвертое уравнение системы (16), получим дифференциальное уравнение с известной правой частью для определения искомой функции сжатия  $v^{(m)}(r)$ . Решение этого уравнения будет следующим:

$$\begin{aligned} v^{(n)} = & \frac{3J_0(m_5 r) m_2 \pi^2}{8m_6 m_1} \int \{J_1(m_4 r) Y_0(m_4 r) - J_0(m_4 r) Y_1(m_4 r)\} Y_0(m_5 r) r^2 g(r) dr - \\ & - \frac{3Y_0(m_5 r) m_2 \pi^2}{8m_6 m_1} \int \{J_1(m_4 r) Y_0(m_4 r) - J_0(m_4 r) Y_1(m_4 r)\} J_0(m_5 r) r^2 g(r) dr + \\ & + \frac{3J_0(m_4 r) \pi^2}{8m_7 m_1} \int [Y_0(m_4 r) \{J_1(m_5 r) Y_0(m_5 r) m_1 - J_0(m_5 r) Y_1(m_5 r) m_1 + \\ & + 6J_0(m_5 r) Y_1(m_5 r) c^3 K_3 - J_0(m_5 r) Y_1(m_5 r) c^3 G_3 - 6J_1(m_5 r) c^3 K_3 Y_0(m_5 r) + \\ & + J_1(m_5 r) c^3 G_3 Y_0(m_5 r)\} r^2 g(r)] dr - \\ & - \frac{3Y_0(m_4 r) \pi^2}{8m_7 m_1} \int [J_0(m_4 r) \{J_1(m_5 r) Y_0(m_5 r) m_1 - J_0(m_5 r) Y_1(m_5 r) m_1 + \\ & + 6J_0(m_5 r) Y_1(m_5 r) c^3 K_3 - J_0(m_5 r) Y_1(m_5 r) c^3 G_3 - 6J_1(m_5 r) c^3 K_3 Y_0(m_5 r) + \\ & + J_1(m_5 r) c^3 G_3 Y_0(m_5 r)\} r^2 g(r) \pi^2] dr + C_1 J_0(m_5 r) + C_2 Y_0(m_5 r) + \\ & + C_3 J_0(m_5 r) + C_4 Y_0(m_5 r), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{c(-162b_3 a_9 + 36c^5 K_3^2 - 12c^5 K_3 G_3 + c^5 G_3^2)}, \\ m_2 &= \sqrt{c(-162b_3 a_9 + 36c^5 K_3^2 - 12c^5 K_3 G_3 + c^5 G_3^2) + 6c^3 K_3 - c^3 G_3}, \\ m_3 &= \sqrt{c(-162b_3 a_9 + 36c^5 K_3^2 - 12c^5 K_3 G_3 + c^5 G_3^2) - 6c^3 K_3 + c^3 G_3}, \\ m_4 &= \frac{1}{3} \sqrt{-\frac{\sqrt{c(-162b_3 a_9 + 36c^5 K_3^2 - 12c^5 K_3 G_3 + c^5 G_3^2) + 6c^3 K_3 - c^3 G_3}}{a_9}}, \end{aligned}$$

$$m_5 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sqrt{c(-162b_3a_9 + 36c^5K_3^2 - 12c^5K_3G_3 + c^5G_3^2)} - 6c^3K_3 + c^3G_3}{a_9}},$$

$$m_6 = a_9 \sqrt{-\frac{\sqrt{c(-162b_3a_9 + 36c^5K_3^2 - 12c^5K_3G_3 + c^5G_3^2)} + 6c^3K_3 - c^3G_3}{a_9}},$$

$$m_7 = a_9 \sqrt{\frac{\sqrt{c(-162b_3a_9 + 36c^5K_3^2 - 12c^5K_3G_3 + c^5G_3^2)} - 6c^3K_3 + c^3G_3}{a_9}}.$$

Таким образом, формулы (15), (23) и (25) дают в итерациях решение задачи о деформировании трехслойной круговой упругой пластины со сжимаемым наполнителем.

**Заключение.** Предложенная в работе методика позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем при различных нагрузках.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
- 2 **Горшков, А. Г.** Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
- 3 **Старовойтов, Э. И.** Сопrotивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 4 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
- 5 **Горшков, А. Г.** Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
- 6 **Gorshkov, A. G.** Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol. 36, No. 1. – P. 64–69.
- 7 **Москвитин, В. В.** Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.
- 8 **Москвитин, В. В.** К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
- 9 **Starovoitov, E. I.** Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, No. 2. – P. 291–298.
- 10 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

11 Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А. Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.

12 **Starovoitov, É. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

13 **Леоненко, Д. В.** Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 106–119.

14 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

15 **Starovoitov, É. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, No. 4. – P. 451–459.

16 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э. И. Старовойтов, В. Д. Кубенко, Д. В. Тарлаковский // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2009. – № 2. – С. 16–19.

17 Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation International / V. D. Kubenko [etc.] // Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, No. 5. – P. 541–547.

18 **Леоненко, Д. В.** Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, No. 1. – P. 111–118.

19 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.

20 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

21 **Starovoitov, E. I.** Circular sandwich plates under local impulsive loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 8. – P. 945–952.

*YU. V. ZAKHARCHUK*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **DISPLACEMENTS IN THE CIRCULAR THREE-LAYERED PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER**

The problem of symmetric bending of an asymmetrical in thickness three-layered elastic plate with a compressible filler is investigated. The Kirchhoff's hypotheses are accepted for the thin bearing layers. In a relatively thick filler there were taken into account the transverse shear, radial displacements and deflection variable linearly in thickness. The differential equations of equilibrium in the efforts are obtained using the Lagrange variational method. The setting of the boundary value problem in the displacements is given in the cylindrical coordinate system. The analytical solution was obtained in the iterative form.

Получено 29.09.2017