$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v_2}{\sqrt{a_{22}}}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{g}\frac{T_{12}}{\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{11}}}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sqrt{g}\frac{T_{22}}{\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{22}}}\right)+\Gamma_{11}^{2}\frac{T_{11}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{11}}}+$$

$$+2\Gamma_{12}^{2}\frac{T_{12}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}}+\Gamma_{22}^{2}\frac{T_{22}}{\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{22}}}=0;$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a_{11}}}\rho v_1\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a_{22}}}\rho v_2\right)=0.$$

В уравнениях (3) учтено, что $\Gamma_{21}^{1}=T_{21}^{1}$, $\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}$, $T_{12}=T_{21}$. В уравнениях (3) введены следующие обозначения:

$$g=a_{11}a_{22}-a_{12}^{2};\quad T_{11}=(\rho v_1^2+P);\quad T_{22}=(\rho v_2^2+P);\quad T_{12}=\rho v_1 v_2; \tag{4}$$

$r;\varphi$ – пространственные координаты; t – временная координата; $v_1(r,\varphi,t)$ – компонента вектора скорости v в направлении координаты r; $v_2(r,\varphi,t)$ – компонента вектора скорости v в направлении координаты φ; $\rho(r,\varphi,t)$ – плотность среды; $P(r,\varphi,t)$ – давление в среде; a_{ij} – коэффициент первой квадратичной формы; Γ_{ij}^{k}, $(i,\ j,\ k=1;2)$ – символы Кристофеля II рода, отвечающие за геометрию области S в неортогональной криволинейной системе координат [4].

Уравнения движения среды в контравариантных величинах в произвольной криволинейной системе координат $(r;\varphi)$ в тензорно-векторном виде принимаются согласно [4]. Предполагаемый алгоритм решения основывается на использовании разностных схем Мак – Кормака для численного решения динамических задач о поведении сжимаемой жидкости [6] и конечно – разностной аппроксимации уравнений колебаний оболочки [5].

Список литературы

1 **Ляхов, Г. М.** Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / Г. М. Ляхов. – М. : Наука, 1982 – 286 с.

2 Механический эффект взрыва в грунтах / И. А. Лучко [и др.]. – Киев : Наук. думка, 1989. – 232 с.

3 **Гуляєв, В. І.** Елементи теорії поверхонь / В. І. Гуляєв, І. В. Горбунович, Л. В. Гловач. – Київ : Нац. транспортний ун-т, 2011. – 239 с.

4 **Кильчевский, Н. А.** Основы тензорного исчисления с приложениями к механике / Н. А. Кильчевский . – Киев : Наук. думка, 1972. – 198 с.

5 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках : [монография] / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : Изд.-полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

6 **Флетчер, К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2 / К. Флетчер. – М. : Мир, 1991. – 526 с.

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В. Ф. МЕЙШ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Ю. А. МЕЙШ, В. М. МЕЛЬНИК

Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина

Построение повышенной точности конечно-разностных схем основано на подходе нахождения приближенных решений по Ричардсону [1]. Рассмотрим уравнения колебаний конических оболочек в общем виде. Предполагается, что напряженно-деформированное состояние исходной оболочки можно описать в рамках теории оболочек типа Тимошенко [2]. В этом случае уравнения колебания имеют вид

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{11})-\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}T_{22}+\frac{\partial S}{\partial s_2}=\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2S)+\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}S+\frac{\partial T_{22}}{\partial s_2}+k_2T_{23}=\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{13})+\frac{\partial T_{23}}{\partial s_2}-k_2T_{22}+P_3(s_1,\, s_2,\, t)=\rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2M_{11})-\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}M_{22}+\frac{\partial H}{\partial s_2}-T_{13}=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2H)+\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}H+\frac{\partial M_{22}}{\partial s_2}-T_{23}=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\ .$$

В уравнениях (1) $s_1=A_1\alpha_1,\ s_2=A_2\alpha_2$ и t – пространственные и временная координаты; $A_1,\, A_2$, α_1,α_2 – соответственно, коэффициенты первой квадратичной формы и криволинейные координаты срединной поверхности оболочки; $u_1,\, u_2,\, u_3,\, \varphi_1,\, \varphi_2$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; ρ – плотность материала оболочки; $P_3(s_1,s_2,\, t)$ – внутренняя распределенная нагрузка. При исследовании процесса неосесимметричных колебаний конических оболочек использована система координат $s_1,\, s_2,\, t$, причем координата s_1 отсчитывается от вершины конуса. В некоторых случаях, в частности для усеченных конических оболочек, рационально применение координаты s_1, которая отсчитывается от края оболочки. Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности оболочки имеют вид $A_1=1,\quad A_2=R_s,\ k_1=0,\quad k_2=\cos\theta\,/\,R_s$, где θ– угол конусности; s_1 – текущая координата; $R_s=R_0+s_1\sin\theta$, R_0 – радиус оболочки при $s_1=s_{10}$.

Для решения исходных уравнений применяется интегро-интерполяционный метод по пространственным координатам и явная аппроксимация по временной координате [2, 3]. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{1}{A_{2i}}\frac{(A_2T_{11}^n)_{i+1/2,\,j}-(A_2T_{11}^n)_{i-1/2,\,j}}{\Delta s_1}-\Psi_i\,T_{22i,\,j}^n+\frac{S_{i,\,j+1/2}-S_{i,\,j-1/2}}{\Delta s_2}=\rho h(s_{1i})(u_{1i,\,j}^n)_{\bar{t}t}\,; \tag{2}$$

$$\frac{1}{A_{2i}}\frac{(A_2S^n)_{i+1/2,\,j}-(A_2S^n)_{i-1/2,\,j}}{\Delta s_1}+\Psi_i\,S_{i,\,j}^n+\frac{T_{22i,\,j+1/2}^n-T_{22i,\,j-1/2}^n}{\Delta s_2}+k_{2i}\frac{T_{23i,\,j+1/2}^n+T_{23i,\,j-1/2}^n}{2}=\rho h(s_{1i})(u_{2i,\,j}^n)_{\bar{t}t}\,;$$

$$\frac{1}{A_{2i}}\frac{(A_2T_{13}^n)_{i+1/2,\,j}-(A_2T_{13}^n)_{i-1/2,\,j}}{\Delta s_1}+\frac{T_{23i,\,j+1/2}^n-T_{23i,\,j-1/2}^n}{\Delta s_2}-k_{2i}\frac{T_{22i,\,j+1/2}^n+T_{22i,\,j-1/2}^n}{2}+P_{3i,\,j}^n=\rho h(s_{1i})(u_{3i,\,j}^n)_{\bar{t}t}\,;$$

$$\frac{1}{A_{2i}}\frac{(A_2M_{11}^n)_{i+1/2,\,j}-(A_2M_{11}^n)_{i-1/2,\,j}}{\Delta s_1}-\Psi_i\frac{M_{22i,\,j+1/2}^n+M_{22i,\,j-1/2}^n}{2}+$$

$$+\frac{H_{i,\,j+1/2}^n-H_{i,\,j-1/2}^n}{\Delta s_2}-\frac{T_{13i+1/2,\,j}^n+T_{13i-1/2,\,j}^n}{2}=\frac{\rho h^3(s_{1i})}{12}(\varphi_{1i,\,j}^n)_{\bar{t}t}\,;$$

$$\frac{1}{A_{2i}}\frac{(A_2H^n)_{i+1/2,\,j}-(A_2H^n)_{i-1/2,\,j}}{\Delta s_1}+\Psi_i\frac{H_{i,\,j+1/2}^n+H_{i,\,j-1/2}^n}{2}+$$

$$+\frac{M_{22i,\,j+1/2}^n-M_{22i,\,j-1/2}^n}{\Delta s_2}-\frac{T_{23i,\,j+1/2}^n+T_{23i,\,j-1/2}^n}{2}=\frac{\rho h^3(s_{1i})}{12}(\varphi_{2i,\,j}^n)_{\bar{t}t}\,;\ \ \Psi_i=\left.\left(\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{ds_1}\right)\right|_i\,.$$

Если рассматривать цилиндрическую оболочку как частный случай уравнений (1), (2) в системе координат $x, y, t,$ то такой подход приводит к точности аппроксимации $O[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \tau^2]$, $\Delta x, \Delta y, \tau$ – разностные шаги по пространственным и временной координатам. В случае конических оболочек, за счет переменного шага по координате s_2 точность аппроксимации падает $\sim O[(\Delta s_1)^2 + \Delta s_2 + \tau^2]$, т. е. в общем разностная схема имеет первый порядок точности. Для построения разностной схемы более высокого порядка используется подход, основанный на нахождении приближенных решений по Ричардсону [1]. Причем при фиксированном разностном шаге по временной координате используется последовательность приближенных аппроксимаций по пространственным координатам s_1, s_2 (возможно, достаточно по координате s_2). При этом процедура экстраполяции осуществляется согласно формуле

$$\tilde{\bar{U}}^n_{(\Delta s_1,\, \Delta s_2)} = \frac{4}{3}\bar{U}^n_{(\Delta s_1/2,\, \Delta s_2/2)} - \frac{1}{3}\bar{U}^n_{(\Delta s_1,\, \Delta s_2)},$$

где $\bar{U}^n_{(\Delta s_1/2,\, \Delta s_2/2)}$ и $\bar{U}^n_{(\Delta s_1,\, \Delta s_2)}$ – численные решения уравнений колебаний (1) соответственно с дискретными шагами по пространственным координатам $\Delta s_1/2, \Delta s_2/2$ и $\Delta s_1, \Delta s_2$; $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$. При этом, порядок аппроксимации данного подхода дает $\sim O[(\Delta s_1)^4 + (\Delta s_2)^2 + \tau^2]$.

Данный подход позволяет повысить порядок аппроксимации как по координате s_2, так и по координате s_1. Численные эксперименты подтвердили правоту данного подхода.

Список литературы

1 **Марчук, Г. И.** Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1980. – 536 с.

2 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: [монография] / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : Изд.-полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

3 **Самарский, А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

УДК 621.534; 62.752, 629.4.015

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ В СОЕДИНЕНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. С. МИРОНОВ

Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

Динамическое качество транспортных машин, высокая надежность, комфортные условия для взаимодействующего с техникой персонала играют большую роль в обеспечении конкурентоспособности продукции машиностроения в условиях современных экономических отношений [1, 2]. Создание современной техники является сложным комплексным процессом, циклы которого перемежаются исследованиями, расчетами, «экспериментами», что, в целом, приводит к увеличению объемов предпроектных и предварительных исследований, построенных на методах математического моделирования. При решении задач динамики машин учет вибрационных факторов часто создает затруднения в силу многофактороности проявлений динамических состояний, которые могут проявляться не только через кинематические, но и через силовые взаимодействия. Ряд вопросов этого направления рассмотрен в работах [3, 4].

В предлагаемой работе развивается метод определения динамических реакций, возникающих в механических колебательных системах, имеющих объект, динамическое состояние которого оценивается с учетом того, что объект отображается системой с двумя степенями свободы, имея возможность изменять конфигурацию системы.

1 Особенности подходов: расчетные схемы, математические модели. При динамическом взаимодействии элементов технических объектов, рассматриваемых как механические колебатель-