Четвертое уравнение в (2) разделим на коэффициент $-a_{10}$ и в правых частях уравнений этой системы введем обозначения

$$p^{(n-1)} = a_4 \mathrm{L}_2(v^{(n-1)},_r) - K_3^- v,_r; \; h^{(n-1)} = a_7 \mathrm{L}_2(v^{(n-1)},_r); \; q^{(n-1)} = a_9 \mathrm{L}_3(v^{(n-1)},_r);$$

$$g^{(n)} = \frac{1}{a_{10}}\left[q + \mathrm{L}_3(a_4 u^{(n)} + a_7 \psi^{(n)} - a_9 w^{(n)},_r) - K_3^- \left(u^{(n)},_r + \frac{u^{(n)}}{r} \right) \right]. \tag{3}$$

Итерационная система (2) с учетом обозначений (3) принимает вид

$$\mathrm{L}_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w^{(n)},_r) = p^{(n-1)},$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w^{(n)},_r) - 2cG_3 \psi^{(n)} = h^{(n-1)},$$
$$\mathrm{L}_3(a_3 u^{(n)} + a_6 \psi^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r) = -q + q^{(n-1)},$$
$$\mathrm{L}_3(v^{(n)},_r) - \frac{c}{6a_{10}}\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right)\left(v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r}\right) + \frac{1}{2ca_{10}} K_3^+ v^{(n)} = g^{(n)}.$$

Дальнейшее решение предполагается получать методом последовательных приближений.

УДК 539.3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТЕРМОУПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. С. ЗЕЛЕНАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Трехслойные конструкции имеют достаточно широкое распространение в различных отраслях промышленности, строительства, поэтому существует необходимость разработки математических моделей и уточнения методов их расчета.

В монографии [1] рассмотрены постановки и методы решения краевых задач трехслойных стержней в терморадиационных полях. В статье [2] рассмотрен цилиндрический изгиб трехслойных пластин в температурном поле. Ранее в работе [3] уже было получено решение задачи об изгибе упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем.

Здесь выполнена постановка задачи о статическом деформировании термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем. Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина. Трехслойная конструкция представляет собой систему, состоящую из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя. Несущие слои сравнительно тонкие, поэтому они выполняются из материалов высокой прочности и жесткости. Они предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Заполнитель служит для образования монолитной конструкции, обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями, гарантируя тем самым совместную работу слоев пластины.

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлениях, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка q и тепловой поток с интенсивностью q_t.

Используем соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме, которые в температурном поле принимают вид

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k)Э_{ij}^{(k)}; \tag{1}$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k) \quad (i, j = x, y, z,\ k = 1, 2, 3),$$

где $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k-го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0.

С учетом (1) компоненты тензора напряжений в слоях пластины выражаем через линейные (с индексом «0») и температурные (с индексом «t») составляющие:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)t}; \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k(T_k)Э_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)}\delta_{ij}; \ \sigma_{ij}^{(k)t} = 3K_k\alpha_{0k}\Delta T_k. \tag{2}$$

Аналогичную (2) операцию проводим с внутренними усилиями ($k = 1, 2, 3$):

$$N_{xx}^{(k)} = N_{xx}^{(k)0} - N_{xx}^{(k)t}; \quad N_{yy}^{(k)} = N_{yy}^{(k)0} - N_{yy}^{(k)t}; \quad M_{xx}^{(k)} = M_{xx}^{(k)0} - M_{xx}^{(k)t};$$

$$M_{yy}^{(k)} = M_{yy}^{(k)0} - M_{yy}^{(k)t}; \quad N_{zz}^{(3)} = N_{zz}^{(3)0} - N_{zz}^{(3)t};$$

$$M_{xy}^{(k)} = M_{xy}^{(k)0}; \quad Q_{xy}{}^{(k)} = Q_{xy}{}^{(k)0}; \quad M_{xz}^{(3)} = M_{xz}^{(3)0}, \quad M_{yz}^{(3)} = M_{yz}^{(3)0};$$

$$Q_{xz}{}^{(3)} = Q_{xz}{}^{(3)0}, \quad Q_{yz}{}^{(3)} = Q_{yz}{}^{(3)0}. \tag{3}$$

Приведенные обобщенные усилия также разбиваем на линейные и температурные составляющие, после чего подставляем в уравнение равновесия Лагранжа, при этом учитываем, что температура изменяется только по толщине пластины $T_k = T_k(z)$ и поле стационарно.

Система уравнений равновесия термоупругой трехслойной пластины примет вид:

$$H_{1x}^0 - V_1^0,_y - P_{1x}^0,_x = p_x; \ H_{1x}^0 + V_2^0,_y + P_{2x}^0,_x = 0;$$

$$H_{1y}^0 - V_1^0,_x - P_{1y}^0,_y = p_y; \ H_{1y}^0 + V_2^0,_x + P_{2y}^0,_y = 0;$$

$$S_{1x}^0,_{xx} + H_2^0 - T_{1x}^0,_x - U_1^0,_{xy} + S_{1y}^0,_{yy} - T_{1y}^0,_y = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} + H_2^t;$$

$$S_{2x}^0,_{xx} - H_2^0 - T_{2x}^0,_x - U_2^0,_{xy} + S_{2y}^0,_{yy} - T_{2y}^0,_y = -H_2^t, \tag{4}$$

где H_{kx}^0, H_{ky}^0, V_k^0, P_{kx}^0, P_{ky}^0, $S_{kx}^0, S_{ky}^0, H_2^0, T_{kx}^0, T_{ky}^0, U_k^0$ – линейные обобщенные усилия. Слагаемое $H_2^t = \dfrac{N_{zz}^{(3)t}}{2c}$ соответствует температурному составляющему и представлено в виде внешней нагрузки.

С силовыми граничными условиями поступим аналогично, т.е. при $x = 0, l_x$ должны выполняться требования:

$$P_{1x}^0 = N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^t; \quad P_{2x}^0 = N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^t; \quad V_1^0 = Q_{rxy}^{(1)}, \quad V_2^0 = Q_{rxy}^{(2)};$$

$$T_{1x}^0 - S_{1x}^0,_x - U_1^0,_y = Q_{rx}^{(1)}; \ T_{2x}^0 - S_{2x}^0,_x - U_2^0,_y = Q_{rx}^{(1)}, \quad S_{1x}^0 = M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^t, \quad S_{2x}^0 = M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^t.$$

При $y = 0, l_y$

$$P_{1y}^0 = N_{sy}^{(1)} + P_{1y}^t; \quad P_{2y}^0 = N_{sy}^{(2)} + P_{2y}^t; \quad V_1^0 = Q_{sxy}^{(1)}; \quad V_2^0 = Q_{sxy}^{(2)}; \quad T_{1y}^0 - S_{1y}^0,_y = Q_{sy}^{(1)}, \quad T_{2y}^0 - S_{2y}^0,_y = Q_{sy}^{(2)};$$

$$S_{1y}^0 = M_{sy}^{(1)} + S_{1y}^t, \quad S_{2y}^0 = M_{sy}^{(2)} + S_{2y}^t; \quad U_1^0 = Q_{sxy}^{(1)}, \quad U_2^0 = Q_{sxy}^{(2)}, \tag{5}$$

где $N_{rx}^{(p)}$, $Q_{rxy}^{(p)}$, $Q_{rx}^{(p)}$, $M_{rx}^{(p)}$, $N_{sy}^{(p)}$, $Q_{sxy}^{(p)}$, $Q_{sy}^{(p)}$, $M_{sy}^{(p)}$ – заданные усилия на торцах пластины, где индекс p соответствует номеру несущего слоя. Индекс r принимает значения $0, l_x$, индекс s – $0, l_y$, указывая, на каком конце пластины задано усилие.

В граничные условия (5) и уравнения равновесия (4) температура $T(z, t)$ входит в явном виде.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия диагностика в машиностроении» (задание № 1.40).

Список литературы

1 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Мінск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки : междунар. сб. науч. тр. – Гомель, 2014. − Вып. 8. – С. 179–185.

3 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – Сер. Естественные науки. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

УДК 629.423.33

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В КОНТАКТНОЙ ПАРЕ «ТОКОСЪЕМНИК ЛОКОМОТИВА – КОНТАКТНЫЙ ПРОВОД ЭЛЕКТРОСЕТИ»

И. И. КАПЛЮК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Токосъем на электрическом подвижном составе сопровождается большим выделением тепла, из-за которого имеется опасность повреждения контактного провода вследствие пережога или отжига, что может привести к сбоям в движении поездов. Также чрезмерный нагрев ведет к повышенному износу токоведущих элементов полозов. При сравнительном анализе различных по форме и материалу токосъемных вставок обнаруживаются большие различия в их долговечности, что напрямую зависит от характеристик их взаимодействия с контактным проводом. Наличие трения в области контакта ведет к изменению температур как провода электросети, так и токосъемников, что приводит к дополнительным температурным деформациям.

Ранее было проведено большое количество экспериментальных исследований взаимодействий в системе «пантограф – контактный провод электросети». На их основе установлено, что к основным причинам нагрева провода и токосъемной вставки относятся:

– действие электрического тока, обусловленное «джоулевым» выделением тепла непосредственно в материале провода и перенос его посредством конвективного обмена в зоне контакта на токосъемную вставку;

– выделение тепла вследствие трения в зоне контакта в процессе скольжения токосъемника вдоль провода контактной сети;

– тепловое действие электродуговых и искровых явлений, сопровождающих токосъем при нарушении контакта между проводом и токосъемником или из-за наличия повреждений в области контакта.

Таким образом, износ токосъемной вставки и провода определяются механической и электрической составляющими, которые сопровождаются выделением тепла.

Ранее практически не рассматривались эффекты, связанные с сухим фрикционным нагревом контактных парных элементов токосъемных устройств. В то же время такой теоретический анализ может предшествовать комплексному изучению процессов съема тока с учетом механического (от контактного давления) и электрического (от токовой нагрузки) износов.

Современным эффективным инструментом в рассмотрении явлений, связанных с деформацией контактирующих тел с учетом тепловых явлений, является численное моделирование их взаимодействия. В данной работе поставлена задача по разработке и анализу конечноэлементных моделей контактирующих элементов кинематической пары «провод – токосъемная вставка» в среде пакета инженерного анализа ANSYS.

Используемый на практике провод имеет сложную форму поперечного сечения, связанную с особенностями его крепления. Однако в зоне контакта с угольной вставкой поверхность провода цилиндрическая. Поэтому с целью упрощения модели предполагалось, что провод электросети имеет круглое сечение. Длина участка провода принята равной 20 см, его радиус сечения 65 мм. Считалось, что начальный износ у моделируемого провода отсутствует. Модель токосъемной вставки представляла собой прямоугольный параллелепипед размерами 10Ч0,7Ч3 см.