

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ЛОКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ С УЧЕТОМ НЕПОЛНОГО ОПИРАНИЯ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

А. В. ЯРОВАЯ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В строительстве, транспортном машиностроении широко используются трехслойные элементы конструкций, которые изготавливают из различных материалов, в том числе полимерных, композиционных, функционально-градиентных и т. д. Расчет параметров напряженно-деформированного состояния слоистых стержней, пластин и оболочек при непрерывных и локальных нагрузках представляет собой важную задачу, так как во многих случаях эти конструкции являются элементами сложных и ответственных сооружений. Иногда приходится сталкиваться со случаями, когда конструкция не полностью опирается на основание. Причиной появления зазора между конструкцией и основанием могут быть как техногенные условия в зоне строительства, так и природные условия. Это приводит к изменению расчетной схемы и напряженно-деформированного состояния рассматриваемого элемента, что в ряде случаев может привести к его преждевременному разрушению.

Рассматривается прямоугольная трехслойная пластина длиной l , шириной b_0 и высотой h (рисунок 1).

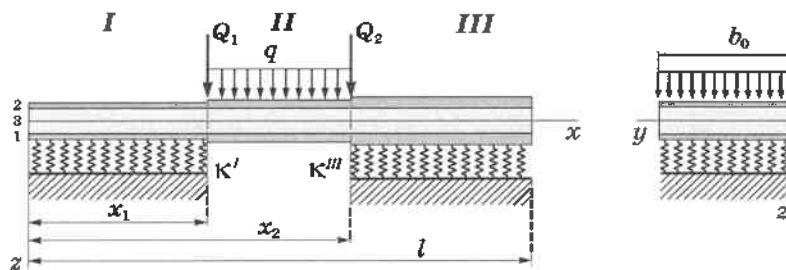


Рисунок 1 – Расчетная схема прямоугольной трехслойной пластины

Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$). На верхний внешний слой пластины действует распределенная локальная нагрузка q и сосредоточенные усилия Q_1, Q_2 . По длине пластины выделим три участка: I ($0 \leq x \leq x_1$), II ($x_1 \leq x \leq x_2$), III ($x_2 \leq x \leq l$). Обозначим: h_1^n, h_2^n, c^n ($n = I, II, III$) – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины заполнителя на n -м участке. Пластина опирается на два участка упругого основания Винклера, через k^n обозначен коэффициент жесткости упругого основания на n -м участке. Реакция основания $q_R^n(x)$ пропорциональна прогибу $w^n(x)$: $q_R^n(x) = k^n w^n(x)$.

Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях нормаль остается перпендикулярной к деформированной оси стержня; в заполнителе за счет сдвига она поворачивается на дополнительный угол. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Материалы слоев проявляют упругие свойства, для них справедлив закон Гука.

Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомых величин принимаются функции $w^n(x), u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n -м участке. В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений.

К деформированной пластине применяется принцип возможных перемещений Лагранжа, который выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Для этого необходимо составить выражения возможных работ внешних и внутренних сил и приравнять их. Из полученного равенства следуют дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$N^n{}_{,x} + b_0 p^n = 0; \quad H^n{}_{,x} - Q^n = 0; \quad M^n{}_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \quad (1)$$

силовые граничные условия и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков. Здесь N^n, M^n, Q^n, H^n – внутренние усилия на n -м участке. При этом нагрузка $q^I = q^{III} = 0$; $q^II = q$; реакция основания $q_R^II = 0$. Для $x = x_1$ условия для внутренних усилий следующие:

$N^I(x_1) - N^{II}(x_1) = 0$; $M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = 0$; $M^I{}_{,x}(x_1) - M^{II}{}_{,x}(x_1) = Q_1$; $H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0$,
аналогичные условия будут для $x = x_2$.

Связь напряжений σ_x и деформаций ϵ_x при цилиндрическом изгибе ортотропной пластины:

$$\sigma_x = A_x \epsilon_x; A_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad (2)$$

где E_x – модуль Юнга; ν_{xy} , ν_{yx} , ν_{xz} – коэффициенты Пуассона.

Выражение внутренних усилий через перемещения. Применяя соотношения (2), выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, и далее внутренние силы и моменты через искомые функции. Полученные выражения подставим в уравнения (1). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной пластины в перемещениях. Для участков *I* и *III*, связанных с упругим основанием, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1^n u''_{,xx} + a_6^n \psi''_{,xx} - a_7^n w''_{,xxx} = 0, \quad a_6^n u''_{,xx} + a_2^n \psi''_{,xx} - a_3^n w''_{,xxx} - a_5^n \psi^n = 0, \\ a_7^n u''_{,xxx} + a_3^n \psi''_{,xxx} - a_4^n w''_{,xxx} - \kappa^n w^n = 0 \quad (n = I, III). \end{aligned} \quad (3)$$

Для участка *II*, не связанного с упругим основанием и нагруженного поперечной нагрузкой, система имеет вид

$$\begin{aligned} a_1^n u''_{,xx} + a_6^n \psi''_{,xx} - a_7^n w''_{,xxx} = 0, \quad a_6^n u''_{,xx} + a_2^n \psi''_{,xx} - a_3^n w''_{,xxx} - a_5^n \psi^n = 0, \\ a_7^n u''_{,xxx} + a_3^n \psi''_{,xxx} - a_4^n w''_{,xxx} = -q^n, \quad (n = II). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a_1^n, \dots, a_7^n – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев на n -м участке:

$$a_1^n = A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + 2A_x^{(3)} c^n; a_2^n = c^{n2} [A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^n]; \dots \quad (5)$$

Соотношения для сдвига в заполнителе $\psi^n(x)$, прогиба $w^n(x)$ и продольного перемещения средней плоскости заполнителя $u^n(x)$ получим, решив соответствующие системы уравнений равновесия (3), (4). Заметим, что аналитический вид решений зависит от типа упругого основания.

Для первого и третьего участков ($n = I, III$) на упругом основании средней жесткости выражение для прогиба имеет вид

$$w^n(x) = C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_5^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^n. \quad (6)$$

Для второго участка ($n = II$), не связанного с упругим основанием,

$$w^n(x) = C_1^n (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^n b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_4^n x^2 / 2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x). \quad (7)$$

В выражениях (6), (7) C_1^n, \dots, C_6^n – константы интегрирования, $w_p^n(x)$ – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты b_i^n , α_i^n , β_i^n и функция $g_2^n(x)$ выражаются через параметры a_i^n (5).

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом. Если пластина, кроме опирания на упругое основание, жестко или шарнирно закреплена на торцах, удобнее условия в перемещениях. На границах первого и второго ($x = x_1$) и второго и третьего ($x = x_2$) участков должны выполняться условия равенства перемещений и внутренних усилий с учетом приложенных сосредоточенных внешних сил. Граничные условия на торцах и условия сопряжения на границах участков позволяют составить систему 24 линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Далее, объединяя решения для отдельных участков, получаем перемещения пластины. Выражение для прогиба имеет вид

$$w(x) = w^I(x) + [w^{II}(x) - w^I(x)] H_0(x - x_1) + [w^{III}(x) - w^{II}(x)] H_0(x - x_2). \quad (8)$$

В выражении (8) H_0 – функция Хевисайда.

Был составлен комплекс программ в среде MathCad, с помощью которого получены числовые результаты для нескольких типов трехслойных пакетов при сосредоточенных и распределенных локальных нагрузках. Разработанная методика применена при проектировании конструкции сборно-разборного дорожного настила, который может быть использован для устройства проезжей части колеечного или сплошного типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект T18P-090).