ных векторных полей, являются методы расщепления дифференциальных операторов как по координатным направлениям, так и по физическим явлениям.

При расщеплении дифференциальных операторов по координатным направлениям основным является вопрос о возможности представления дивергентных операторов в виде оператора суммирования операторов, содержащих производные только по одной пространственной переменной. Тогда можно построить конечно-разностные схемы, аппроксимирующие локально одномерные дивергентные операторы, являющиеся экономичными в смысле пропорциональности числа операций типа умножения количеству узлов конечно-разностной сетки.

При наличии в дифференциальных уравнениях смешанных дифференциальных операторов (такие операторы существуют при описании потенциальных векторных полей в средах с характеристиками переноса в виде тензоров) все существующие экономичные конечно-разностные схемы расщепления аппроксимируют эти смешанные производные на нижних временных слоях (явно), что существенно снижает запас устойчивости и при определенных условиях может приводить к неустойчивости конечно-разностной схемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 17-08-01127, и гранта Президента Российской Федерации МД-1798.2019.8.

УДК 531.314

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВЫХ СИЛ И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

А. С. КУРБАТОВ, А. А. ОРЕХОВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Предложена методика аналитического и полуаналитического решений задач нелинейной динамики неоднородных пористых цилиндрических оболочек под действием осевых сил и внешнего давления. Для построения аналитического решения уравнения движения строятся на основе вариационного формализма Де Дондера-Вайля, после чего нелинейная задача решается с выделением N главных форм колебаний и отсечением последующих форм. Уравнения, не содержащие производных по времени, могут быть интерпретированы как уравнения связей (стационарных). Проанализировано влияние количества учтенных форм колебаний на сходимость решения. Результаты аналитического решения сравнивались с созданными численными конечно-разностными и конечно-элементными моделями. Стоит отметить, что конечно-разностная аппроксимация уравнений Гамильтоновой механики значительно уменьшает скорость расчета на тестовых задачах без потери точности решения. Для реализации конечно-элементной модели применялся метод установления, что позволяет повысить сходимость решения по сравнению с классическими методами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-08-00938а, 17-08-01461а.

УДК 539.386

ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В РЕГУЛЯРНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА

В. В. ЛЕВЧЕНКО
Институт последипломного образования Национального университета пищевых технологий, г. Киев, Украина

Развитие современных технологий строительства и проектирования современной техники требует создания новых материалов с уникальными свойствами. Одними из таких материалов являются слоистые и регулярно-слоистые композитные материалы. Применение таких материалов требует изучения влияния неидеального контакта между слоями на динамические процессы в слоистых структурах. В работе слоистые материалы моделируются регулярно-слоистой средой с идеальным проскальзыванием на границах раздела структуры. Для исследования объемных волн рассмотрим слоистую среду, которая образована периодическим повторением порождающего пакета из двух изотропных слоев. Свойства слоев характеризуются параметрами Ламе λ_q μ_q, плотностью ρ_q и толщиной h_q. На границах раздела выполняются условия идеального проскальзывания. Среду отнесем к декартовой системе координат и предположим, что ось oz перпендикулярна границам раздела слоев. Гармоническая плоскополяризованная волна распространяется вдоль оси ox. Целью работы является получение дисперсионных соотношений для плоскополяризованных волн в рассматриваемых средах и их исследование.

Компоненты вектора смещения $\vec{u} = \{u(x,z,t);\, 0;\, w(x,z,t)\}$ удовлетворяют волновым уравнениям [3, 4]

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta u(x,z,t) + (\lambda+\mu)\partial_x(\partial_x u(x,z,t) + \partial_z w(x,z,t)) = \rho\partial_t^2 u(x,z,t),\\
&\mu\Delta w(x,z,t) + (\lambda+\mu)\partial_z(\partial_x u(x,z,t) + \partial_z w(x,z,t)) = \rho\partial_t^2 w(x,z,t).
\end{aligned} \tag{1}$$

и имеют место зависимости

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zz}(x,z,t) = (\lambda+2\mu)\partial_x u(x,z,t) + \lambda\partial_z w(x,z,t),\\
&\sigma_{zz}(x,z,t) = \lambda\partial_x u(x,z,t) + (\lambda+2\mu)\partial_z w(x,z,t).
\end{aligned}$$

Принятые в работе обозначения совпадают с введенными в [5,6].

На поверхностях раздела свойств выполняются граничные условия [4]

$$\sigma_z(x,\bar{z}_{n,q}-0) = \sigma_z(x,\bar{z}_{n,q}+0);\; w(x,\bar{z}_{n,q}-0) = w(x,\bar{z}_{n,q}+0); \tag{2}$$

и требования идеального проскальзывания

$$\sigma_{zx}(x,z_{nq}) = 0. \tag{3}$$

Тогда решение волновых уравнений в слоях следует искать в виде

$$\begin{aligned}
&w(x,z) = \Omega_p[-A^{(1)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(3)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q})] +\\
&+ k[A^{(2)}_{2(n-1)+qq}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(4)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q})];\\
&\sigma_{zz}(x,z) = \mu(2k^2-k_s^2)[A^{(1)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(3)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q})] +\\
&+ 2\mu k\Omega_s[A^{(2)}_{co}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q}) - A^{(4)}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q})];\\
&\sigma_{zx}(x,z) = 2\mu k\Omega_p[-A^{(1)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(3)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q})] +\\
&+\mu(2k^2-k_s^2)[A^{(2)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(4)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q})].
\end{aligned} \tag{4}$$

Из (3) следует, что постоянные $A_l^{(i)}$ в решениях волновых уравнений связаны соотношениями $A^{(2)} = P_q^{(21)}A^{(1)} + P_q^{(23)}A^{(3)}$, $A^{(4)} = P_q^{(43)}A^{(4)}$, что позволило в дальнейшем свести размерность передаточных матриц слоев от размерности 4×4 до 2×2.

Подстановка решений (4) в граничные условия (2) позволяет свести исходную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&M_1(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},h_1)\vec{A}_{2(n-1)+1} = M_2(\Omega_{p,2},\Omega_{s,2},0)\vec{A}_{2n},\\
&M_2(\Omega_{p,2},\Omega_{s,2},h_2)\vec{A}_{2n} = M_1(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},0)\vec{A}_{2n+1}.\\
&n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

В системе (5) введены векторы-столбцы $\vec{A}_{2(n-1)+i} = \mathrm{colon}(A^{(1)}_{2(n-1)+i}, A^{(1)}_{2(n-1)+i})$ и передаточные матрицы слоев

$$M_i(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) = \begin{bmatrix} M_i^{11}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) & M_i^{12}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) \\ M_i^{21}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) & M_i^{22}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) \end{bmatrix}.$$

Непосредственные вычисления позволяют показать, что детерминант передаточной матрицы порождающего пакета слоев

$$Mp = M_2(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, h_2) M_2^{-1}(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,}, 0) M_1(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, h_1) M_1^{-1}(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, 0)$$

равен единице, и характеристическое уравнение передаточной матрицы запишется в виде $\chi^2 - 2b_2\chi + 1 = 0, \quad b_2 = \mathrm{spur}Mp/2$. Применяя предложенный метод исследования и используя свойство унимодулярности матрицы Mp [1, 2], получим дисперсионное уравнение для волн в пластине из m порождающих пакетов.

$$Mp^{12}(b_2 - \cos(\pi/m)(b_2 - \cos(2\pi/m)(b_2 - \cos(m\pi/m) = 0. \qquad (6)$$

Как следует из вида (6), в каждой зоне пропускания $-1 \le b_2 \le 1$ локализовано m дисперсионных кривых, периодом колебаний которых будет $2m$ слоев. Эти дисперсионные кривые следует характеризовать набором из трех индексов (*n, l, m*), где $l = 0,1,\ldots m-1$, *n* – номер зоны пропускания... Типы колебаний (*n, l, m*) и (*n, im, il*) эквивалентны. Колебания с индексами (*n, l, m*) и (*n, m, m – l*) будут вырожденными. Как показали численные эксперименты, при четном значении *m* формы колебаний обладают симметрией, которая подчиняется правилу $w\left(\frac{h}{2}m - z\right) = -w(hm - z),\ 0 \le z \le \frac{z}{2}mh$, а также $w(sh) = 0$, где $s = 1, 3, \ldots$. При m нечетном отсутствует симметрия, присущая колебаниям при *m* четном. С ростом значения *m* и *n* формы колебаний на периоде *mh* становятся более сложными.

Список литературы

1 **Баас, Ф. Г.** Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф. Г. Баас, А. А. Булгаков, А. П. Тетервов. – М. : Наука, 1989. – 288 с.

2 **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 886 с.

3 **Левченко, В. В.** О распространении магнитоупругих волн сдвига в регулярно-слоистой среде с металлизированными плоскостями раздела / В. В. Левченко // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 125–131.

4 **Шульга, Н. А.** Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – Киев : Наукова думка, 1982. – 200 с.

5 **Левченко, В. В.** О формах колебаний на границах зон пропускания объемных плоскополяризованных волн в регулярно-слоистой среде / В. В. Левченко, Н. А.Шульга, А. Н. Подлипенец // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – № 1. – С. 16–23.

6 **Шульга, Н. А.** Формы колебаний на границах зон пропускания объемных волн сдвига / Н. А. Шульга, В. В. Левченко, А. Н. Подлипенец // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20. – № 11. – С. 38–45.

УДК 539.386

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ

В. В. ЛЕВЧЕНКО

Институт последипломного образования Национального университета пищевых технологий, г. Киев, Украина

В последние годы существенно возрос интерес к исследованию особенностей распространения волн различной физической природы в периодических структурах с усложненными физико-механическими свойствами. В частности, это касается композиционных материалов, образованных чередованием слоев со свойствами сегнетоэлектрика. Наличие спонтанной поляризации является отличительной особенностью сегнетоэлектриков. В настоящее время разработаны методики формирования в них идеальных периодических структур [1, 2]. Анализ особенностей распространения волн различной природы в таких исскуственных периодических структурах вызывает внимание исследователей благодаря возможности эффективного управления их волноведущими свойствами.

Решение задачи о распространении волн в сегнетоэлектриках основано на методах, развитых в теории волн в периодических структурах [3, 4]. При температурах, которые соответствуют условиям экс-