дом дискретной ортогонализации. Уравнение теплопроводности с нелинейной диссипативной функцией интегрируется методом конечних разностей с использованием явной схемы.

Численными расчетами исследовано влияние деформации поперечного сдвига, геометрической нелинейности, размещения актуаторов и их размеров на амплитудно- и температурно-частотные характеристики оболочки при жестком закреплении ее торцов. Показана эффективность активного демпфирования колебаний оболочки с помощью пьезолектрических актуаторов. Для определения значения потенциала $V_a$, компенсирующего механическую нагрузку $p$, использовалась линейная зависимость $V_a = k_a(\Delta / l)p$, в которой коэффициент управления ($k_a$ определяется как отношение амплитуды максимального прогиба, обусловленного на частоте линейного резонанса единичной механической нагрузкой ($p$ = 1 Па), к соответствующему прогибу при подводе к электродам актуатора единичного электрического потенциала ($V_a$ = 1 В). Установлено, что для гашения наиболее энергоемкой первой моды изгибных колебаний наиболее эффективным является актуатор с параметром ($\Delta / l = 0{,}57$, центр которого совпадает с координатой максимальных прогибов оболочки. Исследовано влияние коэффициента теплообмена на критическое значение амплитуды механического нагружения, при котором установившаяся температура виброразогрева приводит к деполяризаци пьезокерамики и потери демпфирующей способности системы. При амплитудах механической нагрузки, превышающих критическую ($p \geq p_k$), существует критическое время $t_k$ потери функциональной способности системы. На основании решения нестационарной задачи теплопроводности показано, что зависимости критической амплитуды механической нагрузки $p_k$ от критического времени $t_k$ при различных коэффициентах теплообмена характеризуются кривыми, аналогичными кривым Велера из теории циклического разрушения материалов.

УДК 539.384

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ, НА СЛОЖНОМ ОСНОВАНИИ

*А. Г. КОЗЕЛ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

*А. С. ОКОНЕЧНИКОВ*
*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*

Приводятся постановка и решение краевой задачи об изгибе упругопластической трехслойной пластины с легким заполнителем, защемленной по контуру, на двухпараметрическом основании Пастернака. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине легком относительно толстом заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешние слои стержня действует распределенная осесимметричная нагрузка $q(r)$ и реакция основания модели Пастернака:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w,$$

где $\kappa_0$, $t_f$ – коэффициенты сжатия и сдвига; $\Delta$ – оператор Лапласа.

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании была получена с помощью принципа Лагранжа, поэтому ее можно применить и здесь как исходную.

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях линейные и нелинейные составляющие и подставляя их выраженными через перемещения в уравнения равновесия, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w,_r) = p_\omega,$$
$$L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w,_r) = h_\omega,$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r) - \kappa_0 w + t_f\Delta w = -q + q_\omega, \tag{1}$$

где $a_i$ – коэффициенты, учитывающие упругие и геометрические параметры слоев, $L_k$ – линейные дифференциальные операторы.

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщённых внутренних усилий. Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемое с нижним индексом «$\omega$»:

$$p_\omega = T_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \quad q_\omega = M_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega},_r - M_{\varphi\omega},_r).$$

Согласно методу упругих решений перепишем систему (1) в итерационном виде:

$$L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w,_r^{(n)}) = p_\omega^{(n-1)},$$
$$L_2(a_2u^{(n)} + a_4\psi^{(n)} - a_5w,_r^{(n)}) = h_\omega^{(n-1)},$$
$$L_3(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w,_r^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f\Delta w^{(n)} = -q + q_\omega^{(n-1)}. \tag{2}$$

где $n$ – номер приближения.

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (2) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями $u^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$. После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$u^{(n)} = b_1 w,_r^{(n)} - \frac{1}{a_1a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r (a_2h_\omega^{(n-1)} - a_4p_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r + C_1^{(n)}r + \frac{C_2^{(n)}}{r},$$
$$\psi^{(n)} = b_2 w,_r^{(n)} + \frac{1}{a_1a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r (a_1h_\omega^{(n-1)} - a_2p_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r + C_3^{(n)}r + \frac{C_4^{(n)}}{r},$$
$$L_3(w,_r^{(n)}) - t_{f1}\Delta w^{(n)} + \kappa^4 w^{(n)} = q_1 + f_\omega^{(n-1)}, \tag{3}$$

где $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$ – константы интегрирования на $n$-м шаге;

$$t_{f1} = t_fD, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q_1 = qD, \quad f_\omega^{(n-1)} = -Dq_\omega^{(n-1)} + D_1\frac{1}{r}(rp_\omega^{(n-1)}),_r + D_2\frac{1}{r}(rh_\omega^{(n-1)}),_r,$$

$$b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1a_4 - a_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_3a_4 - a_2a_5}{a_1a_4 - a_2^2}, \quad D = \frac{a_1(a_1a_4 - a_2^2)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2},$$

$$D_1 = \frac{a_1(a_3a_4 - a_2a_5)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2}, \quad D_2 = \frac{a_1(a_1a_5 - a_2a_3)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2}.$$

Решение третьего уравнения системы (3) получим способом, используемым при решении упругой задачи.

Рекуррентное решение задачи об изгибе круговой упругопластической трехслойной пластины на упругом основании, с учетом ограниченности ее прогиба в центре $C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = 0$, принимает вид

$$u^{(n)} = b_1 w,_r^{(n)} - \frac{1}{a_1a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r (a_2h_\omega^{(n-1)} - a_4p_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r + C_1^{(n)}r,$$
$$\psi^{(n)} = b_2 w,_r^{(n)} + \frac{1}{a_1a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r (a_1h_\omega^{(n-1)} - a_2p_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r + C_3^{(n)}r,$$
$$w^{(n)} = C_5^{(n)}J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_7^{(n)}J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + w_p^{(n)}(r). \tag{4}$$

Краевая задача по определению прогиба круглой упругопластической пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака замыкается присоединением граничных условий

$$u = \psi = w = w,_r = 0 \text{ при } r = R.$$

В результате получаем линейную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$b_1 w,_r^{(n)}(R) - \int_0^r r \int_0^r (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}r \bigg|_{r=R} + C_1^{(n)} R = 0,$$

$$b_2 w,_r^{(n)}(R) + \int_0^r r \int_0^r (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}r \bigg|_{r=R} + C_3^{(n)} R = 0,$$

$$C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}\kappa R) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) + w_p^{(n)}(R) = 0,$$

$$-\kappa(\sqrt{a} C_5^{(n)} J_1(\sqrt{a}\kappa R) + \sqrt{\bar{a}} C_7^{(n)} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R)) + w_p'^{(n)}(R) = 0.$$

Здесь использовано то, что

$$w,_r^{(n)} = -\kappa(\sqrt{a} C_5^{(n)} J_1(\sqrt{a}\kappa R) + \sqrt{\bar{a}} C_7^{(n)} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R)) + w_p'^{(n)}(R).$$

Отсюда получаем следующие константы интегрирования:

$$C_1^{(n)} = \frac{1}{R} \int r \int (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}r \bigg|_{r=R},$$

$$C_3^{(n)} = -\frac{1}{R} \int r \int (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}r \bigg|_{r=R},$$

$$C_5^{(n)} = \frac{w_p'^{(n)}(R) J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) + \kappa\sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R) J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) - \sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_0(\sqrt{a}\kappa R))},$$

$$C_7^{(n)} = \frac{w_p'^{(n)}(R) J_0(\sqrt{a}\kappa R) + \kappa\sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_0(\sqrt{a}\kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_1(\sqrt{a}\kappa R))}. \quad (5)$$

Таким образом, система (4) с константами интегрирования (5) дают рекуррентное решение для упругопластической круговой трехслойной пластины с легким заполнителем и заделанным контуром, изгибаемой на упругом основании произвольной симметричной нагрузкой $q(r)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № Т19РМ-089).

УДК 517.9

# КЛАСС ЭКОНОМИЧНЫХ АБСОЛЮТНО УСТОЙЧИВЫХ МЕТОДОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

*Ек. Л. КУЗНЕЦОВА*
*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*

Новый класс конечно-разностных методов расщепления численного решения дифференциальных уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы, предложен и обоснован по аппроксимации, устойчивости и сходимости и описывает явления переноса потенциала в средах, характеристики которых описываются симметрическими тензорами второго ранга.

Методы основаны, во-первых, на использовании апостериорной информации о решении на верхних временных слоях и, во-вторых, на более глубоком расщеплении смешанных дифференциальных операторов по координатным направлениям, чем в классических конечно-разностных методах. Использование информации о решении, полученной на верхнем временном слое, существенно увеличивает запас устойчивости конечно-разностных схем, а более глубокое расщепление смешанных дифференциальных операторов проводит к экономичным и неявным (т.е. более устойчивым) конечно-разностным схемам, порядок аппроксимации и устойчивость которых не зависят от размерности пространства.

Одним из самых эффективных конечно-разностных методов численного решения нестационарных задач механики сплошной среды вообще и задач, описывающих распространение потенциаль-