УДК 539.384

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ ЭЙЛЕРА – БЕРНУЛЛИ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ

А. В. ЗЕМСКОВ, Г. М. ФАЙКИН
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается нестационарная задача о плоском упругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Эйлера-Бернулли (рисунок 1).

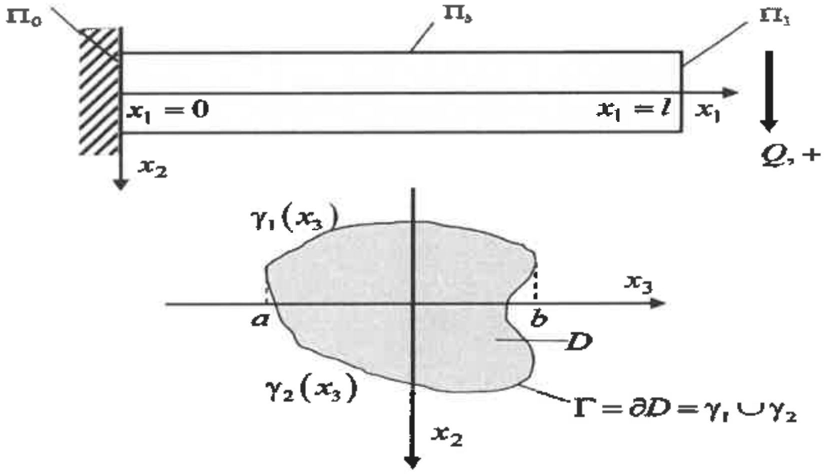

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Уравнения поперечных колебаний балки имеют вид [1–3]

$$\frac{J_3}{F}\ddot{v}'' - \ddot{v} = \frac{J_3}{F}\left(v^{IV} + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_j''\right), \quad \dot{H}_q = D_q H_q'' + \Lambda_q v^{IV}. \tag{1}$$

Здесь точки обозначают производную по времени, штрихи – производную по координате x_1. Все величины являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения:

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, v = \frac{v^*}{l}, \tau = \frac{Ct}{l}, C^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \alpha_q = \frac{\alpha^{(q)}}{\lambda + 2\mu}, D_q = \frac{D^{(q)}}{Cl}, \Lambda_q = \frac{m^{(q)}D^{(q)}\alpha^{(q)}n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l},$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – поперечный прогиб балки; l – длина балки; H_q – приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе N – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q-го вещества; λ и μ – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность; $\alpha^{(q)}$ – коэффициент, характеризующий объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества; F – площадь сечения; J_3 – момент инерции сечения балки относительно оси Ox_3.

Начальные условия полагаем нулевыми. Граничные условия в соответствии с моделью изгиба консоли имеют вид

$$v'\big|_{x=0} = 0_1, \quad v\big|_{x=0} = 0, \quad H_q\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=1} = 0, \quad \left(v''' + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_j' - \ddot{v}'\right)\Bigg|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad \left(D_1^{(q)}H_q' + \Lambda_{11}^{(q)}v'''\right)\Big|_{x=1} = 0. \tag{2}$$

Решение задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничных условий [4, 5]. Для этого рассматривается вспомогательная задача:

$$\begin{aligned}
&v'\Big|_{x_1=0}=0,\ \left(v'''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_j'-\ddot{v}'\right)\Bigg|_{x_1=0}=f_{12}^{*}(\tau),\ \left(D_1^{(q)}H_q'+\Lambda_{11}^{(q)}v'''\right)\Big|_{x_1=0}=f_{1,q+2}^{*}(\tau),\\
&v'\Big|_{x_1=1}=f_{21}^{*}(\tau),\ \left(v'''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_j'-\ddot{v}'\right)\Bigg|_{x_1=1}=f_{22}(\tau),\ \left(D_1^{(q)}H_q'+\Lambda_{11}^{(q)}v'''\right)\Big|_{x_1=1}=0,
\end{aligned}\tag{3}$$

где функции $f_{12}^{*}(\tau)$, $f_{1,q+2}^{*}(\tau)$, $f_{21}^{*}(\tau)$ подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
&v(x,\tau)=\int_0^\tau\left[G_{12}(x,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{12}(1-x,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+\int_0^\tau G_{1,q+2}(x,\tau-t)f_{q+2,1}^{*}(t)dt+\int_0^\tau G_{12}(1-x,\tau-t)f_{11}^{*}(t)dt,\\
&\eta_q(x,\tau)=\int_0^\tau\left[G_{q+2,2}(x,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{q+2,2}(1-x,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+\int_0^\tau G_{q+2,q+2}(x,\tau-t)f_{q+2,1}^{*}(t)dt+\\
&+\int_0^\tau G_{q+2,2}(1-x,\tau-t)f_{11}^{*}(t)dt,
\end{aligned}\tag{4}$$

где G_{mk} – поверхностные функции Грина задачи (1), (3), которые являются известными.

Решения (4) будут удовлетворять задаче (1), (2) если функции $f_{12}^{*}(\tau)$, $f_{1,q+2}^{*}(\tau)$, $f_{21}^{*}(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе интегральных уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau\left[G_{12}(0,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{12}(1,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+\int_0^\tau G_{1,q+2}(0,\tau-t)f_{q+2,1}^{*}(t)dt+\\
&+\int_0^\tau G_{12}(1,\tau-t)f_{11}^{*}(t)dt=\int_0^\tau G_{12}(1,\tau-t)f_{22}(t)dt,\\
&\int_0^\tau\left[G_{q+2,2}(0,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{q+2,2}(1,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+\int_0^\tau G_{q+2,q+2}(0,\tau-t)f_{q+2,1}^{*}(t)dt+\\
&+\int_0^\tau G_{q+2,2}(1,\tau-t)f_{11}^{*}(t)dt=\int_0^\tau G_{q+2,2}(1,\tau-t)f_{22}(t)dt,\\
&\int_0^\tau\left[G_{12}(1,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{12}(0,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+\int_0^\tau G_{1,q+2}(1,\tau-t)f_{q+2,1}^{*}(t)dt+\\
&+\int_0^\tau G_{12}(0,\tau-t)f_{11}^{*}(t)dt=\int_0^\tau G_{12}(0,\tau-t)f_{22}(t)dt.
\end{aligned}\tag{5}$$

Система (5) решается численно с помощью квадратурных формул.

Список литературы

1 **Zemskov, A. V.** Unsteady Vibration Model of the Euler-Bernoulli Beam Taking into Account Diffusion / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1158. – 042043.

2 **Tarlakovskii, D. V.** An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation / D. V. Tarlakovskii, A. V. Zemskov // Math. Comput. Appl. – 2019. – 24(1), 23.

3 **Файкин, Г. М.** Постановка задачи о Консольном изгибе балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии / Г. М. Файкин, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXV Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М. : ТРП, 2019. – С. 136–139.

4 **Zemskov, A.V.** Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskiy // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – No. 1. – Vol. 23. – P. 36–41.

5 **Земсков, А.В.** Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2016. – № 1. – С. 49–56.