МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

А. О. ШИМАНОВСКИЙ, А. В. СЕМЕНТОВСКИЙ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пособие
для студентов технических специальностей вузов

Гомель 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ключевым положением, на котором строится вся классическая динамика, является основной закон динамики Ньютона [3, 5]:

Равнодействующая $\overline{R}$ *всех сил, приложенных к материальной точке, прямо пропорциональна ее линейному ускорению* $\overline{a}$, *причем, в качестве коэффициента пропорциональности выступает масса материальной точки* m:

$$\overline{R} = m\overline{a} . \qquad (1.1)$$

Это векторное равенство справедливо только в инерциальных системах отсчета, то есть в системах отсчета, связанных с телами, движущимися поступательно, причем точки этих тел должны двигаться прямолинейно с постоянной скоростью. При решении большинства технических задач инерциальной можно считать систему отсчета, связанную с Землей.

В общем случае движения материальной точки векторы $\overline{R}$ и $\overline{a}$ могут быть представлены в виде сумм их составляющих.

На материальную точку действует система сходящихся сил. Равнодействующая такой системы сил равна геометрической сумме всех сил, приложенных к телу:

$$\overline{R} = \sum \overline{F_i} ,$$

причем силы $\overline{F_i}$ могут быть как постоянными, так и зависящими от времени, положения точки, ее скорости либо от нескольких из названных величин.

Вектор полного ускорения точки при ее простом движении удобно представить в виде геометрической суммы касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n .$$

Если же точка участвует в сложном движении, то ее ускорение определяется по теореме Кориолиса

$$\overline{a} = \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{кор}},$$

где $\overline{a}_{\text{пер}}$, $\overline{a}_{\text{отн}}$, $\overline{a}_{\text{кор}}$ – переносное, относительное и кориолисово ускорения.

Все эти ускорения, в свою очередь, зависят как от характера движения точки, так и от формы ее траектории. Они выражаются через координаты и их производные по времени первого и второго порядка.

Таким образом, динамические уравнения движения материальной точки представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно координат.

На базе уравнения (1.1) могут решаться две задачи:

– определение кинематических параметров движения материальной точки по известным силам, действующим на нее;

– нахождение законов изменения сил, приложенных к материальной точке.

При решении первой задачи рекомендуется придерживаться приведенной ниже последовательности действий.

Схема решения задач об определении закона движения материальной точки с помощью основного уравнения динамики

1 Изображается материальная точка с наложенными на нее механическими связями.

2 Расставляются векторы активных сил и сил реакций связей, действующих на материальную точку.

3 Определяется вид движения материальной точки. Вычисляются значения ее ускорений. Ненулевые составляющие вектора ускорения изображаются на рисунке. Касательные ускорения обязательно должны быть направлены в сторону увеличения координат.

4 Записывается уравнение основного закона динамики (1.1), в которое подставляются векторные выражения равнодействующей силы и линейного ускорения точки.

5 Вводится система декартовых осей координат:

а) если точка движется по известной траектории, то одну из осей целесообразно направить по скорости, вторую – к центру кривизны траектории, третью – перпендикулярно первым двум;

б) траектория материальной точки неизвестна, то оси координат направляют так, чтобы они составляли известные или легко определяемые углы со всеми векторами сил, приложенных к материальной точке;

в) точка участвует в сложном движении, то оси координат, как правило, удобно связать с траекторией относительного движения, как это описано в пп. а) и б).

6 Векторное уравнение, полученное в п. 4, проецируется на выбранные оси.

7 Определяется вид дифференциального уравнения движения; проверяется возможность его аналитического решения.

8 Решается дифференциальное уравнение движения.

Ранее отмечалось, что динамические уравнения движения материальной точки под действием приложенных к ней сил, как правило, представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка. Далее приведены некоторые способы решения таких уравнений.

2 НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1 Дифференциальные уравнения второго порядка, сводящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка

2.1.1 Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих аналитическое решение

При решении дифференциальных уравнений первого порядка их, как правило, стремятся свести к виду, допускающему разделение переменных.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(t)dx + M_2(x)N_2(t)dt = 0\,, \qquad (2.1)$$

где $M_2(x) \neq 0$ и $N_1(t) \neq 0$.

Разделив обе части уравнения (2.1) на $M_2(x)N_1(t)$, получим

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(t)}{N_1(t)}dt\,. \qquad (2.2)$$

Соотношение (2.2) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов: в правой части равенства дифференциал выражен непосредственно через независимую переменную *t*, а в левой – через некоторую функцию *x* переменной *t*. Согласно инвариантности формы дифференциала, неопределенные интегралы от обеих частей равенства будут отличаться лишь на постоянную интегрирования

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int\frac{N_2(t)}{N_1(t)}dt + C. \qquad (2.3)$$

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными необходимо использовать следующие приемы.

1 По определению интеграла он является суммой бесконечного числа бесконечно малых. Поэтому при разделении переменных следует дифференциалы переменных поместить в *числители* выражений, стоящих слева и справа от знака равенства.

2 В каждой части равенства должна фигурировать только *одна* переменная.

3 Если в дифференциальном уравнении содержатся три или более переменные величины, то его слагаемые следует преобразовать так, чтобы в уравнении осталось только две из них. Для этого в некоторых случаях удобно применить подстановку вида $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, где $v = \frac{dx}{dt}$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $tdx - xdt = 0$.

Решение. Применим формулу (2.3), постоянную интегрирования при этом удобно представить в виде $\ln|C|$:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t},$$

$$\ln|x| = \ln|t| + \ln|C|,$$

$$|x| = |Ct|,$$

$x = Ct$ – искомое решение.

Уравнением Бернулли называют дифференциальное уравнение вида

$$x' + p(t)x = f(t)x^{\alpha}, \tag{2.4}$$

где $p(t), f(t)$ – некоторые заданные функции переменной $t, \alpha \in R, \alpha \neq 1$.

Решают его с помощью подстановки Бернулли: $x(t) = u(t)z(t)$, причем функция $z(t)$ должна удовлетворять условию

$$z'(t) + z(t)p(t) = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что (2.5) – уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, найдем $z(t)$, после чего подставим в исходное уравнение (2.4). Используя условие (2.5), получим уравнение

$$u'(t)z(t) = f(t)(u(t)z(t))^{\alpha},$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решив его относительно $u(t)$, найдем общее решение (2.4) в виде $x(t) = u(t)z(t)$.

Частным случаем уравнения Бернулли, соответствующим значению $\alpha = 0$, является *линейное уравнение*

$$x' + p(t)x = f(x). \tag{2.6}$$

Пример решения такого уравнения приведен в пп. 2.1.3.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right), \tag{2.7}$$

где $f\left(\frac{x}{t}\right)$ – некоторая функция от $\frac{x}{t}$.

Такое уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$u = \frac{x}{t}.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$x' = \frac{x^2 + t^2}{xt}.$$

Решение. Подстановкой $x = ut$, $x' = u't + u$ данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dt} t = \frac{1}{u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{u^2}{2} = \ln |Ct|, \quad \frac{x^2}{t^2} = 2\ln |Ct|,$$

$$x = \pm t\sqrt{\ln C^2 t^2}.$$

2.1.2 Уравнение вида $x''(t) = f(t)$ (на точку действуют силы, зависящие только от времени)

Так как $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, где $v = \frac{dx}{dt}$, то, интегрируя левую и правую части уравнения $\frac{dv}{dt} = f(t)$ по *t*, получаем

$$\frac{dx}{dt} = v = \int f(t)dt + C_1.$$

Еще раз интегрируя последнее уравнение, имеем

$$x = \int (\int f(t)dt)dt + C_1 t + C_2. \qquad (2.8)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются через начальные условия задачи, причем они могут быть рассчитаны путем подстановки в уравнение (2.8) значения времени, от которого начинается рассмотрение движения.

Замечание. При использовании определенных интегралов значения C_1 и C_2 определяются автоматически путем учета начальных условий при расстановке пределов интегрирования.

Задача 2.1. При движении автомобиля массы *m* по участку дороги, наклоненному под углом α к горизонту, на него действует сила тяги, изменяющаяся по закону $F_т = kt$, (*k* – некоторая постоянная). Пренебрегая трением, определить закон изменения пройденного автомобилем пути, если в начальный момент времени его скорость v_0.

Решение. На автомобиль в процессе движения действуют силы тяги $\overline{F}_т$, тяжести $\overline{G}$, реакция опоры $\overline{N}$ (рисунок 2.1). Проецируя векторное равенство $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i$ на ось *Ox*, получаем:

$$ma_x = G\sin\alpha + F_т .$$

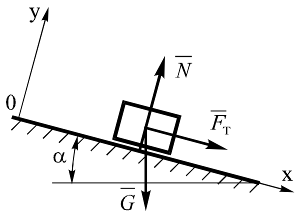

Рисунок 2.1

Подставляя выражения сил и ускорения, имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha + kt$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha + kt .$$

Разделяя переменные, получаем

$$mdv = (mg\sin\alpha + kt)dt ;\ \int_{v_0}^{v} mdv = \int_0^t (mg\sin\alpha + kt)dt ;$$

$$mv - mv_0 = mgt\sin\alpha + \frac{kt^2}{2} ;\ v = gt\sin\alpha + \frac{kt^2}{2m} + v_0 .$$

Подставляя вместо v ее выражение через x, окончательно определяем закон изменения координаты x:

$$\frac{dx}{dt} = gt\sin\alpha + \frac{kt^2}{2m} + v_0 ;\quad dx = \left(gt\sin\alpha + \frac{kt^2}{2m} + v_0\right)dt ;$$

$$\int_{x_0=0}^{x} dx = \int_0^t \left(gt\sin\alpha + \frac{kt^2}{2m} + v_0\right)dt ;\quad x = g\sin\alpha\frac{t^2}{2} + \frac{kt^3}{6m} + v_0 t .$$

2.1.3 Уравнение вида $x''(t) = f(t, x'(t))$, не содержащее явно искомой функции $x(t)$ (на точку действуют силы, зависящие только от времени и скорости)

Полагая $\frac{dx}{dt} = v$, где $v = v(t)$, и учитывая, что $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v) ,$$

после интегрирования которого находим:

$$v(t) = \varphi(t, C_1), \quad \frac{dx}{dt} = \varphi(t, C_1).$$

Отсюда
$$x = \int \varphi(t, C_1)dt + C_2 .$$

Задача 2.2. При разгоне катера массы m сила тяги его винтов изменяется по закону $F_т = kt$, а действующие на него силы сопротивления сводятся к равнодействующей, прямо пропорциональной скорости катера $F_{сопр} = \alpha v$ (k и α – некоторые постоянные). Определить закон движения катера, считая, что оно началось из состояния покоя.

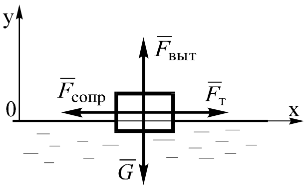

Рисунок 2.2

Решение. На катер, помимо названных в условии, действуют также сила тяжести $\overline{G}$ и выталкивающая сила $\overline{F}_{выт}$ (рисунок 2.2). В результате проецирования векторного равенства $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i$ на ось Ox, приходим к уравнению

$$ma_x = F_т - F_{сопр} .$$

Ему соответствует дифференциальное уравнение второго порядка

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kt - \alpha\frac{dx}{dt},$$

которое приводится к виду

$$m\frac{dv}{dt} = kt - \alpha v \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} + \alpha v = kt .$$

Указанное линейное дифференциальное уравнение первого порядка может быть решено с помощью подстановки $v = uz$. Тогда $\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}z + u\frac{dz}{dt}$ и соответственно

$$m\frac{du}{dt}z + mu\frac{dz}{dt} + \alpha uz = kt . \qquad (2.9)$$

Для получения возможности разделения переменных приравняем нулю сумму второго и третьего слагаемых:

$$mu\frac{dz}{dt} + \alpha uz = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{dz}{dt} + \alpha z = 0 \quad (\text{так как } u \neq 0) .$$

Разделяя переменные, и интегрируя, получаем выражение функции z:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{\alpha}{m}dt ; \; \ln z = -\frac{\alpha}{m}t ; \; z = e^{-\frac{\alpha}{m}t} .$$

Подставляя найденное значение в (2.9), далее находим

$$m\frac{du}{dt}e^{-\frac{\alpha}{m}t}=kt\,;\;\; du=\frac{k}{m}te^{\frac{\alpha}{m}t}dt\,;\;\; \int du=\int\frac{k}{m}te^{\frac{\alpha}{m}t}dt\,;\;\; u=\frac{k}{\alpha}te^{\frac{\alpha}{m}t}-\frac{mk}{\alpha^2}e^{\frac{\alpha}{m}t}+C\,.$$

Тогда
$$v=uz=\frac{k}{\alpha}t-\frac{mk}{\alpha^2}+Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}\,. \qquad (2.10)$$

Постоянную C определим из начального условия: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\left.v\right|_{t=0}=0$.

Подставляя его в (2.10), находим:

$$0=\frac{k}{\alpha}\cdot 0-\frac{mk}{\alpha^2}+Ce^{-\frac{\alpha}{m}\cdot 0}\,; \qquad C=\frac{mk}{\alpha^2}\,.$$

Следовательно,
$$v=\frac{k}{\alpha}t+\frac{mk}{\alpha^2}(e^{-\frac{\alpha}{m}t}-1)\,.$$

Интегрируя еще раз, получаем окончательный результат:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{k}{\alpha}t+\frac{mk}{\alpha^2}(e^{-\frac{\alpha}{m}t}-1)\,; \quad dx=\left(\frac{k}{\alpha}t+\frac{mk}{\alpha^2}(e^{-\frac{\alpha}{m}t}-1)\right)dt\,;$$

$$\int\limits_{x_0}^{x}dx=\int\limits_{0}^{t}\left(\frac{k}{\alpha}t+\frac{mk}{\alpha^2}(e^{-\frac{\alpha}{m}t}-1)\right)dt\,; \quad x=x_0+\frac{kt^2}{2\alpha}+\frac{m^2k}{\alpha^3}(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t})-\frac{mk}{\alpha^2}t\,.$$

2.1.4 Уравнение вида $x''(t)=f(x(t),x'(t))$, не содержащее явно независимой переменной t (на материальную точку действуют силы, зависящие только от ее положения и скорости)

Введем новую функцию $v(x)$, положив $\frac{dx}{dt}=v$. Так как

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx}=\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx}\,,$$

то, подставив в исходное уравнение значения $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$v\frac{dv}{dx}=f(x,v)\,,$$

в котором x играет роль независимой переменной. Решив его, найдем $v=\varphi(x,C_1)$. Подставив вместо v производную $\frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1)$.

Решая его, находим общий интеграл исходного уравнения:

$$\int \frac{dx}{\varphi(x, C_1)} = t + C_2 \ .$$

Замечание. При решении задач динамики материальной точки подстановку $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ целесообразно использовать также в тех случаях, когда на материальную точку действуют постоянные или зависящие от скорости силы при расчете соотношения между начальной и конечной скоростями и пройденным путем.

Задача 2.3. На материальную точку при прямолинейном движении в неоднородной среде действует сила сопротивления, изменяющаяся по закону: $F_{\text{сопр}} = \frac{\alpha v^2}{x+h}$ (α и h – некоторые постоянные). Составить уравнение движения материальной точки, считая остальные силы пренебрежимо малыми. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$.

Решение. Проецируя выражение основного закона динамики на направление движения материальной точки, получаем

$$ma_x = -F_{\text{сопр}} \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha v^2}{x+h}.$$

В этом дифференциальном уравнении три переменные величины: t, v и x. Чтобы уменьшить количество переменных до двух, воспользуемся заменой $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$. Тогда получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$m\frac{vdv}{dx} = -\frac{\alpha v^2}{x+h}.$$

Решая его, найдем закон изменения скорости v от координаты x:

$$\frac{mvdv}{\alpha v^2} = -\frac{dx}{x+h}; \quad \int_{v_0}^{v} \frac{mvdv}{\alpha v^2} = \int_0^x -\frac{dx}{x+h}; \quad \frac{m}{\alpha}\ln v\Big|_{v_0}^{v} = -\ln(x+h)\Big|_0^x;$$

$$\frac{m}{\alpha}\ln\frac{v}{v_0} = -\ln\frac{x+h}{h}; \quad \ln\frac{v}{v_0} = \frac{\alpha}{m}\ln\frac{h}{x+h}; \quad \frac{v}{v_0} = \left(\frac{h}{h+x}\right)^{\frac{\alpha}{m}};$$

$$v = v_0 \left(\frac{h}{h+x} \right)^{\frac{\alpha}{m}} .$$

Применяя выражение скорости как производной от координаты по времени и интегрируя, получаем искомый закон движения точки:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \left(\frac{h}{h+x} \right)^{\frac{\alpha}{m}} ; \quad (h+x)^{\frac{\alpha}{m}} dx = v_0 h^{\frac{\alpha}{m}} dt ; \quad \int_0^x (h+x)^{\frac{\alpha}{m}} dx = \int_0^t v_0 h^{\frac{\alpha}{m}} dt ;$$

$$\left. \frac{(h+x)^{\frac{\alpha}{m}+1}}{\frac{\alpha}{m}+1} \right|_0^x = v_0 h^{\frac{\alpha}{m}} t \Big|_0^t ; \quad \frac{m}{\alpha+m} \left((h+x)^{\frac{\alpha}{m}+1} - h^{\frac{\alpha}{m}+1} \right) = v_0 h^{\frac{\alpha}{m}} t ;$$

$$(h+x)^{\frac{\alpha+m}{m}} = h^{\frac{\alpha}{m}+1} + \frac{\alpha+m}{m} v_0 h^{\frac{\alpha}{m}} t ; \quad x = \left(h^{\frac{\alpha}{m}+1} \left(1 + \frac{\alpha+m}{m} \frac{v_0 t}{h} \right) \right)^{\frac{m}{\alpha+m}} - h ;$$

$$x = h \left(\left(1 + \frac{\alpha+m}{m} \frac{v_0 t}{h} \right)^{\frac{m}{\alpha+m}} - 1 \right) .$$

2.2 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

2.2.1 Структура общего решения

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t) , \tag{2.11}$$

где a, b, c – действительные числа;

$f(t)$ – некоторая функция независимой переменной t.

Если $f(t) \neq 0$, то уравнение (2.11) называется *неоднородным*. Если же в правой его части $f(t) = 0$, то уравнение является *однородным*:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 . \tag{2.12}$$

В литературе по теории дифференциальных уравнений второго порядка, например в [1], доказывается следующая теорема:

Общее решение уравнения (2.11) *представляет собой сумму какого-либо* *его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения*.

Следовательно, для отыскания общего решения неоднородного уравнения нужно найти общее решение $\bar{x}$ соответствующего однородного уравнения и какое-либо частное решение x^* неоднородного уравнения. Тогда

$$x = \bar{x} + x^* . \tag{2.13}$$

В п. 2.2.2 описана схема решения однородного уравнения (2.12) и, соответственно, нахождение функции $\bar{x}$. Функцию x^* можно определить методом вариации произвольных постоянных или (в некоторых случаях) методом неопределенных коэффициентов.

2.2.2 Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$ax'' + bx' + cx = 0 . \tag{2.14}$$

Это уравнение имеет два частных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, образующих так называемую фундаментальную систему решений уравнения (2.14). Общее его решение имеет вид [2]:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) , \tag{2.15}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

В дифференциальном уравнении (2.14) складываются умноженные на некоторые постоянные коэффициенты функция и ее производные. Поэтому его частное решение целесообразно искать в виде функции, производные от которой представляют собой ее же, умноженную на какое-либо число. Таким свойством обладает функция $x = e^{\lambda t}$, где $\lambda = \text{const}$.

Тогда $$x' = \lambda e^{\lambda t} , \; x'' = \lambda^2 e^{\lambda t} .$$

Подставляя в (2.14), получаем

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \quad \text{или} \quad e^{\lambda t}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0 .$$

Поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$, то

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 . \tag{2.16}$$

Таким образом, если λ удовлетворяет (2.16), то $e^{\lambda t}$ является решением уравнения (2.14).

Уравнение (2.16) называют *характеристическим* по отношению к уравнению (2.14). Как и любое квадратное уравнение, оно имеет два корня. Обозначим их λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

В зависимости от значения подкоренного выражения возможны следующие случаи.

1 Если $b^2-4ac>0$, то λ_1 и λ_2 – действительные не равные друг другу числа $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

В этом случае частными решениями будут функции $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}$. Они линейно независимы, так как $\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_1 t}} = e^{\lambda_2 t-\lambda_1 t} = e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \neq \mathrm{const}$.

Следовательно, общее решение (2.14) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

2 Если $b^2-4ac=0$, то λ_1 и λ_2 – равные действительные числа $(\lambda_1 = \lambda_2)$.

В этом случае пока известно одно частное решение (2.14) $x_1 = e^{\lambda t}$, где

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}. \qquad (2.17)$$

Второе частное решение, линейно независимое с первым, будем искать в виде $x_2 = u(t)e^{\lambda t}$, где $u(t)$ – неизвестная пока функция. Тогда

$$x_2' = u'e^{\lambda t} + \lambda u e^{\lambda t}, \quad x_2'' = u''e^{\lambda t} + 2\lambda u' e^{\lambda t} + \lambda^2 u e^{\lambda t}.$$

Подставим в (2.14) выражения функции x_2 и ее производных:

$$au''e^{\lambda t} + 2a\lambda u' e^{\lambda t} + a\lambda^2 u e^{\lambda t} + bu'e^{\lambda t} + b\lambda u e^{\lambda t} + cue^{\lambda t} = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$, то

$$au'' + 2a\lambda u' + a\lambda^2 u + bu' + b\lambda u + cu = 0$$

или
$$au'' + (2a\lambda + b)u' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)u = 0.$$

Но из (2.16) следует, что $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, а из (2.17) получаем $2a\lambda + b = 0$. Поэтому остается найти решение дифференциального уравнения $u'' = 0$. Ему соответствует функция $u(t) = At + B$. Рассмотрим частные случаи: $A=0, B=1$ и $A=1, B=0$.

Первый вариант нас не удовлетворяет, так как при нем $x_2(t) = e^{\lambda t} = x_1(t)$.

Во втором случае $x_2(t) = te^{\lambda t}$. Тогда $\frac{x_2}{x_1} = \frac{te^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} = t \neq \text{const}$. Следовательно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы.

Итак, если $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, то общее решение (2.14) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

3 Если $b^2 - 4ac < 0$, то λ_1 и λ_2 – комплексные недействительные числа.

Комплексные корни квадратного уравнения попарно сопряжены. Обозначим их $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (здесь $\beta \neq 0$). Тогда частные решения уравнения (2.14) представляют собой комплексные функции действительного аргумента *t*:

$$x_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}, \quad x_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}.$$

Воспользуемся определением показательной функции комплексного аргумента $e^{z+iy} = e^z(\cos y + i \sin y)$ и подставим выражения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в формулу (2.15):

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \qquad (2.18)$$

или $$x(t) = (C_1 + C_2)e^{\alpha t}\cos\beta t + i(C_1 - C_2)e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Поскольку постоянны C_1 и C_2, то константами являются $C_1 + C_2$ и $i(C_1 - C_2)$. Обозначим их

$$D_1 = C_1 + C_2; \quad D_2 = i(C_1 - C_2).$$

Тогда $$x(t) = D_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + D_2 e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Сопоставляя полученное выражение с (2.15), получаем, что частными решениями уравнения (2.14) оказались действительные функции $\tilde{x}_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$, $\tilde{x}_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Функции $\tilde{x}_1(t)$ и $\tilde{x}_2(t)$ линейно независимы, так как

$$\frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} = \frac{e^{\alpha t}\sin\beta t}{e^{\alpha t}\cos\beta t} = \operatorname{tg}\beta t \neq \text{const}.$$

Следовательно, общее решение (2.14) в рассматриваемом случае имеет вид

$$x = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \ \text{ или } \ x = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t).$$

Здесь мы вернулись к традиционному обозначению постоянных интегрирования, хотя их численные значения не такие, как в формуле (2.18).

Таким образом, **для решения однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вначале следует составить соответствующее ему характеристическое уравнение** и найти его корни λ_1 и λ_2. Затем **в зависимости от вида корней** и соотношения между ними **из таблицы 1 выбрать общее решение** дифференциального уравнения.

Таблица 1 – **Общие решения линейных однородных дифференциальных уравнений**

Вид корней характеристического уравнения	Общее решение
λ_1 и λ_2 – действительные числа, $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
λ_1 и λ_2 – действительные числа, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$
λ_1 и λ_2 – комплексные недействительные числа: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$	$x = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$

После этого с использованием начальных условий (в задачах динамики ими, как правило, являются значения функции x и ее первой производной x' при $t = 0$) определяются значения постоянных интегрирования C_1 и C_2.

Задача 2.4 (рисунок 2.3). Груз 5, масса которого m = 1 кг, висит на пружине 1, прикрепленной к точке K невесомого бруска 4 и имеющей коэффициент жесткости c_1 = 160 Н/м. Брусок подвешен к двум параллельным пружинам 2 и 3, коэффициенты жесткости которых c_2 = 256 Н/м, c_3 = 384 Н/м. Точка K находится на расстояниях a и b от осей этих пружин, а AB = 10 см. Гаситель колебаний 6 вызывает силу сопротивления движению груза, пропорциональную его скорости и равную $F_{\text{сопр}} = \alpha v$, Н, где v – скорость груза, α = 10 НХс/м.

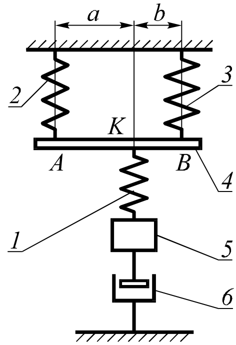

Рисунок 2.3

При каких размерах a и b брусок 4 движется поступательно?

Определить закон движения груза по отношению к направленной вертикально вниз оси координат, начало которой совпадает с положением равновесия груза. В начальный момент времени пружины не деформированы, и скорость груза равна нулю.

Решение. Для определения размеров a и b, при которых брусок движется поступательно, изобразим отдельно брусок 4 и покажем действующие на него силы упругости пружин (рисунок 2.4).

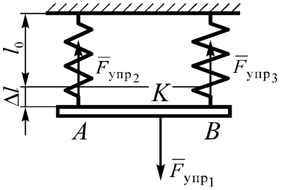

Рисунок 2.4

При поступательном движении бруска деформации пружин 2 и 3 в каждый момент времени одинаковы. Следовательно, их силы упругости

$$F_{\text{упр}_2} = c_2\Delta l \quad \text{и} \quad F_{\text{упр}_3} = c_3\Delta l \ .$$

Кроме того, при отсутствии вращения тела 4 сумма моментов всех сил, приложенных к бруску, относительно точки K должна быть равна нулю:

$$\sum M_{i\text{K}} = 0; \quad F_{\text{упр}_3} BK - F_{\text{упр}_2} AK = 0 \ .$$

Подставляя в это уравнение значения сил упругости, получаем:

$$c_3\Delta l \cdot b - c_2\Delta l \cdot a = 0 \ .$$

Таким образом, *поступательное движение бруска возможно* только при выполнении соотношения

$$\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}.$$

Из рисунка 2.3 следует, что $a + b = AB = 10$ см. Поскольку $\frac{a}{b} = \frac{384}{256} = \frac{3}{2}$, то a = 6 см, b = 4 см.

Для определения закона движения груза предварительно заменим систему из трех пружин эквивалентной пружиной той же жесткости.

Пружины 2 и 3 установлены параллельно. В учебнике [3] доказывается, что *при параллельном соединении нескольких пружин, если их деформации одинаковы, то их можно заменить одной эквивалентной пружиной, коэффициент жесткости которой равен сумме коэффициентов жесткости установленных пружин*. Это позволяет нам упростить расчетную схему, введя в нее вместо двух пружин 2 и 3 новую пружину с коэффициентом жесткости

$$c_{23} = c_2 + c_3 = 256 + 384 = 640 \text{ Н/м.}$$

Расчетная схема при этом приобретает вид, показанный на рисунке 2.5.

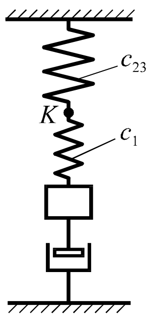

Рисунок 2.5

Теперь на схеме присутствуют две пружины, соединенные последовательно. В [3] показано, что *при последовательном соединении нескольких пружин они могут быть заменены эквивалентной пружиной, податливость которой равна сумме податливостей соединенных между собой пружин* (податливостью пружины называют величину, обратную ее коэффициенту жесткости). Используя это положение, заменим пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_{23} эквивалентной пружиной. Определим ее коэффициент жесткости:

$$\frac{1}{c_{экв}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_{23}}\text{, отсюда } c_{экв}=\frac{c_1c_{23}}{c_1+c_{23}}=\frac{160\cdot 640}{160+640}=128 \text{ Н/м.}$$

Таким образом, расчетная схема приобретает окончательный вид, приведенный на рисунке 2.6.

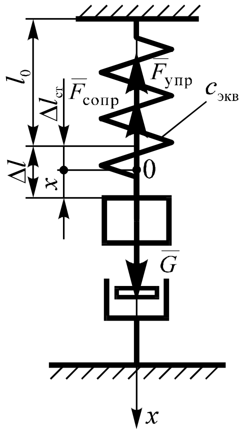

Рисунок 2.6

Расставляя силы, действующие на груз, учтем, что сила сопротивления должна быть противоположна по отношению к положительной проекции вектора скорости точки. При этом динамическое уравнение движения груза приобретает вид:

$$ma_x = G - F_{упр} - F_{сопр}.$$

Из рисунка 2.6 следует, что удлинение пружины Δl складывается из двух отрезков: статической деформации $\Delta l_{ст}$ и координаты *x*. Поэтому значение силы упругости определится по формуле:

$$F_{упр} = c_{экв}(\Delta l_{ст} + x).$$

Следовательно, динамическое уравнение движения груза приобретает вид:

$$m\ddot{x} = mg - c_{экв}(\Delta l_{ст} + x) - \alpha\dot{x}.$$

Но при равновесии груза сила тяжести равна силе упругости, то есть

$$mg = c_{экв}\Delta l_{ст}. \qquad (2.19)$$

Поэтому получаем линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + c_{экв}x = 0. \qquad (2.20)$$

Подставляя значения коэффициентов, имеем:

$$2\ddot{x} + 10\dot{x} + 128x = 0 \text{ или } \ddot{x} + 5\dot{x} + 64x = 0. \qquad (2.21)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому дифференциальному имеет вид: $\lambda^2 + 5\lambda + 64 = 0$.

Его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 64}}{2} = -2{,}5 \pm 15{,}2i.$$

Здесь результат вычисления округлен с точностью до трех значащих цифр, как это обычно делается при технических расчетах. Аналогично будем поступать и далее.

Поскольку корни характеристического уравнения – недействительные комплексные числа, то в соответствии с таблицей 1 общее решение дифференциального уравнения (2.21) имеет вид:

$$x = e^{-2{,}5t}(C_1\cos 15{,}2t + C_2\sin 15{,}2t). \qquad (2.22)$$

Соответственно проекция скорости груза на ось x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2{,}5e^{-2{,}5t}(C_1 \cos 15{,}2t + C_2 \sin 15{,}2t) +$$

$$+ e^{-2{,}5t}(-15{,}2C_1 \sin 15{,}2t + 15{,}2 \cos 15{,}2t). \qquad (2.23)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 подставим значение $t = 0$ в выражения (2.22) и (2.23):

$$x\big|_{t=0} = x_0 = e^{-2{,}5 \cdot 0}\big(C_1 \cos(15{,}2 \cdot 0) + C_2 \sin(15{,}2 \cdot 0)\big) = C_1;$$

$$v_x\big|_{t=0} = v_{x_0} = -2{,}5e^{-2{,}5 \cdot 0}\big(C_1 \cos(15{,}2 \cdot 0) + C_2 \sin(15{,}2 \cdot 0)\big) +$$

$$+ e^{-2{,}5 \cdot 0}\big(-15{,}2C_1 \sin(15{,}2 \cdot 0) + 15{,}2 \cos(15{,}2 \cdot 0)\big) = -2{,}5C_1 + 15{,}2C_2.$$

С другой стороны, из условия задачи следует, что в начальный момент времени скорость груза $v_{x_0} = 0$, а его начальная координата $x_0 = -OK = -\Delta l_{\text{ст}}$. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = -\Delta l_{\text{ст}}; \\ -2{,}5C_1 + 15{,}2C_2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку из (2.19) следует, что $\Delta l_{\text{ст}} = \dfrac{mg}{c_{\text{экв}}} = \dfrac{1 \cdot 9{,}8}{128} = 0{,}0766$ м,

то $\qquad C_1 = -0{,}0766; \quad C_2 = \dfrac{2{,}5C_1}{15{,}2} = \dfrac{2{,}5 \cdot (-0{,}0766)}{15{,}2} = -0{,}0126.$

Таким образом, уравнение движения точки имеет вид

$$x = e^{-2{,}5t}(-0{,}0766 \cos 15{,}2t - 0{,}0126 \sin 15{,}2t).$$

Задача 2.5. Определить закон движения груза в задаче 2.4 при $\alpha = 32$

Решение. Подстановка значений коэффициентов в (2.20) приводит к уравнению

$$2\ddot{x} + 32\dot{x} + 128x = 0 \text{ или } \ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = 0. \qquad (2.24)$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0,$$

находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = -8.$$

Корни характеристического уравнения – равные действительные числа. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (2.24):

$$x = C_1 e^{-8t} + C_2 t e^{-8t}.$$

Соответственно $\quad v_x = \dot{x} = -8C_1 e^{-8t} + C_2 e^{-8t} - 8C_2 t e^{-8t}.$

Подставляя в эти выражения значение $t = 0$, получаем:

$$x_0 = C_1;\ \dot{x}_0 = -8C_1 + C_2.$$

Поскольку в то же самое время $x_0 = -\Delta l_{\text{ст}}$, $v_{x_0} = 0$, то

$$C_1 = -\Delta l_{\text{ст}} = -0{,}0766;\ C_2 = 8C_1 = -8 \cdot 0{,}0766 = -0{,}6128.$$

Отсюда $\quad x = -0{,}0766 e^{-8t} - 0{,}6128\, t e^{-8t}.$

Задача 2.6. Определить закон движения груза в задаче 2.4 при $\alpha = 50$

Решение. При подстановке коэффициентов в (2.20) получаем

$$2\ddot{x} + 50\dot{x} + 128x = 0 \ \text{ или } \ \ddot{x} + 25\dot{x} + 64x = 0. \qquad (2.25)$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 25\lambda + 64 = 0,$$

имеем

$$\lambda_1 = \frac{-25 + \sqrt{25^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = -2{,}90;\ \lambda_1 = \frac{-25 - \sqrt{25^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = -22{,}10.$$

Поскольку корни характеристического уравнения – неравные действительные числа, то общее решение дифференциального уравнения (2.25):

$$x = C_1 e^{-2{,}9t} + C_2 e^{-22{,}1t}.$$

Следовательно, $\quad v_x = \dot{x} = -2{,}9C_1 e^{-2{,}9t} - 22{,}1C_2 e^{-22{,}1t}.$

При $t = 0$:

$$x_0 = C_1 + C_2;\ \dot{x}_0 = -2{,}9C_1 - 22{,}1C_2.$$

Используя начальные условия задачи $x_0 = -\Delta l_{\text{ст}}$ и $v_{x_0} = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\Delta l_{\text{ст}}; \\ -2{,}9C_1 - 22{,}1C_2 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$C_2 = -\frac{2{,}9C_1}{22{,}1} = -0{,}131C_1;\ C_1 - 0{,}131C_1 = -\Delta l_{\text{ст}}.$$

Отсюда $\quad C_1 = \dfrac{-\Delta l_{\text{ст}}}{0{,}869} = -0{,}0881;\ C_2 = -0{,}131 \cdot (-0{,}0881) = 0{,}0115.$

Таким образом, $\quad x = -0{,}0881 e^{-2{,}9t} + 0{,}0115 e^{-22{,}1t}.$

2.2.3 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть требуется найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (2.11). Предположим, что $x_1(t)$, $x_2(t)$ – фундаментальная система решений соответствующего (2.11) однородного уравнения, а общее решение последнего

$$\overline{x}(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) . \qquad (2.26)$$

Частное решение $x^*(t)$ уравнения (2.11) будем искать в виде (2.26), считая при этом C_1 и C_2 не постоянными, а некоторыми неизвестными функциями переменной *t*, то есть

$$x^*(t) = C_1(t) x_1(t) + C_2(t) x_2(t) . \qquad (2.27)$$

Продифференцируем последнее выражение по *t*:

$$(x^*)' = C_1'(t) x_1(t) + C_1(t) x_1'(t) + C_2'(t) x_2(t) + C_2(t) x_2'(t) .$$

Для того чтобы получить возможность разделения переменных, предположим, что выполняется равенство

$$C_1'(t) x_1(t) + C_2'(t) x_2(t) = 0 .$$

С учетом этого условия приходим к соотношению

$$(x^*)' = C_1(t) x_1'(t) + C_2(t) x_2'(t) .$$

Дифференцируем его по переменной *t*:

$$(x^*)'' = C_1'(t) x_1'(t) + C_1(t) x_1''(t) + C_2'(t) x_2'(t) + C_2(t) x_2''(t) .$$

Подставляя выражения функции *x** и ее производных $(x^*)'$ и $(x^*)''$ в (2.11), получаем

$$aC_1'(t) x_1'(t) + aC_1(t) x_1''(t) + aC_2'(t) x_2'(t) + aC_2(t) x_2''(t) +$$
$$+ bC_1(t) x_1'(t) + bC_2(t) x_2'(t) + cC_1(t) x_1(t) + cC_2(t) x_2(t) = f(t)$$

или

$$C_1(t)\big(ax_1''(t) + bx_1'(t) + cx_1(t)\big) + C_2(t)\big(ax_2''(t) + bx_2'(t) + cx_2(t)\big) +$$
$$+ aC_1'(t) x_1'(t) + aC_2'(t) x_2'(t) = f(t).$$

Выражения в обеих скобках равны нулю, так как $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются частными решениями однородного уравнения. Следовательно,

$$aC_1'(t) x_1'(t) + aC_2'(t) x_2'(t) = f(t).$$

Таким образом, **для определения частного решения уравнения (2.11)** вначале необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(t) x_1(t) + C_2'(t) x_2(t) = 0; \\ a\big(C_1'(t) x_1'(t) + C_2'(t) x_2'(t)\big) = f(t). \end{cases} \qquad (2.28)$$

Из нее получим соотношения $C_1'(t)=\varphi(t)$, $C_2'(t)=\psi(t)$. Интегрируя их, найдем функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Подставив их в выражение (2.27), отыщем частное решение неоднородного уравнения (2.11).

Задача 2.7. На тело массы $m = 5$ кг, принимаемое за материальную точку, действует система переменных сил, равнодействующая которых выражается формулой $\overline{R}=\left(5v+5e^{2t}\sin e^t\right)\overline{i}$ (рисунок 2.7). Найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени она находилась в покое, и ее координата была равна $x_0=0{,}1$ м.

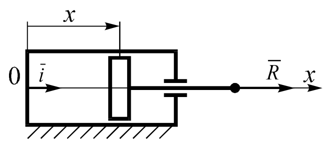

Рисунок 2.7

Решение. Проецируя векторное равенство $m\overline{a}=\overline{R}$ на ось Ox, получаем:

$$ma_x=5v+5e^{2t}\sin e^t \quad \text{или} \quad 5x''=5x'+5e^{2t}\sin e^t .$$

$$x''-x'=e^{2t}\sin e^t .$$

Определим общее решение однородного уравнения

$$x''-x'=0 .$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$\overline{x}(t)=C_1+C_2e^t ,$$

а фундаментальные функции $\overline{x}_1(t)=e^0=1$, $\overline{x}_2(t)=e^t$.

Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $x^*=C_1(t)+C_2(t)e^t$. Для определения функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ составим систему уравнений вида (2.28), учитывая, что $\overline{x}_1'(t)=0$, $\overline{x}_2'(t)=e^t$:

$$\begin{cases} C_1'(t)+C_2'(t)e^t=0; \\ C_1'(t)\cdot 0+C_2'(t)e^t=e^{2t}\sin e^t. \end{cases}$$

Решив ее, получим

$$C_1'(t)=-e^{2t}\sin e^t ,\ C_2'(t)=e^t\sin e^t ,$$

откуда $$C_1(t)=e^t\cos e^t-\sin e^t ,\ C_2(t)=-\cos e^t .$$

Следовательно, частное решение исходного неоднородного уравнения

$$x^*(t)=(e^t\cos e^t-\sin e^t)+(-\cos e^t)e^t=-\sin e^t .$$

Так как общее решение $x(t)$ неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения, то

$$x(t) = \bar{x}(t) + x^*(t) = C_1 + C_2 e^t - \sin e^t . \quad (2.29)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2.

Продифференцируем полученную функцию по времени:

$$x'(t) = C_2 e^t - \cos e^t e^t . \quad (2.30)$$

Подставляя в (2.29) и (2.30) значение $t = 0$, получаем:

$$x(0) = C_1 + C_2 ; \quad x'(0) = C_2 - 1 .$$

С другой стороны, по условию задачи $x(0) = 0{,}1$; $x'(0) = 0$. Следовательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0{,}1; \\ C_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем: $C_1 = -0{,}9$; $C_2 = 1$. Таким образом, уравнение движения приобретает окончательный вид:

$$x(t) = -0{,}9 + e^t - \sin e^t .$$

2.2.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотренный выше метод вариации произвольных постоянных является универсальным, поскольку его можно использовать при любой правой части уравнения (2.11). Однако с помощью *метода неопределенных коэффициентов* в некоторых случаях частное решение удается найти без применения операции интегрирования. Этим способом решают уравнения вида

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t) , \quad (2.31)$$

где $P_n(t)$, $Q_m(t)$ – многочлены с действительными коэффициентами степеней n и m соответственно,

α, β – действительные числа.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1 Правая часть уравнения (2.31) – многочлен степени n:

$$f(t) = P_n(t) . \quad (2.32)$$

Она получается из выражения, соответствующего общему случаю (2.31), при $\alpha = \beta = 0$.

Имеются следующие три возможности:

а) число 0 не является корнем характеристического уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 . \quad (2.33)$$

Тогда частное решение можно искать в виде

$$x^* = R_n(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n, \qquad (2.34)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – подлежащие определению коэффициенты, которые называют неопределенными.

Подставляя значения $x^*, \frac{dx^*}{dt}, \frac{d^2x^*}{dt^2}$ в уравнение (2.31), имеем

$$aR_n''(t) + bR_n'(t) + cR_n(t) = P_n(t). \qquad (2.35)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему $n + 1$ линейных алгебраических уравнений для определения $n + 1$ неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$;

б) число 0 является простым (однократным) корнем характеристического уравнения (2.33), *что имеет место только при* $b \neq 0$, $c = 0$.

Если в этом случае $x(t)$ искать в виде (2.34), то левая часть (2.35) представляет собой многочлен степени $n - 1$, а правая – многочлен степени n.

Значит, ни при каких $A_0, A_1, \ldots, A_n$ равенство (2.35) выполняться не может. В связи с этим частное решение нужно искать в виде многочлена $(n + 1)$-й степени, но без свободного члена, исчезающего при дифференцировании, то есть в виде $x = tR_n(t)$;

в) число 0 *является двукратным корнем характеристического уравнения, то есть характеристическое уравнение имеет вид* $\lambda^2 = 0$.

Если в этом случае $x^*(t)$ искать в виде многочлена степени n, то левая часть равенства (2.35) – многочлен степени $n - 2$, а правая – многочлен степени n. Поэтому частное решение $x^*(t)$ нужно искать в виде многочлена $(n + 2)$-й степени, у которого свободный член и член при t, исчезающие при двукратном дифференцировании, равны нулю:

$$x^*(t) = t^2 R_n(t).$$

Замечание. Для дифференциальных уравнений, соответствующих случаям *б*) и *в*), зачастую удобнее применять способы решения, связанные с понижением порядка уравнений, описанные в п. 2.1.

Задача 2.8. С высоты h_0 брошено вертикально вниз тело массой m с начальной скоростью v_0. Найти закон изменения пройденного телом пути, если его падению препятствует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости движения (коэффициент пропорциональности k).

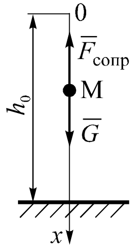

Рисунок 2.8

Решение. При проецировании выражения основного закона динамики на ось Оx из рисунка 2.8 получаем:

$$ma_x = G - F_{\text{сопр}}.$$

Поскольку $a_x = x''(t)$ и $F_{\text{сопр}} = kv = kx'(t)$, то

$$mx'' = mg - kx'$$

или

$$x'' + \frac{k}{m}x' = g. \qquad (2.36)$$

Поскольку α, m, g – постоянные, то искомая функция $x(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью $f(t) = g$.

Характеристическое уравнение однородного уравнения

$$x'' + \frac{k}{m}x' = 0 \qquad (2.37)$$

имеет вид $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$. Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{k}{m}$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего (2.36),

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Так как $\lambda = 0$ является простым корнем характеристического уравнения, а правая часть уравнения (2.36) $f(t) = g$ – многочлен нулевой степени, то частное решение нужно искать в виде $x^*(t) = At$.

Подставив значения $\frac{dx^*}{dt}$ и $\frac{d^2x^*}{dt^2}$ в уравнение (2.36), для определения коэффициента A получим уравнение $\frac{k}{m}A = g$, откуда $A = \frac{mg}{k}$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения $x^*(t) = \frac{mg}{k}t$, а его общее решение

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}t. \qquad (2.38)$$

Определим постоянные C_1 и C_2 так, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$. Дифференцируя по времени (2.38), находим:

$$x'(t) = -\frac{k}{m} C_2 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} .$$

Подставляя в выражения $x(t)$ и $x'(t)$ значение $t = 0$, приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ -\frac{k}{m} C_2 + \frac{mg}{k} = v_0. \end{cases}$$

Решая ее, имеем:

$$C_1 = -\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k} g - v_0\right),\ C_2 = \frac{m}{k}\left(\frac{m}{k} g - v_0\right).$$

Подставив значения C_1 и C_2 в (2.37), получим искомую зависимость x от t:

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} - v_0\right)(e^{-\frac{kt}{m}} - 1) + \frac{mg}{k} t .$$

2 Правая часть уравнения (2.31) имеет вид

$$f(t) = e^{\alpha t} P_n(t) ,$$

что возможно при $\beta = 0$. В этом случае частное решение неоднородного уравнения нужно искать в форме [4]:

- $x^*(t) = e^{\alpha t} R_n(t)$, если α не является корнем характеристического уравнения (2.33);
- $x^*(t) = t e^{\alpha t} R_n(t)$, если α – простой корень характеристического уравнения (2.33);
- $x^*(t) = t^2 e^{\alpha t} R_n(t)$, если α – двукратный корень характеристического уравнения (2.33).

Задача 2.9. На рисунке 2.9 изображен астатический маятник, использующийся для исследования колебаний, возникающих при землетрясениях. Он представляет собой точечный груз массы m = 1 кг, укрепленный на невесомом стержне длины l = 0,4 м. Движение маятника ограничивают две одинаковые пружины, каждая из которых имеет коэффициент жесткости c = 100 Н/м. В процессе движения маятник испытывает силу сопротивления, пропорциональную скорости груза, коэффициент пропорциональности α = 1 у-

ждающей силы, изменяющейся по закону $F_{\text{вын}} = 10te^{-2t}$ Н, если в начальный момент времени система находилась в равновесии, а стержень занимал вертикальное положение.

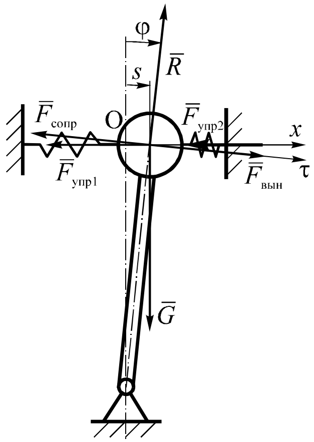

Рисунок 2.9

Решение. На рассматриваемую материальную точку действуют силы: вынуждающая $\overline{F}_{вын}$, тяжести $\overline{G}$, упругости $\overline{F}_{упр_1}$ и $\overline{F}_{упр_2}$, сопротивления $\overline{F}_{сопр}$, а также реакция стержня $\overline{R}$.

Динамическое уравнение движения приобретает вид:

$$m\overline{a} = \overline{F}_{вын} + \overline{G} + \overline{F}_{упр_1} + \overline{F}_{упр_2} + \overline{F}_{сопр} + \overline{R} .$$

Траекторией движения точки является дуга окружности радиуса *l*. При проецировании на касательную к траектории τ получаем:

$$ma_\tau = F_{вын} + G\sin\varphi - F_{упр_1} - F_{упр_2} - F_{сопр} .$$

Подстановка выражений сил приводит к уравнению

$$ma_\tau = 10te^{-2t} + mg\sin\varphi - cx - cx - \alpha v .$$

При малых колебаниях системы $\sin\varphi \approx \varphi = \frac{s}{l}$. Следовательно, $x = l\sin\varphi \approx s$. В результате подстановок имеем:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \left(2c - \frac{mg}{l}\right)x = 10te^{-2t} .$$

Подставляя заданные значения величин, получаем линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 175{,}5x = 10te^{-2t} . \qquad (2.39)$$

Характеристическое уравнение соответствующего ему однородного уравнения имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda + 175{,}5 = 0 .$$

Его корни $\lambda_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 175{,}5} = -0{,}5 \pm 13{,}24i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения

$$\overline{x}(t) = e^{-0{,}5t}(C_1 \sin 13{,}24t + C_2 \cos 13{,}24t) .$$

Так как в правой части уравнения (2.39) функция e^{-2t} умножается на многочлен первой степени, и $\alpha = -2$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$x^*(t) = (At + B)e^{-2t} , \qquad (2.40)$$

где *A*, *B* – неопределенные коэффициенты.

Дифференцируя дважды функцию $x^*(t)$, имеем

$$\frac{dx^*}{dt} = Ae^{-2t} - 2(At + B)e^{-2t}; \quad \frac{d^2x^*}{dt^2} = -4Ae^{-2t} + 4(At + B)e^{-2t}. \qquad (2.41)$$

Подставляя (2.40) и (2.41) в (2.39), получаем:

$$-4Ae^{-2t} + 4(At + B)e^{-2t} + Ae^{-2t} - 2(At + B)e^{-2t} + 175{,}5(At + B)e^{-2t} = 10te^{-2t}.$$

Сокращая на e^{-2t}, приходим к уравнению

$$-3A + 177{,}5At + 177{,}5B = 10t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 177{,}5A = 10; \\ -3A + 177{,}5B = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим значения A и B:

$$A = \frac{10}{177{,}5} = 0{,}05634; \quad B = \frac{3 \cdot 0{,}05634}{177{,}5} = 0{,}00095.$$

Следовательно, частное решение уравнения (2.39) имеет вид

$$x^*(t) = (0{,}05634t + 0{,}00095)e^{-2t},$$

а его общее решение

$$x = \bar{x} + x^* = e^{-0{,}5t}(C_1 \sin 13{,}24t + C_2 \cos 13{,}24t) + (0{,}05634t + 0{,}00095)e^{-2t}.$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 предварительно продифференцируем последнее выражение по времени:

$$\dot{x} = -0{,}5e^{-0{,}5t}(C_1 \sin 13{,}24t + C_2 \cos 13{,}24t) + 13{,}24e^{-0{,}5t}(C_1 \cos 13{,}24t - C_2 \sin 13{,}24t) +$$
$$+ 0{,}05634e^{-2t} - 2 \cdot (0{,}05634t + 0{,}00095)e^{-2t}.$$

Следовательно,

$$x(0) = C_2 + 0{,}00095;$$

$$\dot{x}(0) = -0{,}5C_2 + 13{,}24C_1 + 0{,}05634 - 2 \cdot 0{,}00095 = -0{,}5C_2 + 13{,}24C_1 + 0{,}05444.$$

Поскольку из условия следует, что $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, то приходим к системе двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_2 + 0{,}00095 = 0; \\ -0{,}5C_2 + 13{,}24C_1 + 0{,}05444 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем

$$C_2 = -0{,}00095; \; C_1 = \frac{0{,}5C_2 - 0{,}05444}{13{,}24} = \frac{0{,}5 \cdot (-0{,}00095) - 0{,}05444}{13{,}24} = -0{,}00415.$$

Таким образом, искомый закон движения:

$$x = e^{-0{,}5t}(-0{,}00415 \sin 13{,}24t - 0{,}00095 \cos 13{,}24t) + (0{,}05634t + 0{,}00095)e^{-2t}.$$

3 Правая часть уравнения (2.31) имеет вид

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t).$$

В этом случае частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде

$$x^*(t) = e^{\alpha t}(R_k(t)\cos\beta t + S_k(t)\sin\beta t), \qquad (2.42)$$

где $k = \max(n, m)$, если комплексные числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения (2.33), или в виде

$$x^*(t) = te^{\alpha t}(R_k(t)\cos\beta t + S_k(t)\sin\beta t), \qquad (2.43)$$

если $\alpha \pm i\beta$ – корни характеристического уравнения (2.33).

Замечание. Частное решение $x^*(t)$ ищут в виде (2.42) или (2.43) и в том случае, когда какой-либо из многочленов $P_n(t)$ или $Q_m(t)$ тождественно равен нулю.

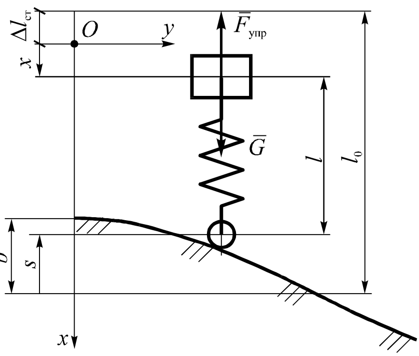

Рисунок 2.10

Задача 2.10. На рисунке 2.10 приведена схема, используемая для моделирования вертикальных колебаний вагона при его движении по неровному пути. Вертикальные перемещения осей колесных пар описываются законом $s = b\cos\omega t$. Суммарный коэффициент жесткости комплектов рессорного подвешивания c, масса вагона m. Пренебрегая силами сопротивления, определить закон вертикальных колебаний кузова при наезде на неровный путь, если начальные условия движения имеют вид $x_0 = -b$; $\dot{x}_0 = 0$.

Решение. Начало отсчета (точку О) поместим в положение, соответствующее равновесию кузова на рессорах при значении $s = 0$.

При проецировании действующих на кузов вагона сил на ось Ox получаем:

$$ma_x = G - F_{упр}. \qquad (2.44)$$

Сила упругости связана с деформацией упругой связи соотношением $F_{упр} = c\Delta l$, причем деформация пружины

$$\Delta l = l_0 - l = \Delta l_{ст} + x + s,$$

где l_0 и l – длины пружины в недеформированном и текущем состояниях;

$\Delta l_{ст}$ – деформация упругой связи, соответствующая состоянию покоя.

Подставляя в уравнение (2.44), получаем

$$ma_x = G - c\Delta l_{ст} - cx - cs\,.$$

Но при равновесии $G = c\Delta l_{ст}$, поэтому с учетом подстановки выражения перемещения s получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$m\ddot{x} + cx = -cb\cos\omega t\,. \tag{2.45}$$

Его общее решение, как было указано раньше, $x = \bar{x} + x^*$.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $m\lambda^2 + c = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{c}{m}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{c}{m}}$, то есть $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Следовательно, его общее решение

$$\bar{x} = C_1\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\,.$$

Вид частного решения зависит от соотношения между β и ω. Рассмотрим два возможных варианта.

а) $\omega \ne \beta$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$x^* = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,.$$

Тогда

$$\frac{dx^*}{dt} = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\,;\quad \frac{d^2x^*}{dt^2} = -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,.$$

Подставляя эти выражения в (2.45), получаем

$$-m\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + c(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -cb\cos\omega t\,.$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие в левой и правой частях равенства при каждой из функций независимой переменной t, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}\cos\omega t: & -m\omega^2 A + cA = -cb;\\ \sin\omega t: & -m\omega^2 B + cB = 0.\end{cases}$$

Решая ее, находим $A = \frac{cb}{m\omega^2 - c}$; $B = 0$. Следовательно, частное решение уравнения (2.45) в рассматриваемом случае:

$$x^* = \frac{cb}{m\omega^2 - c}\cos\omega t\ ,$$

а его общее решение:

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{cb}{m\omega^2 - c}\cos\omega t\ .$$

Изменение проекции скорости на ось Ox описывается формулой:

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{c}{m}}C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \sqrt{\frac{c}{m}}C_2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - \frac{cb\omega}{m\omega^2 - c}\sin\omega t\ .$$

Поэтому при $t = 0$ имеем:

$$x(0) = C_1 + \frac{cb}{m\omega^2 - c};\ \ \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{c}{m}}C_2\ .$$

Приравнивая к заданным в условии значениям, получаем:

$$C_1 + \frac{ca}{m\omega^2 - c} = -b;\ \ \sqrt{\frac{c}{m}}C_2 = 0\ .$$

Отсюда $C_1 = -\dfrac{m\omega^2 b}{m\omega^2 - c}$; $C_2 = 0$ и окончательно:

$$x = -\frac{m\omega^2 b}{m\omega^2 - c}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{cb}{m\omega^2 - c}\cos\omega t\ .$$

б) $\omega = \beta = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$. В этом случае в качестве частного решения неоднородного уравнения используем функцию:

$$x^* = t\left(A\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\right).$$

Следовательно,

$$\frac{dx^*}{dt} = A\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \sqrt{\frac{c}{m}}t\left(-A\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + B\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\right);$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^2} = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\left(-A\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + B\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) - \frac{c}{m}t\left(A\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\right).$$

После подстановки этих выражений в уравнение (2.30) приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos\omega t: \quad 2mB\sqrt{\dfrac{c}{m}} - cAt + cAt = -cb; \\ \sin\omega t: \quad -2mA\sqrt{\dfrac{c}{m}} - cBt + cBt = 0. \end{cases}$$

Отсюда $B = -\dfrac{b}{2}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$; $A = 0$; $x^* = -\dfrac{bt}{2}\sqrt{\dfrac{c}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}t$.

Далее получаем:

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t - \frac{bt}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t ;$$

$$\dot{x} = -C_1\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - \frac{b}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t - \frac{cbt}{2m}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t ;$$

$$x(0) = C_1 = -b ; \ \dot{x}(0) = C_2 = 0 .$$

Таким образом, функция

$$x = -b\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - \frac{bt}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t$$

является решением уравнения (2.45).

4 Правая часть уравнения (2.31) является суммой нескольких выражений.

Пусть $f(t) = f_1(t) + \ldots + f_n(t)$.

Тогда частное решение $x^*(t)$ уравнения (2.31) является суммой

$$x^*(t) = x_1^*(t) + \ldots + x_n^*(t) ,$$

где $x_i^*(t)$ есть соответственно частные решения уравнений

$$ax'' + bx' + cx = f_i(t) .$$

Задача 2.11. На начальной стадии опускания кабины лифта (рисунок 2.11) ее движение описывается уравнением $s = 0{,}5t^3 + 0{,}1e^{-0{,}5t}\sin 4t$. К потолку кабины с помощью двух одинаковых пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c = 200\,\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$, подвешен груз массы $m = 2$ кг. Длины пружин в ненапряженном состоянии $l_0 = 30$ см . Определить закон изменения расстояния от груза до потолка кабины, если до начала движения кабины он находился в покое.

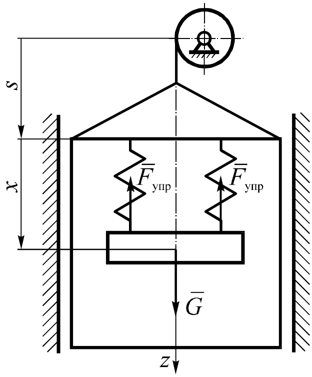

Рисунок 2.11

Решение. Динамическое уравнение движения груза, на который действуют силы тяжести $\overline{G}$ и упругости $\overline{F}_{упр}$:

$$ma_z = G - 2F_{упр} . \qquad (2.46)$$

Удвоение силы упругости вызвано тем, что груз подвешен к двум параллельно установленным пружинам. Значение силы упругости связано с деформацией пружины Δl зависимостью $F_{упр} = c\Delta l$, а удлинение пружин может быть найдено по формуле $\Delta l = x - l_0$.

Поскольку координата груза в неподвижной системе отсчета $z = s + x$, то проекция ускорения $a_z = \ddot{s} + \ddot{x}$.

Подставляя соответствующие выражения в уравнение (2.46), получаем

$$m(\ddot{s} + \ddot{x}) = mg - 2c(x - l_0) .$$

Определим закон изменения ускорения лифта

$$\dot{s} = 1{,}5t^2 - 0{,}05e^{-0{,}5t}\sin 4t + 0{,}4e^{-0{,}5t}\cos 4t ;$$

$$\ddot{s} = 3t + 0{,}025e^{-0{,}5t}\sin 4t - 0{,}2e^{-0{,}5t}\cos 4t - 0{,}2e^{-0{,}5t}\cos 4t - 1{,}6e^{-0{,}5t}\sin 4t =$$
$$= 3t - 1{,}575e^{-0{,}5t}\sin 4t - 0{,}4e^{-0{,}5t}\cos 4t.$$

Тогда с учетом подстановки заданных значений величин приходим к дифференциальному уравнению:

$$2\left(3t - 1{,}575e^{-0{,}5t}\sin 4t - 0{,}4e^{-0{,}5t}\cos 4t + \ddot{x}\right) = 2\cdot 9{,}8 - 2\cdot 200\left(x - 0{,}3\right).$$

Преобразуем его к более удобному для решения виду, перенеся слагаемые, содержащие искомую функцию *x*, в левую часть равенства:

$$2\ddot{x} + 400x = -6t + 139{,}6 + 3{,}15e^{-0{,}5t}\sin 4t + 0{,}8e^{-0{,}5t}\cos 4t . \qquad (2.47)$$

Получено линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения

$$2\lambda^2 + 400 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{200}i = \pm 14{,}14i$. Следовательно, соответствующее общее решение однородного уравнения

$$\overline{x} = C_1\cos 14{,}14t + C_2\sin 14{,}14t .$$

Правую часть уравнения (2.32) можно представить в виде суммы двух функций

$$f_1(t) = -6t + 139{,}6 \text{ и } f_2(t) = 3{,}15e^{-0{,}5t}\sin 4t + 0{,}8e^{-0{,}5t}\cos 4t\,.$$

Поскольку для обеих функций $f_i(t)$ значения $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частные решения $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ уравнений

$$2\ddot{x} + 400x = -6t + 139{,}6\,;\; 2\ddot{x} + 400x = 3{,}15e^{-0{,}5t}\sin 4t + 0{,}8e^{-0{,}5t}\cos 4t \qquad (2.48)$$

ищем в виде:

$$x_1^*(t) = At + B\,; \quad x_2^*(t) = e^{-0{,}5t}(D\sin 4t + E\cos 4t)\,. \qquad (2.49)$$

Подставляя выражения функций (2.49), а также их производных по времени в соответствующие уравнения (2.48), и используя методику, описанную в предыдущих примерах, получим

$$x_1^*(t) = -0{,}015t + 0{,}349\,,\; x_2^*(t) = e^{-0{,}5t}(0{,}00850\sin 4t + 0{,}00236\cos 4t)\,.$$

Следовательно, частным решением $x^*(t)$ уравнения (2.47) является

$$x^*(t) = -0{,}015t + 0{,}349 + e^{-0{,}5t}(0{,}00850\sin 4t + 0{,}00236\cos 4t)\,,$$

а его общее решение будет

$$x^*(t) = C_1\cos 14{,}14t + C_2\sin 14{,}14t -$$
$$- 0{,}015t + 0{,}349 + e^{-0{,}5t}(0{,}00850\sin 4t + 0{,}00236\cos 4t).$$

В начальный момент времени длины пружин таковы, что $x_0 = l_0 + \Delta l_{\text{ст}}$. Здесь $\Delta l_{\text{ст}}$ – статическая деформация пружин. Она определяется из уравнения равновесия

$$G = 2F_{\text{упр}_{\text{ст}}} = 2c\Delta l_{\text{ст}}\,.$$

Тогда $x_0 = l_0 + \dfrac{mg}{2c} = 0{,}3 + \dfrac{2\cdot 9{,}8}{2\cdot 400} = 0{,}3245$ м. Поскольку груз вначале находился в покое, то $\dot{x}_0 = 0$. Используя эти значения, определяем постоянные интегрирования $C_1 = -0{,}02686$, $C_2 = -0{,}00126$.

Окончательно искомое решение принимает вид:

$$x^*(t) = -0{,}02686\cos 14{,}14t - 0{,}00126\sin 14{,}14t -$$
$$- 0{,}015t + 0{,}349 + e^{-0{,}5t}(0{,}00850\sin 4t + 0{,}00236\cos 4t).$$

3 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Метод Эйлера

Часто движения материальных объектов описываются дифференциальными уравнениями, аналитическое решение которых либо невозможно, либо весьма трудоемко. В таких случаях дифференциальные уравнения и их системы решают численно. Общую схему решения разберем на примере одного дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть на отрезке $[t_0, t_n]$ требуется решить дифференциальное уравнение $x' = f(t, x)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Разобьем этот отрезок на n малых интервалов точками, координаты которых t_i. Множество этих точек называется сеткой, а сами точки – узлами сетки. Как правило, интервалы $t_{i+1} - t_i = h_i$ принимают равными. В этом случае значение $h = h_i$ называют шагом сетки. Приближенное решение получается в виде множества чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_i – приближенное значение искомой функции – решения дифференциального уравнения в точке t_i.

Наиболее простым, но в то же время наименее точным, является метод Эйлера. Основан он на том положении, что на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ производная $x' = \dfrac{dx}{dt}$ может считаться постоянной вследствие малости шага h. Тогда дифференциалы переменных dx, dt могут быть заменены на их приращения $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta t = t_{i+1} - t_i = h$. Отсюда получаем

$$x' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}.$$

Поскольку, с другой стороны,

$$x' = f(t, x),$$

то для рассматриваемого отрезка имеем

$$f(t_i, x_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}.$$

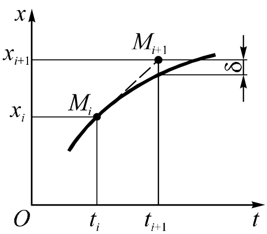

Рисунок 3.1

Таким образом, соотношение для расчета значения x_{i+1} приобретает вид

$$x_{i+1} = x_i + h\, f(t_i, x_i). \tag{3.1}$$

На рисунке 3.1 сплошной линией показан график точного решения уравнения, а штриховой – приближенного решения $M_i M_{i+1}$. Из рисунка видно, что в пределах отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ появляется погрешность δ.

Таким образом, интегральная кривая (точное решение, изображенное сплошной линией на рисунке 3.2) заменяется ломаной линией, составленной из отрезков $M_i M_{i+1}$, первый из которых совпадает с касательной к кривой в точке M_0, а последующие параллельны касательным, проведенным в точках с координатами t_i.

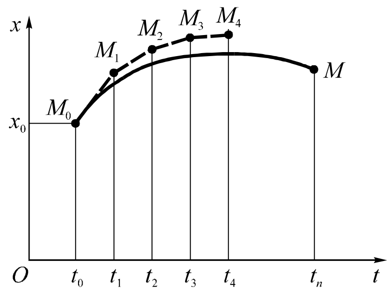

Рисунок 3.2

При решении систем дифференциальных уравнений выражения вида (3.1) записываются на каждом шаге по времени для всех определяемых функций системы. Дифференциальные уравнения второго порядка могут быть преобразованы в системы дифференциальных уравнений первого порядка. Следовательно, метод Эйлера дает возможность решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Сопоставление приближенного и точного решений (см. рисунок 3.2) показывает, что в процессе расчетов с каждым новым шагом t погрешность растет. Для ее уменьшения интервал интегрирования делят на большое число частей. Однако это приводит к существенному увеличению времени расчетов. Чтобы преодолеть названный недостаток, разработаны иные способы численного решения дифференциальных уравнений.

3.2 Применение теории равнопеременного движения точки к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка

Применение метода Эйлера к известной формуле касательного ускорения точки $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ показывает, что при расчете зависимости скорости v от времени t при заданной функции ускорения $a_\tau = f(t, x, v)$ формула (3.1) приводится к виду:

$$v_{i+1} = v_i + a_\tau \Delta t \, .$$

Анализ физического смысла приведенного выражения позволяет сделать вывод о том, что в пределах одного шага интегрирования касательное ускорение точки считается постоянным. Следовательно, для расчета пройденного пути можно использовать формулу

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t + \frac{a_\tau \Delta t^2}{2}.$$

Таким образом, для решения дифференциального уравнения второго порядка $x'' = f(t, x, x')$ можно использовать следующий набор соотношений:

$$x'_{i+1} = x'_i + f(t, x_i, x'_i)\,h\,; \qquad x_{i+1} = x_i + v_i h + \frac{f(t, x_i, x'_i)h^2}{2}. \qquad (3.2)$$

При решении систем дифференциальных уравнений второго порядка на каждом шаге интегрирования по времени можно считать постоянными все ускорения. Следовательно, комплект формул (3.2) должен быть записан для каждой искомой координаты.

Задача 3.1. Резиновый шар массы m = 0,5 кг, отвесно падая в жидкости, со скоростью v = 4 м/с ударяется об абсолютно твердое дно. Сила взаимодействия шара с дном изменяется по закону $F = kh^{3/2}$, где h – деформация шара; k – коэффициент пропорциональности, k = 5000 Н/м$^{3/2}$. Значение силы сопротивления среды, возникающей при движении шара, прямо пропорционально скорости центра масс шара и составляет 20 Н при скорости 1 м/с.

Определить наибольшую деформацию шара.

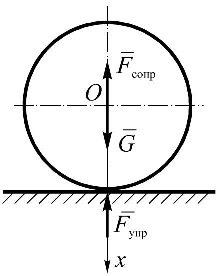

Рисунок 3.3

Решение. В процессе соударения на шар действуют сила тяжести $\bar{G}$, сопротивления $\bar{F}_{сопр}$ и упругой реакции $\bar{F}_{упр}$. При проецировании выражения основного закона динамики на ось Ox (рисунок 3.3) получаем

$$ma_x = G - F_{упр} - F_{сопр}. \qquad (3.3)$$

По условию сила сопротивления прямо пропорциональна скорости центра масс шара $F_{сопр} = \alpha v$. Причем при $v_1 = 1$ м/с $F_{сопр_1} = 20$ Н. Поэтому значение коэффициента $\alpha = \dfrac{F_{сопр_1}}{v_1} = 20\,\dfrac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$.

Подставляя выражения сил в (3.3), имеем

$$m\ddot{x} = mg - kx^{3/2} - \alpha\dot{x} \;\text{ или }\; \ddot{x} = g - \frac{k}{m}x^{3/2} - \frac{\alpha}{m}\dot{x}.$$

Таким образом, получено выражение вида $x'' = f(t, x, x')$, в котором

$$f(t, x, x') = g - \frac{k}{m}x^{3/2} - \frac{\alpha}{m}\dot{x}.$$

На рисунке 3.4 представлена программа для системы MathCAD, реализующая вычисление скорости v и пройденного пути x в зависимости от времени t с помощью формул (3.2).

Как известно, длительность удара весьма мала, поэтому в качестве шага принято значение h = 0,0001 с. В соответствии с условием значения скорости и координаты в начальный момент времени приняты равными $v_0 = 4$ м/с; $x_0 = 0$.

В результате работы программы построены графики изменения скорости v и координаты x от времени t. Из графика перемещения видно, что максимальная деформация шара составила 0,0543 м.

$k := 5000 \qquad m := 0.5 \qquad \alpha := 20$

$h := 0.0001$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ x_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i := 0 .. 399$

$t_i := h \cdot i$

$$\begin{bmatrix} v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_i + \left[9.8 - \frac{k}{m} \cdot \left(x_i \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha}{m} \cdot v_i \right] \cdot h \\ x_i + v_i \cdot h + \left[9.8 - \frac{k}{m} \cdot \left(x_i \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha}{m} \cdot v_i \right] \cdot \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}$$

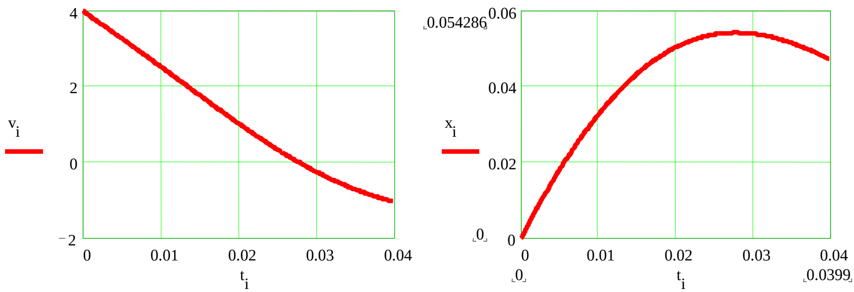

Рисунок 3.4

3.3 Метод Рунге-Кутта

Наибольшее распространение на практике получил метод Рунге-Кутта [6].

Для нахождения решения одного дифференциального уравнения первого порядка используется следующая система соотношений:

$$x_{i+1} = x_i + (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})\frac{h}{6},$$

где $$k_{1i} = f(t_i, x_i),\; k_{2i} = f(t_i + \frac{h}{2},\, x_i + \frac{hk_{1i}}{2}),$$

$$k_{3i} = f(t_i + \frac{h}{2},\, x_i + \frac{hk_{2i}}{2}),\; k_{4i} = f(t_i + h,\, x_i + hk_{3i}).$$

Метод Рунге-Кутта применим и к системам дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

при заданных начальных условиях: $x_1(t_0) = x_{1,0}, x_2(t_0) = x_{2,0}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n,0}$.

Формулы Рунге-Кутта для данного случая:

$$x_{m,i+1} = x_{m,i} + \frac{h}{6}(k_{1m,i} + 2k_{2m,i} + 2k_{3m,i} + k_{4m,i}),\; m = 1, ..., n,$$

где $$k_{1m,i} = f_m(t_i, x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}),$$

$$k_{2m,i} = f_m(t_i + \frac{h}{2},\, x_{1,i} + \frac{hk_{11i}}{2},\, x_{2,i} + \frac{hk_{12i}}{2}, \ldots,\, x_{n,i} + \frac{hk_{1ni}}{2}),$$

$$k_{3m,i} = f_m(t_i + \frac{h}{2},\, x_{1,i} + \frac{hk_{21i}}{2},\, x_{2,i} + \frac{hk_{22i}}{2}, \ldots,\, x_{n,i} + \frac{hk_{2ni}}{2}),$$

$$k_{4m,i} = f_m(t_1 + h,\, x_{1,i} + hk_{31i},\, x_{2,i} + hk_{32i}, \ldots,\, x_{n,i} + hk_{3ni}),$$

$$m = 1, ..., n.$$

На рисунке 3.5 представлен текст программы на языке “Паскаль”, реализующей алгоритм метода Рунге-Кутта. В него внесены комментарии, которые позволяют в случае необходимости быстро отладить программу для решения конкретной задачи.

При решении дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков, а также систем таких уравнений, их преобразуют в системы дифференциальных уравнений первого порядка. Например, дифференциальное уравнение второго порядка $x'' = f(t, x, x')$ с использованием подстановки $v = x'$ может быть представлено в виде системы двух дифференциальных

```
Program RungeKutt;     {Метод Рунге-Кутта решения нормальных систем}
uses crt,printer;      {дифференциальных уравнений}
var t,ft,nachotr,konotr,h:real;
   x,y,k1,k2,k3,k4,fx:array [1..10] of real;
   n,i:integer;

Procedure Funk;     {Между begin и end вставьте уравнения системы}
   Begin               {по образцу:}
   y[1]:=fx[2];
   y[2]:=-15*fx[2]-200*fx[1]-20000*fx[1]*fx[1]*fx[1];
                        {и т.д.
                        здесь y[1],y[2],y[3] и т.д. - производные
                        неизвестных функций, стоящие в левых частях
                        уравнений, fx[1], fx[2], fx[3] и т.д.- неиз-
                        вестные функции, ft - независимая
                        переменная}
   End;

Procedure Shag;
  Begin
   ft:=t;      for i:=1 to n do fx[i]:=x[i]; Funk;
               for i:=1 to n do k1[i]:=y[i];

   ft:=t+h/2;  for i:=1 to n do fx[i]:=x[i]+h*k1[i]/2; Funk;
               for i:=1 to n do k2[i]:=y[i];

   ft:=t+h/2;  for i:=1 to n do fx[i]:=x[i]+h*k2[i]/2; Funk;
               for i:=1 to n do k3[i]:=y[i];

   ft:=t+h/2;  for i:=1 to n do fx[i]:=x[i]+h*k3[i]; Funk;
               for i:=1 to n do k4[i]:=y[i];

   for i:=1 to n do x[i]:=x[i]+(h/6)*(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i]);
   End;

Begin clrscr;
    n:=2;                        {Число уравнений системы}
    nachotr:=0;                  {Введите начальное значение t}
    t:=nachotr;
    konotr:=0.6;                 {Введите конечное значение t}
    h:=0.03;                     {Введите шаг}
    for i:=1 to n do
    begin
     writeln('Введите начальное значение x[',i,']='); readln(x[i]);
    end;
    while t<=konotr+h do
     begin
     write(' t=',t:6:3);
    for i:=1 to n do
    begin
     write('   x[',i,']=',x[i]:7:4);
     end;
    writeln;
     Shag; t:=t+h;
 end; End.
```

Рисунок 3.5

уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x' = v; \\ v' = f(t, x, v). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта обладает достаточно высокой точностью для многих практических приложений. Для оценки ошибки метода и выбора шага при заданной ошибке метода обычно используют первую формулу Рунге:

$$\varepsilon h^{n+1} \le \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}\max\{|\, x_i - x_i^* \,|\; |\, i = 0,1,\ldots,n\},$$

где ε – ошибка метода;

h – шаг сетки, состоящей из $n + 1$ узла;

x_i и x_i^* – приближенные значения искомой функции $x(t)$, вычисленной в узле t_i при шагах h и $h/2$ соответственно.

Задача 3.2. Транспортные средства для защиты от чрезмерных амплитуд колебаний обычно снабжают демпферами, а смягчение ударов достигается постановкой пружин с нелинейными характеристиками. Например, пружинами, создающими силы упругости, пропорциональные смещениям в третьей степени.

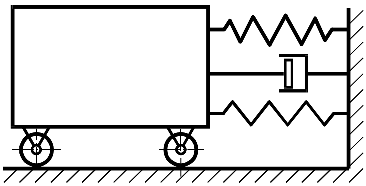

Рисунок 3.6

Пусть устройство массы m = 1 кг, изображенное на рисунке 3.6, соединено с неподвижной стенкой посредством пружины с коэффициентом жесткости c = 200 Н/м, демпфером с коэффициентом демпфирования α =

создающей силу упругости $F = kx^3$, где $k = 2\cdot 10^4$ Н/м^3. В начальный момент времени $x(0) = 10$ см, $x'(0) = 0$. Требуется получить значения функций $x(t)$ и $x'(t)$ в период $0 \le t \le 0{,}6$ с шагом 0,03 с.

Решение. Движение рассматриваемого устройства описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$mx'' + \alpha x' + cx + kx^3 = 0\,.$$

Сведем исходное дифференциальное уравнение к системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = v; \\ v' = -\dfrac{\alpha}{m}v - \dfrac{c}{m}x - \dfrac{k}{m}x^3. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Рунге-Кутта. Для этого применим программу, приведенную на рисунке 3.6. В процедуре **Funk** записаны выражения, соответствующие решаемой нами задаче, причем координате *x* соответствуют **fx[1]** и **y[1]**, а скорости *v* – **fx[2]** и **y[2]**.

При вводе исходных данных следует учесть, что в начальный момент времени *x*(0) = 0,1 м, и *v*(0) = 0. Поэтому после запроса программы **x[1]=** необходимо набрать **0,1**, а после **x[1]=** ввести **0**.

В результате работы программы получен ряд значений координаты и скорости, приведенных на рисунке 3.7.

```
t= 0.000   x[1]= 0.1000   x[2]= 0.0000
t= 0.030   x[1]= 0.0854   x[2]=-0.8636
t= 0.060   x[1]= 0.0553   x[2]=-1.0585
t= 0.090   x[1]= 0.0255   x[2]=-0.8952
t= 0.120   x[1]= 0.0025   x[2]=-0.6329
t= 0.150   x[1]=-0.0125   x[2]=-0.3732
t= 0.180   x[1]=-0.0203   x[2]=-0.1520
t= 0.210   x[1]=-0.0222   x[2]= 0.0132
t= 0.240   x[1]=-0.0201   x[2]= 0.1164
t= 0.270   x[1]=-0.0158   x[2]= 0.1637
t= 0.300   x[1]=-0.0107   x[2]= 0.1688
t= 0.330   x[1]=-0.0060   x[2]= 0.1471
t= 0.360   x[1]=-0.0020   x[2]= 0.1120
t= 0.390   x[1]= 0.0007   x[2]= 0.0736
t= 0.420   x[1]= 0.0024   x[2]= 0.0386
t= 0.450   x[1]= 0.0031   x[2]= 0.0108
t= 0.480   x[1]= 0.0031   x[2]=-0.0085
t= 0.510   x[1]= 0.0027   x[2]=-0.0196
t= 0.540   x[1]= 0.0020   x[2]=-0.0239
t= 0.570   x[1]= 0.0013   x[2]=-0.0232
t= 0.600   x[1]= 0.0007   x[2]=-0.0194
```

Рисунок 3.7

Полученный результат показывает, что колебания рассматриваемого устройства весьма быстро затухают. Уже через 0,5 с после начала движения их амплитуда уменьшается в 30 раз.

В системе MathCAD метод Рунге-Кутта реализован в специально разработанной команде ***rkfixed***. Об особенностях ее применения для выполнения различных расчетов можно прочитать, например, в [7].

4 ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задачи по динамике сложного движения точки рекомендуется решать, как правило, с применением принципа Даламбера [1]. Здесь рассмотрим пример решения такой задачи без введения сил инерции, с использованием основного закона динамики и теории кинематики сложного движения точки.

Задача 4.1 (рисунок 4.1). Трубка ОВ вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω = 8 рад/с. Угол, который она составляет с горизонталью, α = 50°. Расстояние *b* = 0,25 м. Относительно трубки перемещается шарик М массы *m* = 2 кг, связанный пружиной с концом трубки О. Длина недеформированной пружины $l_0 = 30$ см. Ее коэффициент жесткости *c* = 50 Н/м. Положение шарика по отношению к трубке определяется расстоянием *s*, причем в начальный момент времени $s_0 = 0{,}4$ м; $\dot{s}_0 = -0{,}2$ м/с.

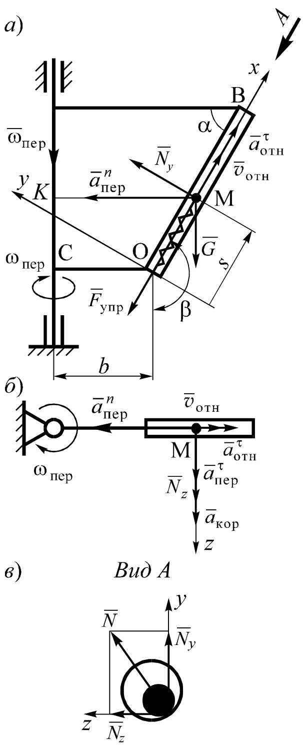

Рисунок 4.1

Определить законы относительного движения шарика и изменения силы его взаимодействия с трубкой.

Решение. Сразу заметим, что изображенная на рисунке система координатных осей *xyz* неподвижна в отличие от поворачивающейся вместе с трубкой системы отсчета расстояния *s*.

Движение материальной точки М описывается основным законом динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i \ . \qquad (4.1)$$

Поскольку абсолютное движение точки М является результатом сложения двух движений – вращения трубки ОВ вокруг оси O_1O_2 и перемещения шарика относительно трубки, то ее ускорение определяется формулой

$$\bar{a} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн} + \bar{a}_{кор} \ . \qquad (4.2)$$

Переносное движение — вращательное. Поэтому соответствующие ему составляющие ускорения определяются формулами:

$$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon_{пер} h\,; \ a^{n}_{пер} = \omega^2_{пер} h\,,$$

где $h = KM$ – расстояние от точки до оси вращения. Оно связано с переменным отрезком *s* = *OM* зависимостью

$$KM = OC + s\cos\alpha = b + s\cos\alpha\,. \qquad (4.3)$$

Из условия следует, что переносная угловая скорость $\omega_{\text{пер}} = \text{const}$, поэтому угловое ускорение $\varepsilon_{\text{пер}} = \dfrac{d\omega_{\text{пер}}}{dt} = 0$, и, соответственно, $a^{\tau}_{\text{пер}} = 0$.

Подставляя (4.3) в выражение переносного нормального ускорения, окончательно получаем:

$$a^{n}_{\text{пер}} = \omega^{2}_{\text{пер}}(b + s\cos\alpha)\,.$$

Вектор этого ускорения направлен к центру кривизны траектории переносного движения, то есть к точке K.

Относительным является движение точки по линии OB с переменной относительной скоростью. Поскольку его траекторией является прямая, то $a^{n}_{\text{отн}} = 0$. Относительное касательное ускорение есть вторая производная по времени от закона относительного движения *s*:

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = \ddot{s}\,. \qquad (4.4)$$

Приведенная формула отражает тот факт, что вектор $\overline{a}^{\tau}_{\text{отн}}$ является проекцией вектора полного ускорения в относительном движении на направление отсчета расстояния *s*. По этой причине направлен он должен быть *обязательно* в сторону увеличения координаты *s*, а изменение его направления на противоположное учитывается автоматически формулой (4.4).

Значение ускорения Кориолиса точки M определяется по формуле

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} v_{\text{отн}} \sin\beta\,, \qquad (4.5)$$

где β – угол между векторами $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ и $\overline{v}_{\text{отн}}$.

Направление вектора $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ определяется по правилу правого винта, а вектор $\overline{v}_{\text{отн}}$ на рисунке необходимо направить в сторону увеличения расстояния *s*, как и вектор $\overline{a}^{\tau}_{\text{отн}}$. Относительная скорость связана с координатой *s* соотношением:

$$v_{\text{отн}} = \dot{s}\,.$$

Из рисунка 4.1 видно, что $\beta = 90° - \alpha$. Поэтому получаем:

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}}\dot{s}\cos\alpha\,.$$

Направляется вектор $\overline{a}_{\text{кор}}$ в соответствии с *правилом Н. Е. Жуковского*. Вначале вектор относительной скорости $\overline{v}_{\text{отн}}$ проецируется на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения. Она изображена на рисунке 4.1, *б*. Затем полученная проекция поворачивается в этой же плоскости на 90° по направлению, соответствующему $\omega_{\text{пер}}$. Таким образом, в рассматриваемой задаче вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ направлен по оси *z*.

На шарик действуют силы тяжести $\bar{G}$, упругости $\bar{F}_{\text{упр}}$ и реакция поверхности трубки $\bar{N}$.

Шарик может касаться трубки в произвольном месте ее сечения, как это показано на виде А (см. рисунок 4.1, *в*). В связи с этим силу реакции поверхности удобно разложить на две составляющие $\bar{N}_y$ и $\bar{N}_z$.

Из всего вышесказанного следует, что уравнение (1.1) применительно к данной задаче может быть переписано в виде:

$$m\left(\bar{a}_{\text{пер}}^{n} + \bar{a}_{\text{отн}}^{\tau} + \bar{a}_{\text{кор}}\right) = \bar{G} + \bar{F}_{\text{упр}} + \bar{N}_y + \bar{N}_z \,.$$

Проецируя на оси изображенной на рисунке неподвижной декартовой системы координат, получаем

$$\begin{cases} m\left(-a_{\text{пер}}^{n}\cos\alpha + a_{\text{отн}}^{\tau}\right) = -G\sin\alpha - F_{\text{упр}}; \\ ma_{\text{пер}}^{n}\sin\alpha = N_y - G\cos\alpha; \\ ma_{\text{кор}} = N_z . \end{cases}$$

После подстановки значений ускорений и силы тяжести $G = mg$ находим:

$$\begin{cases} m\left(-\omega^2(b + s\cos\alpha)\cos\alpha + \ddot{s}\right) = -mg\sin\alpha - c(s - l_0); \\ m\omega^2(b + s\cos\alpha)\sin\alpha = N_y - mg\cos\alpha; \\ 2m\omega\dot{s}\cos\alpha = N_z . \end{cases} \qquad (4.6)$$

В первом уравнении только одна неизвестная величина – расстояние *s*. Для определения закона ее изменения следует решить получившееся дифференциальное уравнение. Преобразуем его, перенеся слагаемые с неизвестной функцией *s* в левую часть равенства:

$$m\ddot{s} + (c - m\omega^2\cos^2\alpha)s = -mg\sin\alpha + cl_0 + m\omega^2 b\cos\alpha \,.$$

Подставим заданные значения величин:

$$2\ddot{s} + (50 - 2\cdot 8^2\cdot\cos^2 50°)s = -2\cdot 9{,}8\cdot\sin 50° + 50\cdot 0{,}3 + 2\cdot 8^2\cdot 0{,}25\cdot\cos 50° ,$$

или $$2\ddot{s} - 2{,}89s = 20{,}55 \,. \qquad (4.7)$$

Получено неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. В соответствии с п. 2.2.1 искомая функция *s* в этом случае равна сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения уравнения (4.7):

$$s = \bar{s} + s^{*} .$$

Для определения функции $\bar{s}$ составим характеристическое уравнение:

$$2\lambda^2 - 2{,}89 = 0 .$$

Решая его, находим: $\lambda_1 = -1{,}20$; $\lambda_2 = 1{,}20$. Поскольку корни – действительные числа, то функция $\bar{s}$ в соответствии с таблицей 1 имеет вид:

$$\bar{s} = C_1 e^{-1,2t} + C_2 e^{1,2t} .$$

В правой части уравнения (2.6) число, являющееся полиномом нулевой степени. Среди корней характеристического уравнения нуля нет, поэтому частное решение ищем в виде $s^* = A$. Подставляя выражения s^* и $\ddot{s}^*$ в уравнение (4.7), получаем

$$-2{,}89A = 20{,}55 , \quad \text{откуда} \quad A = -7{,}11 .$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.7)

$$s = C_1 e^{-1,2t} + C_2 e^{1,2t} - 7{,}11 . \qquad (4.8)$$

Тогда относительная скорость шарика изменяется по закону

$$\dot{s} = -1{,}2C_1 e^{-1,2t} + 1{,}2C_2 e^{1,2t} . \qquad (4.9)$$

Для определения постоянных интегрирования подставим значение $t = 0$ в выражения (4.8):

$$s(0) = C_1 + C_2 - 7{,}11 ; \quad \dot{s}(0) = -1{,}2C_1 + 1{,}2C_2 .$$

Используя заданные значения s и s_0, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 7{,}11 = 0{,}4; \\ -1{,}2C_1 + 1{,}2C_2 = -0{,}2. \end{cases}$$

Решая ее, находим $C_1 = 3{,}84$; $C_2 = 3{,}67$.

Таким образом, искомый закон относительного движения материальной точки:

$$s = 3{,}84e^{-1,2t} + 3{,}67e^{1,2t} - 7{,}11 .$$

Для определения значения силы взаимодействия шарика со стенкой трубки воспользуемся вторым и третьим уравнениями системы (4.6). Из них находим:

$$N_y = m\omega^2 (b + s\cos\alpha)\sin\alpha + mg\cos\alpha; \quad N_z = 2m\omega\dot{s}\cos\alpha.$$

Подставляя заданные и ранее найденные значения величин, получаем выражения проекций искомой силы на оси координат:

$$N_y = -411{,}0 + 242{,}0e^{-1,2t} + 231{,}3e^{1,2t} ; \; N_z = -94{,}8e^{-1,2t} + 90{,}6e^{1,2t} .$$

Значение силы выражается через ее осевые составляющие формулой:

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика.– М.: Наука, 1991.– 638 с.

2 *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М.: Наука, 1981.– 448 с.

3 *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики.– СПб.: Издательство «Лань», 1998.– 736 с.

4 *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т.– М.: Наука, 1985. Т.2.– 560 с.

5 *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики.– М.: Высшая школа, 1995.– 416 с.

6 *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ.– М.: Мир, 1982.– 236 с.

7 MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95.– М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 1996.– 712 с.

Учебное издание

ШИМАНОВСКИЙ Александр Олегович
СЕМЕНТОВСКИЙ Александр Владиславович

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
Пособие для студентов технических вузов

Редактор О.В.Занина
Технический редактор В.Н.Кучерова
Корректор М.П.Дежко

Подписано в печать 28.09.2001 г. Формат бумаги 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага газетная. Гарнитура “Таймс”. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 2,79. Уч. изд. л. 2,63. Тираж 300 экз.
Зак. № 1721. Изд. № 3606.

Редакционно-издательский отдел БелГУТа, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛВ № 57 от 22.10.97 г.

Типография БелГУТа, 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛП № 360 от 26.07.99 г.