МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра автоматики и телемеханики

Ю. Ф. БЕРЕЗНЯЦКИЙ

ЗАДАНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Пособие для практических занятий по дисциплине «Теория дискретных устройств»

Гомель 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра автоматики и телемеханики

Ю. Ф. БЕРЕЗНЯЦКИЙ

ЗАДАНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Пособие для практических занятий
по дисциплине «Теория дискретных устройств»

Одобрено методической комиссией
электротехнического факультета

Гомель 2004

УДК 656.25-192
Б866

Р е ц е н з е н т – канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Микропроцессорная техника и информационно-управляющие системы» **Н.В. Рязанцева**

Березняцкий Ю.Ф.

Б866 Задание и минимизация функций алгебры логики: Пособие для практических занятий по дисциплине «Теория дискретных устройств». – Гомель: БелГУТ, 2004. – 44 с.

Рассматриваются вопросы задания и минимизации полностью и неполностью заданных функций алгебры логики при помощи законов алгебры логики, карт Карно, методами Квайна, Квайна–Мак-Класки и существенных переменных.

Предназначено для студентов электротехнического факультета и ФБО в качестве руководства по минимизации функций алгебры логики при выполнении практических занятий. Пособие также может использоваться студентами при выполнении курсового проекта по дисциплине «Теория дискретных устройств».

УДК 656.25-192

ВВЕДЕНИЕ

Современные системы автоматики, телемеханики и связи (АТ и С) имеют преимущественно электронное, микроэлектронное и микропроцессорное исполнение. Подавляющее большинство выпускаемых промышленностью и разрабатываемых систем АТ и С являются дискретными.

Поэтому для успешного усвоения принципов их функционирования и анализа работы необходимы знания в области теории дискретных устройств (ТДУ). ТДУ – это дисциплина, изучающая принципы анализа и синтеза устройств, построенных на базе дискретных элементов (ДЭ). Под дискретным элементом понимается минимальная совокупность деталей, объединенных в общую схему для выполнения заданной функции и меняющих свое выходное значение скачкообразно при определенном изменении входной величины. К простейшим ДЭ относятся реле, диоды, транзисторы, тиристоры и т.д.

Данное пособие дает основные навыки по применению основных аксиом и законов алгебры логики в ТДУ, что позволяет в конечном итоге реализовывать схемы дискретных устройств наиболее оптимальным образом.

1 ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Большая часть методов анализа и синтеза всех классов дискретных устройств основана на применении положений алгебры логики (АЛ) [1–4]. АЛ является разделом математической логики. В АЛ все операции проводятся с переменными, принимающими лишь два значения – «истина» и «ложь». Для теории дискретных устройств значение «истина» соответствует логической единице «1», а значение «ложь» – логическому нулю «0». Поэтому АЛ называют еще двухзначной или булевой, по фамилии ее основоположника ирландского математика Дж. Буля (1815–

1864) [3].

Возможность применения АЛ для синтеза и анализа реальных дискретных устройств (ДУ) обусловлена использованием в них двоичных сигналов и двустабильных элементов, имеющих два четко выраженных состояния. Например, состояние реле соответствует «1», если оно находится под током, а если реле обесточено – его состояние соответствует «0».

В теории дискретных устройств (ТДУ) часто оперируют таким понятием, как функция алгебры логики (ФАЛ) [1, 3, 4].

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ФАЛ в том случае, если она и ее переменные могут принимать лишь два взаимоисключающих значения «0» и «1».

Переменные ФАЛ (ее аргументы) сопоставляют со значениями сигналов на входах ДУ, а значения ФАЛ (ее результат) – со значениями сигналов на выходах ДУ.

Поскольку реальные ДУ имеют конечное число входов, то мы будем рассматривать функции конечного числа аргументов. Для n двоичных переменных x_1, x_2, …, x_n существует $k = 2^n$ наборов значений переменных и $R = 2^k$ различных ФАЛ. Например, для одного аргумента x_1 существует $k = 2^1 = 2$ набора переменных $\{x_1 = 0,\ x_1 = 1\}$ и $R = 2^2 = 4$ функции алгебры логики $f_0 = 0$ (константа нуль), $f_1 = 1$ (константа единица), $f_2 = x_1$ (повторение x_1) и $f_3 = \bar{x}_1$ (инверсия x_1, т.е. замена всех его значений на обратные).

Так как число аргументов и число значений каждого аргумента конечны, конечна и область определения любой ФАЛ.

2 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФАЛ

Существует множество способов задания ФАЛ. Среди них наиболее известны такие способы, как [1]:

1) табличный;
2) графический;
3) координатный (при помощи карт Карно);
4) числовой;
5) аналитический;
6) на основе диаграмм двоичного решения;
7) при помощи диаграмм Венна;
8) с использованием контактных схем.

Рассмотрим указанные способы задания подробнее.

2.1 Табличный способ

При этом способе ФАЛ задается таблицей зависимости выходных значений от входных наборов. Такая таблица называется таблицей истинности (ТИ). Для n аргументов ТИ содержится k = 2ⁿ строк (по числу наборов значений аргументов) и (n + 1) столбцов – по числу аргументов плюс один столбец значений функции. В ТИ каждому набору аргументов соответствует свое значение функции. Таблицы 2.1, 2.2 и 2.3 представляют собой ТИ от двух, трех и четырех аргументов соответственно.

Т а б л и ц а 2.1 – **ТИ двух аргументов**

x_1	x_2	f
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Т а б л и ц а 2.2 – **ТИ трех аргументов**

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

Т а б л и ц а 2.3 – **ТИ четырех аргументов**

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**

При этом таблица 2.1 содержит $k = 2^2 = 4$ строки, таблица 2.2 содержит $k = 2^3 = 8$ строк, а таблица 2.3 – $k = 2^4 = 16$ строк.

Для того чтобы задать все ФАЛ от n аргументов, необходимо построить $R = 2^{2^n} = 2^k$ таблиц истинности или объединить их в одну совокупную ТИ. Так, если число аргументов n = 2, то число наборов (количество строк в ТИ) будет $k = 2^2 = 4$, а количество ТИ для задания всех ФАЛ от двух переменных $R = 2^k = 2^4 = 16$. После объединения всех ФАЛ в одной совокупной ТИ, можно проследить основные характеристики взаимосвязи ФАЛ от двух переменных (таблица 2.4).

Одна половина функций в таблице 2.4 инверсна (обратна по значению) другой ($f_0 = \overline{f}_{15}$; $f_1 = \overline{f}_{14}$; $f_2 = \overline{f}_{13}$; ...; $f_7 = \overline{f}_8$) , остальные являются константами (f_0; f_{15}). Кроме того ряд функций аналогичен функциям от одной переменной ($f_3 = x_1$; $f_5 = x_2$; $f_{12} = \bar{x}_1$; $f_{10} = \bar{x}_2$), т.е. эти функции существенно не зависят от одного из аргументов. Если функция существенно не зависит от аргумента x_m, то выполняется условие $f(x) = \quad = f(x_1, x_2, \ ..., \ x_i, \ ..., \ 1, \ ..., \ x_k) = f(x_1, x_2, \ ..., \ x_i, \ ..., \ 0, \ ..., \ x_k)$, а аргумент x_m называют фиктивным.

Т а б л и ц а 2.4 – **ФАЛ двух аргументов**

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Обозначение		**X**	$\cdot$	Δ	**X**	Δ	**X**	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\propto$	$\overline{}$	$\rightarrow$	$\overline{}$	$\rightarrow$	$\vert$	**X**

Т а б л и ц а 2.5 – **ФАЛ с фиктивным аргументом**

x_1	x_2	f
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

В противном случае функция является существенно зависящей от аргумента x_m. Например, в таблице 2.5 аргумент x_1 является фиктивным, и функция существенно зависит от аргумента x_2.

Рассмотрим остальные ФАЛ в таблице 2.4:

f_1 – функция «И» (логическое умножение, конъюнкция). Обозначается $f_1 = x_1 \cdot x_2$, или $f_1 = x_1 \& x_2$, или $f_1 = x_1 \wedge x_2$. Данная функция будет равна нулю, если хотя бы один из ее аргументов равен нулю, и, равна единице только тогда, когда оба ее аргумента равны единице;

f_2 – запрет второго аргумента. Обозначается $f_2 = x_1 \Delta x_2$, или $f_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2$, или $f_2 = x_1 \overline{\rightarrow} x_2$;

f_4 – запрет первого аргумента. Обозначается $f_2 = x_2 \Delta x_1$, или $f_2 = \bar{x}_1 \cdot x_2$, или $f_2 = x_1 \overline{\leftarrow} x_2$;

f_6 – сумма по модулю два (функция неравнозначности). Обозначается

$f_6 = x_1 \oplus x_2$ èëè $f_6 = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$;

f_7 – функция «ИЛИ» (логическое сложение, дизъюнкция). Обозначается $f_7 = x_1 \vee x_2$ либо $f_7 = x_1 + x_2$. Данная функция будет равна нулю только в том случае, если оба ее аргумента равны нулю. Во всех остальных случаях она равна единице;

f_8 – функция «ИЛИ-НЕ» (функция Вебба). Она реализует операцию «стрелка Пирса». Обозначается $f_8 = x_1 \downarrow x_2$ èëè $f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$;

f_9 – эквивалентность (функция равнозначности). Обозначается $f_9 = x_1 \propto x_2$ èëè $f_9 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$;

f_{11} – импликация второго аргумента. Обозначается $f_{11} = x_1 \rightarrow x_2$ или $f_{11} = x_1 \vee \bar{x}_2$;

f_{13} – импликация первого аргумента. Обозначается $f_{13} = x_1 \leftarrow x_2$ или $f_{13} = \bar{x}_1 \vee x_2$;

f_{14} – функция «И-НЕ» (функция Шеффера). Она реализует операцию «штрих Шеффера». Обозначается $f_{14} = x_1 \mid x_2$ èëè $f_{14} = \overline{x_1 \cdot x_2}$.

Все приведенные в таблице 2.4 функции называются элементарными. Элементарные функции позволяют реализовать на их основе сколь угодно сложное логическое (дискретное) устройство.

Табличный способ задания ФАЛ является достаточно универсальным, однако он обладает тем недостатком, что при большом числе аргументов ТИ становится излишне громоздкой.

2.2 Графический способ

Данный способ задания ФАЛ основан на сопоставлении наборам значений переменных ФАЛ точек *n*-мерного пространства. При этом множество наборов 2^n определяет число вершин *n*-мерного единичного квадрата или куба, которым приписаны значения функции на этих наборах. Куб или квадрат называют единичным, так как каждое их ребро соединяет вершины, наборы которых различаются только одной переменной.

ФАЛ задается единичным квадратом, если она зависит от двух переменных. Так, например, для таблицы 2.1 ФАЛ можно задать в виде квадрата, показанного на рисунке 2.1.

ФАЛ задается единичным кубом,

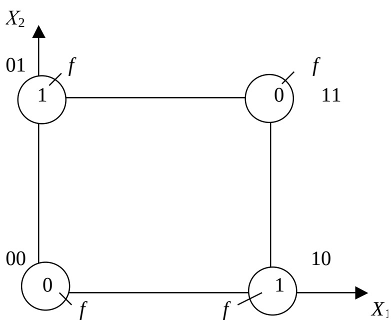

Рисунок 2.1 – Единичный квадрат

если она зависит от трех аргументов. Так для таблицы 2.2 ФАЛ будет задана кубом, показанным на рисунке 2.2.

Графический способ задания ФАЛ является достаточно наглядным, однако он может быть использован при двух и трех аргументах, реже четырех или пяти. Как правило, если число аргументов функции более трех, то используют другие способы задания ФАЛ.

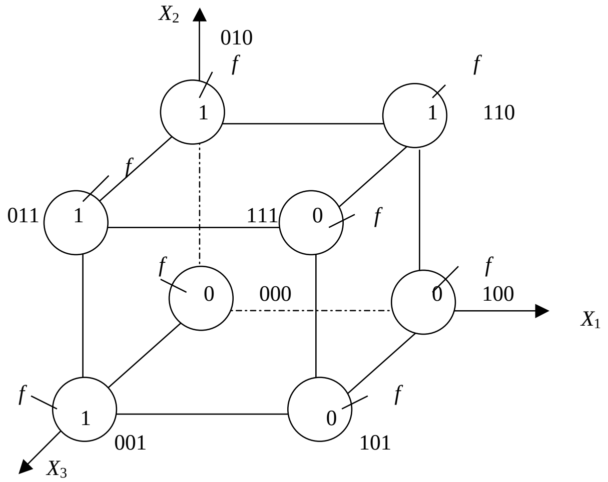

Рисунок 2.2 – Единичный куб

2.3 Координатный способ

При координатном способе ФАЛ задается в виде координатной карты состояний (карты Карно). Карта состояний представляет собой прямоугольную таблицу, разделенную на клетки. Общее число клеток карты равно числу наборов функции $k = 2^n$, а все переменные ФАЛ разделяются на определяющие строки и определяющие столбцы карты.

На пересечении строки и столбца расположена клетка, в которую записываются значения ФАЛ на выбранном наборе переменных. Разделение переменных на группы выполняется таким образом, чтобы в соседних клетках наборы различались значением лишь одной переменной.

Приведем примеры карт Карно, соответствующих таблицам 2.1, 2.2 и 2.3. Для таблицы 2.1 карта Карно имеет $k = 2^2 = 4$ клетки. Она представлена на рисунке 2.3.

Как видно из рисунка 2.3 для каждого аргумента карта состояний разбивается на две части. Одна

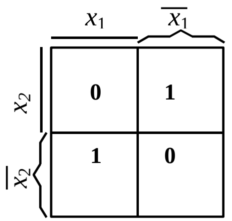

Рисунок 2.3 – Карта Карно для двух переменных

половина карты соответствует прямому значению аргумента (под прямой чертой), а другая – инверсному его значению (под фигурной скобкой).

Для таблицы 2.2 карта состояний должна иметь $k = 2^3 = 8$ клеток. Она представлена на рисунке 2.4. Карта увеличивается в два раза при увеличении количества аргументов на единицу.

При четырех переменных карта Карно имеет $k = 2^4 = 16$ клеток. Для таблицы 2.3 она имеет вид, показанный на рисунке 2.5.

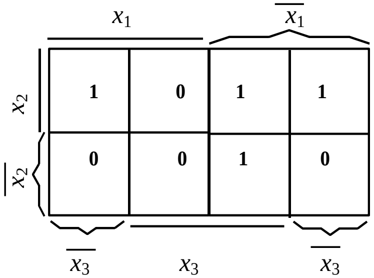

Рисунок 2.4 – Карта Карно для трех переменных

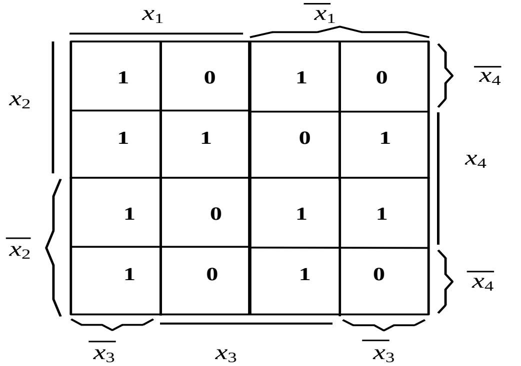

Рисунок 2.5 – Карта Карно для четырех переменых

Карта для пяти переменных содержит $2^5 = 32$ клетки. При этом общая карта состоит как бы из двух четырехмерных подкарт, расположенных одна над другой. Практически такой вариант неприемлем, поэтому подкарты располагают в одной плоскости (рисунок 2.6). Подкарта 1 располагается под прямым значением переменной x_5, а подкарта 2 – под инверсным значением этой переменной.

		x_5	x_5	x_5	x_5	$\overline{x_5}$	$\overline{x_5}$	$\overline{x_5}$	$\overline{x_5}$	
		x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	
x_2		**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	$\overline{x_4}$
x_2		**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	x_4
$\overline{x_2}$		**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	x_4
$\overline{x_2}$		**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	$\overline{x_4}$
		$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	

Рисунок 2.6 – Карта Карно для пяти аргументов

Координатный способ задания ФАЛ, наряду с табличным, находит очень широкое применение. Однако он имеет недостаток, связанный с ограничением числа переменных. Обычно координатный способ используется при числе переменных до четырех, реже – до пяти, шести.

2.4 Числовой способ

При числовом способе задания ФАЛ каждому набору переменных ставится в соответствие определенное число в двоичной системе исчисления и присваивается ему соответствующий десятичный номер. Функция задается в виде десятичных номеров, на которых она принимает единичные (первый вариант числового задания) или нулевые (второй вариант числового задания) значения.

Так, например, для таблицы 2.1 по первому варианту ФАЛ будет записана следующим образом: $f = \{1, 2\}_{x1x2}$, а по второму варианту – $f = \wedge\{0, 3\}_{x1x2}$. Для таблицы 2.2 числовая запись ФАЛ по первому варианту имеет вид $f = \{1, 2, 3, 6\}_{x1x2x3}$, по второму варианту – $f = \wedge\{0, 4, 5, 7\}_{x1x2x3}$, а для таблицы 2.3 (первый вариант) $f = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15\}_{x1x2x3x4}$ и $f = \wedge\{0, 4, 7, 10, 11, 14\}_{x1x2x3x4}$ (второй вариант). Знак «$\wedge$» во втором варианте записи указывает на то, что используются наборы нулевых значений функции.

В приведенных выражениях в фигурных скобках через запятую записаны в порядке возрастания номера наборов, на которых ФАЛ равна «1» (счет ведется с нуля). Сразу же за фигурными скобками проставляются в виде индексов аргументы ФАЛ, начиная со старшего разряда.

Данный способ задания ФАЛ является одним из наиболее простых, однако, его недостаток – слабая наглядность.

2.5 Аналитический способ

При данном способе ФАЛ задается в виде алгебраического выражения, получаемого при применении каких-либо логических операций к переменным.

Алгебраическое выражение показывает, какие логические операции должны выполняться над аргументами функции, и какова должна быть их последовательность.

Например, применяя операции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции можно задать функцию $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_3x_4$ или функцию $f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_4\left(x_1 \vee \overline{\bar{x}_2 x_3}\right)$.

Недостаток данного способа в отсутствии наглядности, а преимущество – в возможности применения математического аппарата для операций с переменными.

2.6 Задание ФАЛ с использованием диаграмм двоичного решения

Диаграмма двоичного решения является разновидностью корневого ориентированного графа. Она обеспечивает полное, краткое и простое описание сложных цифровых функций. На рисунке 2.7 приведена диаграмма двоичного решения для функции $f = x_2 \vee x_1 x_0$.

На рисунке 2.7 прямоугольники с цифрами **0** и **1** соответствуют окончательным значениям ФАЛ. Узлы, обозначенные кружками, соответствуют переменным, от которых зависит ФАЛ, а цифры у ветвей – значениям этих переменных. Диаграммы двоичного решения широко используются для анализа сложных функций, формирования тестов, задач верификации и т.д.

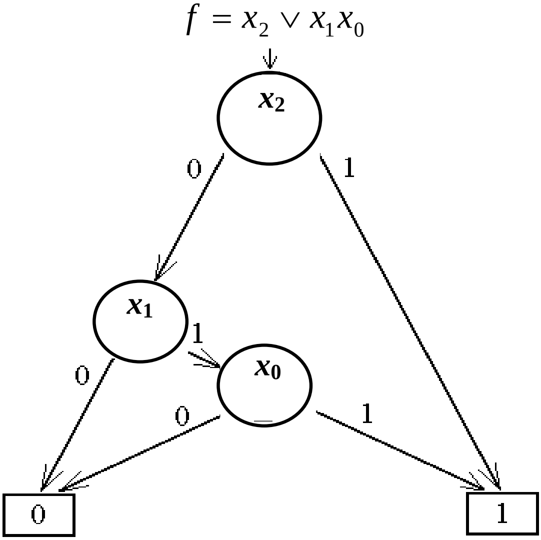

Рисунок 2.7 – Диаграмма двоичного решения для функции $f = x_2 \vee x_1 x_0$

2.7 Задание ФАЛ при помощи диаграмм Венна

Диаграммы Венна, названные по имени священника Джона Венна [3], применявшего их в исследованиях по логике, являются графическим представлением, демонстрирующим соотношения между множествами. На основе соответствия между теорией булевой алгебры и теорией множеств диаграммы Венна очень полезны для визуального представления аксиом и законов булевой алгебры, однако их не следует использовать для построения доказательств тождеств, поскольку большинство общих положений эти диаграммы показать не могут. На рисунке 2.8 приведены диаграммы Венна для констант «0», «1» и элементарных функций логического умножения, сложения и инверсии. Область, ограниченная кружком на рисунке, соответствует одной переменной. На рисунке 2.9 представлена диаграмма Венна для функции $f = x_0 x_1 \vee x_2$.

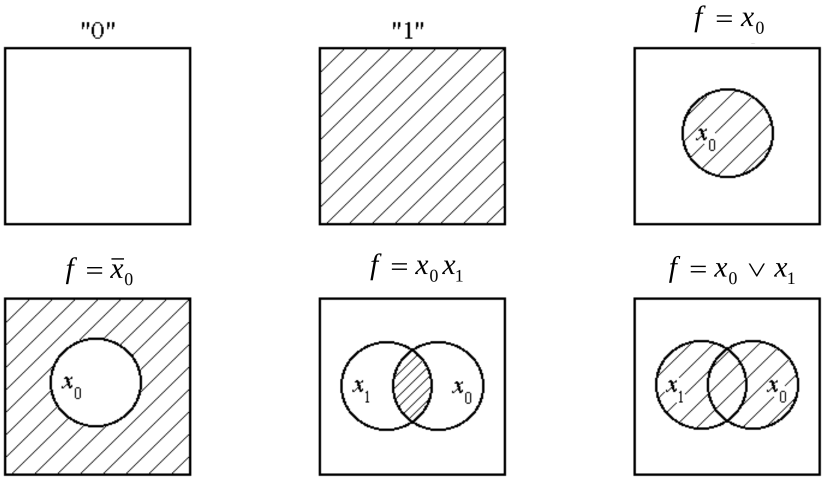

Рисунок 2.8 – Диаграммы Венна некоторых элементарных функций

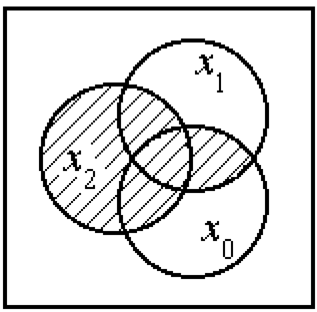

Рисунок 2.9 – Диаграмма Венна для функции $f = x_0 x_1 \vee x_2$

2.8 Задание ФАЛ с использованием контактных схем

Контактная схема может рассматриваться как техническая модель логических выражений. Одну из первых моделей предложил в 1910 году физик *П.С. Эренфест* [3], в которой использована аналогия между высказываниями и электрическими контактами, поскольку и те и другие имеют двоичную природу. На рисунке 2.10 приведены контактные модели для констант **0, 1** и элементарных функций логического умножения, сложения и инверсии. Обозначение $U_{ип}$ на рисунках указывает на положительный полюс источника питания.

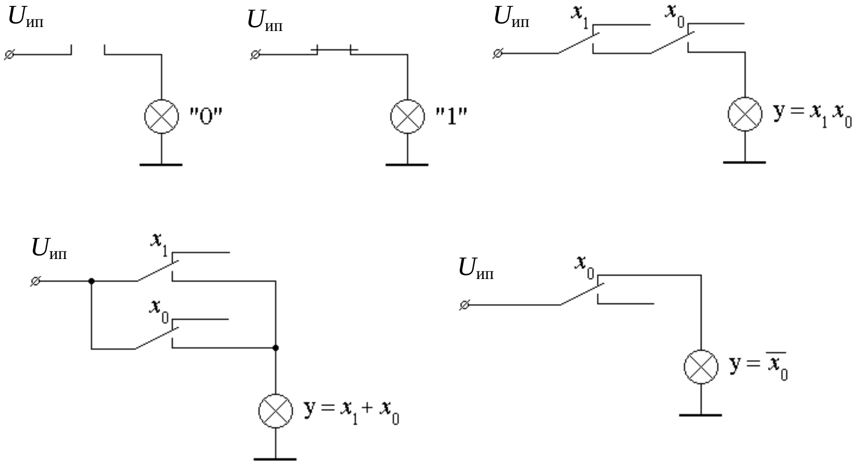

Рисунок 2.10 – Контактные модели элементарных функций

На рисунке 2.11 представлена реализация на контактах функции $f = x_0 x_1 \vee x_2$.

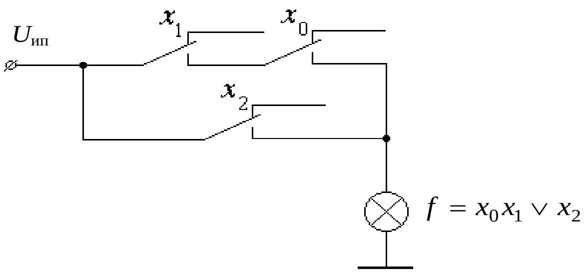

Рисунок 2.11 – Контактная модель
функции трех переменных

3 КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФАЛ

При минимизации ФАЛ часто приходится представлять исходные выражения в нормальном (каноническом) виде, т.е. пользоваться так называемыми каноническими формами ФАЛ [1]. Рассмотрим их подробнее.

К каноническим (общепринятым) формам представления ФАЛ относятся:

1) ДНФ (дизъюнктивная нормальная форма);
2) СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма);
3) КНФ (конъюнктивная нормальная форма);
4) СКНФ (совершенная конъюнктивная нормальная форма).

Определение. Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция (логическое умножение) любого числа различных независимых переменных, входящих в данную конъюнкцию с инверсией или без нее не более одного раза. Например, $Z\bar{Y}$, XYZ, $\bar{X}Y\bar{Z}$, $\bar{X}\,\bar{Z}$, $\bar{Z}$.

Определение. Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция (логическое сложение) любого числа различных независимых переменных, входящих в данную дизъюнкцию с инверсией или без нее не более одного раза. Например, $X \vee Y$; $\bar{X}$; $\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z$; $\bar{X} \vee Z$; $Z \vee X \vee Y$.

Определение. Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция любого числа элементарных конъюнкций. Например, $f = x \vee yz \vee \bar{y}x \vee xyz \vee \bar{x}\,\bar{z}$; $f = x_1 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3$.

Совершенная ДНФ содержит в каждом члене все аргументы или инверсии заданной функции.

Например, $f = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}$; $f = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Определение. Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция любого числа элементарных дизъюнкций. Например, $f = (x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee z)$; $f = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$.

Совершенная КНФ содержит в каждой скобке все аргументы или их инверсии.

Например $f = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$; $f = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$.

Формы СДНФ и СКНФ используются в процессе синтеза ДУ для перехода от табличной формы представления функций алгебры логики к аналитической, а также являются базовыми для различных методов минимизации, особенно связанных с применением персональных компьютеров.

Для получения СДНФ по ТИ необходимо проанализировать значение функции на всех наборах аргументов. Каждое единичное значение функции дает один член (одну конъюнкцию) в формуле СДНФ. Все члены (все конъюнкции) соединяются между собой знаками дизъюнкции. Таким образом, число конъюнкций равно числу единиц в значении функции в ТИ.

Каждая конъюнкция состоит из произведения аргументов функции, а каждый аргумент в формуле записывается без инверсии, если в ТИ он равен единице, или с инверсией, если в ТИ он равен нулю.

Например для таблицы 3.1, СДНФ будет иметь следующий вид: $f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$. Для перехода от ДНФ к СДНФ необходимо добавить к каждому члену (конъюнкции) недостающие аргументы, используя закон дополнительности до единицы. Например,

$$f = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_3 = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_3(x_1 \vee \bar{x}_1)(x_2 \vee \bar{x}_2) =$$
$$= x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Таблица 3.1 – **ТИ**

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

Форма ДНФ является упрощенной, т.е. позволяет построить схему с меньшим числом элементов, чем при форме СДНФ.

При переходе от СДНФ к ДНФ можно использовать для упрощения формулы законы АЛ или любые другие способы минимизации функций.

Форма СКНФ также получается по ТИ. В СКНФ присутствует столько скобок, сколько нулей имеет функция в ТИ. Каждая скобка соединяется знаком конъюнкции.

Для получения аргументов в скобках используются следующие правила.

1) Если значение аргументов в ТИ равно нулю, то в формуле этот аргумент записывается без инверсии.

2) Если же в ТИ значение аргумента равно единице, то он записывается в формулу с инверсией.

Все аргументы в скобке соединяются между собой знаками дизъюнкции. Для таблицы 3.1 СКНФ будет иметь следующий вид:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Для перехода от КНФ к СКНФ необходимо, используя законы и правила АЛ (в основном закон дополнительности до нуля), добавить к каждому члену (в каждой скобке) недостающий аргумент.

Например, $f = (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) =$

$$=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) =$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Большая часть методов минимизации ориентирована на получение минимальной дизъюнктивной нормальной формы (МДНФ).

Определение. Число переменных, входящих в конъюнкцию дизъюнктивной нормальной формы, называется рангом конъюнкции. Для

СДНФ ранг конъюнкции равен числу аргументов функции.

Определение. Две конъюнкции называются соседними, если они различаются значением только одной переменной. Например, $x_1x_2x_3$ и $x_1\bar{x}_2x_3$.

Определение Конъюнкция (n – 1) переменной, полученная в результате склеивания соседних конъюнкций (конституентов) по закону склеивания $xy \vee x\bar{y} = x$, называется минтермом (n – 1) ранга; конъюнкция (n – i) переменных, полученная склеиванием соседних минтермов [n – (i –1)]-го ранга, называется минтермом (n – i)-го ранга.

Например, в выражении $f = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$ после применения закона склеивания получатся следующие минтермы 2-го ранга: x_1x_2; $x_2\bar{x}_3$; $\bar{x}_1x_2$; x_2x_3, и функция после первой итерации применения закона склеивания будет состоять из дизъюнкции минтермов 2-го ранга $f = x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2x_3$. Применив закон склеивания к полученной функции второй раз, получим минтерм 1-го ранга x_2. Причем, этот минтерм будет реализовывать ту же ТИ, что и исходная функция, т.е. $f = x_2$.

Определение. Конституенты (минтермы) функции, к которым не применима операция склеивания, называются простыми или первичными импликантами.

Определение. Простой импликант называется существенным, если он образован склеиванием таких конституентов, что по крайней мере для одного из них эта операция была единственной.

Определение. ДНФ ФАЛ, составленная из простых импликантов, некоторые члены которой могут быть избыточными и удалены без нарушения эквивалентности исходной функции, называется сокращенной.

Определение. ДНФ ФАЛ называется тупиковой, если ни один ее член не может быть удален без нарушения эквивалентности исходной функции. К минтермам тупиковой ДНФ (ТДНФ) операция склеивания неприменима.

Определение. ТДНФ называется минимальной, если она содержит наименьшее число вхождений переменных по сравнению с другими ТДНФ. Минимальная форма функции обязательно содержит существенные импликанты.

Можно выделить два направления в решении задачи минимизации.

Первое состоит в отыскании простых импликантов, построении из них тупиковых форм и определении путем перебора минимальной ДНФ.

Второе направление заключается в нахождении всех существенных импликантов, отыскании недостающих для реализации заданной функции простых импликантов и построении ТДНФ.

Каждое из обоих направлений включает целый ряд методов. Рассмотрим некоторые из них.

4 МИНИМИЗАЦИЯ ФАЛ

4.1 Общие положения

При разработке ДУ обычно возникает задача оптимизации их структуры, т.е. получения экономичной и надежной технической реализации [2, 3]. Это означает, что из двух схем ДУ, выполняющих одинаковые функции, следует выбирать ту, которая содержит меньшее число элементов, а при одинаковом числе элементов – ту, суммарное число входов используемых элементов которой будет наименьшим.

Решение этой задачи связано с проблемой минимизации (упрощения, сокращения) ФАЛ, реализующих данное ДУ.

Минимизация – это процесс нахождения такого эквивалентного выражения ФАЛ, которое содержит минимальное число вхождений переменных. При минимизации могут быть различные варианты: получение выражений с минимальным числом инверсных переменных либо с минимальным числом вхождений какой-либо одной переменной и т.д.

Для минимизации функций и поиска наиболее экономичной схемы, реализующей заданное выражение, до сих пор не найдено эффективных алгоритмов, позволяющих решать эти задачи целенаправленно и быстро. Гарантированно найти минимальное выражение для произвольной функции можно лишь методом полного перебора вариантов различных способов группировки в процессе минимизации, а это реально осуществимо лишь при небольшом числе аргументов. С ростом их числа сложность минимизации и поиска экономичной схемы растет экспоненциально и очень скоро становится не под силу ни человеку, ни ЭВМ.

С точки зрения подходов к упрощению логических выражений функции, с которыми имеет дело схемотехник, удобно разделить на три группы: функции малого числа аргументов; «объективные» функции многих аргументов и «субъективные» функции многих аргументов.

К первой группе можно отнести функции двух–пяти аргументов. Статистический анализ реальных схем цифровой аппаратуры показывает, что разработчики в подавляющем большинстве случаев сталкиваются именно с необходимостью реализовывать именно такие функции. Благодаря малому числу переменных таблицы таких функций короткие, вариантов группировки при минимизации не слишком много, хорошо работает наиболее наглядное геометрическое представление, и в общем, минимизация таких функций любым способом серьезных проблем не вызывает.

Ко второй группе – громоздких «объективных» функций – относятся функции более пяти переменных, которые были получены не человеком, а отражают некую объективную природную зависимость. Для этих функций характерно следующее. Во-первых, в них не заложено какой-либо простой логической закономерности, которую можно угадать и использовать для минимизации, т.е. таблица такой функции это просто некая случайная последовательность единиц и нулей. Во-вторых, в силу значительного числа переменных полный перебор вариантов при любом способе поиска минимальной или любой другой экономичной формы практически неосуществим. И, в-третьих, что самое важное, из теоремы О.Б. Лупанова об оценке сложности функций следует, что с ростом числа аргументов доля экономичных по оборудованию функций стремится к нулю, т.е. почти все функции оказываются неупрощаемыми. Следовательно, задача поиска минимальных форм «объективных» функций многих аргументов не только сложна и громоздка, но и с большой вероятностью безнадежна. Это учитывают изготовители элементов, выпуская для реализации функций многих переменных специальные микросхемы – программируемые логические матрицы (ПЛМ) и постоянные запоминающие устройства (ПЗУ). При использовании наиболее распространенных простых вариантов ПЛМ реализация функций будет самой экономичной по затратам аппаратуры, если функция приведена не к минимальной, а к кратчайшей форме. Если же при минимизации ДНФ самую короткую форму получить не удалось, то проигрыш оказывается небольшим, поскольку стоимость реализации на ПЛМ каждой элементарной конъюнкции ДНФ невелика – 1/50 стоимости корпуса. Одной из целей освоения промышленностью ПЛМ как раз и была экономия труда разработчиков схем.

При использовании ПЗУ на них реализуется непосредственно ТИ функции, т.е. ни записи ФАЛ, ни тем более ее минимизации не требуется вообще.

К третьей группе – «субъективных» функций многих аргументов - относятся функции, составленные человеком. Особенность их связана с понятием декомпозиции. Это значит, что сложная ФАЛ разбивается на более простые составляющие, из минимальных форм которых в конечном итоге строится аппаратная реализация ДУ. Однако декомпозиция может быть выполнена неудачно, и устройство в результате будет неэффективным. Для того чтобы избежать этого существуют специальные методы декомпозиции, которые позволяют получать приемлемый результат.

Рассмотрим методы минимизации в применении к первой группе функций как наиболее часто и повсеместно встречающихся.

Если значение ФАЛ однозначно определено на всех возможных наборах значений ее аргументов, то она называется полностью определенной (заданной). Если же на некоторых наборах значение функции является безразличным и однозначно не определено, то такая функция называется неполностью или частично заданной.

В соответствии с этим разделим и методы минимизации (упрощения) ФАЛ на две группы: методы минимизации полностью заданных ФАЛ и методы минимизации неполностью заданных ФАЛ.

4.2 Минимизация полностью заданных ФАЛ

4.2.1 Минимизация на основе использования законов алгебры логики

При минимизации ФАЛ с использованием законов булевой алгебры, функция должна быть представлена в аналитическом виде.

Для получения минимальной ФАЛ пользуются аксиомами и законами АЛ, которые позволяют упростить исходное выражение (приложение В).

Например, для упрощения первой функции применяются распределительный закон, законы дополнительности и нулевого множества.

$$f_1 = \left(x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2\right)x_2\bar{x}_1 \vee x_1 = x_1\bar{x}_2x_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2x_2\bar{x}_1 \vee x_1 = 0 \vee 0 \vee x_1 = x_1 .$$

Для упрощения второй функции используют закон двойственности (правило де Моргана), распределительный закон, законы дополнительности и поглощения.

$$f_2 = \left(\overline{x_1x_2}x_1\right) \vee x_2 = \left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\right)x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1x_1 \vee \bar{x}_2x_1 \vee x_2 = \bar{x}_2x_1 \vee x_2 =$$

$$= \overline{\overline{\bar{x}_2x_1}\bar{x}_2} = \overline{\left(x_2 \vee \bar{x}_1\right)\bar{x}_2} = \overline{x_2\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} = x_1 \vee x_2 .$$

4.2.2 Минимизация при помощи карт Карно

Функция представляется при помощи карты Карно. При этом для любой клетки карты существует соседняя по строке и столбцу, такая что координаты этой клетки отличаются от координат рассматриваемой клетки значением лишь одной переменной. Это свойство позволяет выполнять на карте минимизацию функций, отображая процесс склеивания соседних конституентов и минтермов, соответствующих клеткам карты, путем построения различных объединений клеток.

Минимальные выражения могут быть получены как на основе ДНФ, так и на основе КНФ. Если требуется получить выражение на базе ДНФ, то в карте учитываются клетки с единицами, а если на основе КНФ, то – с нулями.

Правила объединения в контуры при минимизации для ДНФ:

1) все единицы должны быть заключены в прямоугольные контуры;
2) во всех клетках контура должны быть только единицы;
3) число клеток в контуре должно быть кратным степени числа два (1, 2, 4, 8, 16, 32);
4) контуры могут накладываться друг на друга;
5) контуры, все клетки которых уже вошли в другие контуры, являются лишними;
6) для получения наиболее простой формулы надо выбирать контуры с

максимально возможным числом клеток;

7) каждому контуру соответствует конъюнкция, составленная из переменных, значения которых не изменяются во всех клетках контура, т.е. конъюнкций будет столько, сколько в карте контуров.

При составлении конъюнкций контуров для каждого контура рассматривается вхождение всех аргументов.

Если контур пересекает (захватывает) как прямое, так и инверсное значение аргумента, то этот аргумент в конъюнкцию не входит.

Если же контур захватывает только прямое или только инверсное значение аргумента, то аргумент или его инверсия входит в конъюнкцию (значение, которое захватывается контуром и входит в конъюнкцию).

После получения конъюнкций для всех контуров эти конъюнкции объединяются друг с другом знаком дизъюнкции. В результате получается выражение минимизированной ФАЛ.

Рассмотрим некоторые примеры.

На карте, показанной на рисунке 4.1, удалось выделить два контура. Это значит, что в упрощенном выражении должно быть две элементарные конъюнкции. Для контура, обозначенного цифрой 1, в конъюнкции будет отсутствовать переменная x_2, так как она входит в первый контур прямым и инверсным значением, и останется лишь переменная $\bar{x}_1$. Для контура, обозначенного цифрой 2, в конъюнкции будет отсутствовать переменная x_1 по той же причине, а в конъюнкции останется $\bar{x}_2$, так как захватывается только инверсное значение переменной. Объединив полученные конъюнкции для обоих контуров знаками дизъюнкции, получим выражение упрощенной функции $f = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

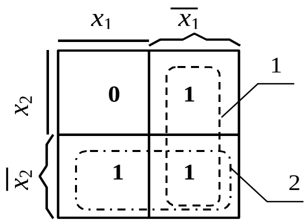

Рисунок 4.1 – Пример выделения единичных контуров для Карты Карно с двумя переменными

На карте Карно, представленной на рисунке 4.2, получено три контура.

Клетки карты, которые при ее условном «сворачивании» могут образовывать прямоугольные контуры с числом клеток кратным степени числа два, также могут объединяться в контуры. Примером такого объединения является контур под номером 3.

Упрощенная функция будет иметь три конъюнкции, соответственно числу контуров. При этом в

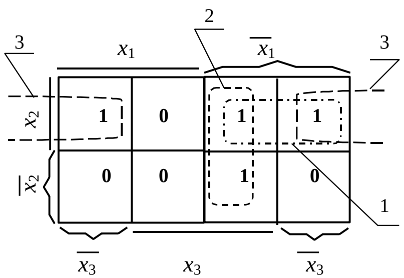

Рисунок 4.2 – Пример выделения единичных контуров для карты Карно с тремя переменными

конъюнкции для 1-го контура будет отсутствовать переменная x_3, в конъюнкции для 2-го контура – переменная x_2, а в конъюнкции для 3-го контура – переменная x_1. Получим упрощенную функцию $f=\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_1x_3\vee x_2\bar{x}_3=$
$=\bar{\tilde{o}}_1\left(\tilde{o}_2\vee\tilde{o}_3\right)\vee\tilde{o}_2\bar{\tilde{o}}_3$.

На карте, представленной на рисунке 4.3, выделено четыре контура. При этом контур 3 образован при условном «сворачивании» карты Карно в «цилиндр» в горизонтальной плоскости, а контур 4 – при «сворачивании» карты в «шар». Функция состоит из суммы четырех элементарных конъюнкций $f=\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_4\vee\bar{x}_3\bar{x}_4=\bar{x}_1\left(\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_4\right)\vee\bar{x}_3\bar{x}_4$.

Наиболее часто карты Карно используются для упрощения ФАЛ от двух, трех и четырех переменных. Однако существует возможность использовать карты Карно для упрощения функций от пяти и шести переменных.

Правила минимизации такие же, как и для 2 – 4-х переменных. Однако правила объединения в контуры имеют дополнение для того случая, когда контуры выделяются в обеих подкартах. В один и тот же контур в разных подкартах могут объединяться только те клетки или их группы, которые располагаются точно друг над другом, если подкарты мысленно расположить одну над другой (рисунок 4.4). Так, для карты, представленной на рисунке 4.5, получаем четыре контура и следующую формулу упрощенной функции алгебры логики $f=\bar{x}_1x_4\vee x_1x_2\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_5$.

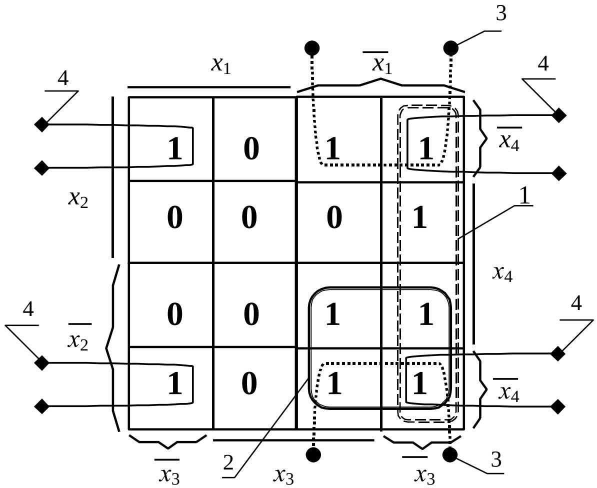

Рисунок 4.3 – Пример выделения единичных контуров для карты Карно с четырьмя переменными

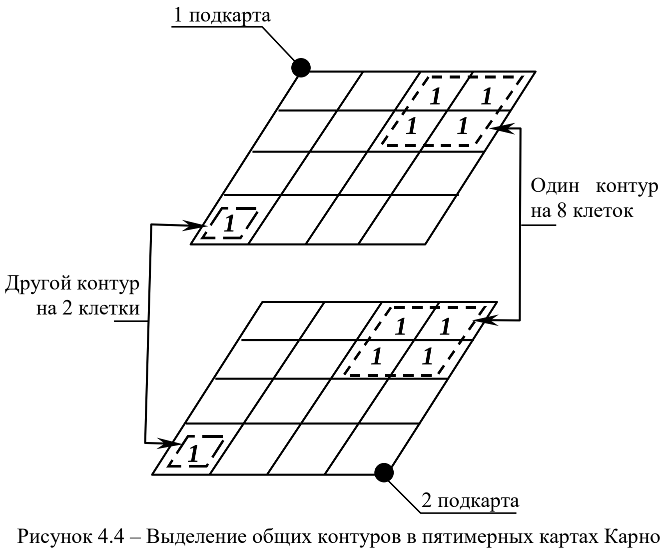

Рисунок 4.4 – Выделение общих контуров в пятимерных картах Карно

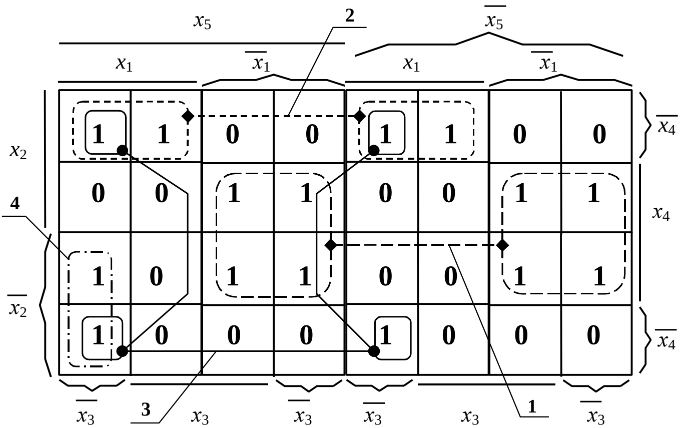

Рисунок 4.5 – Пример выделения единичных контуров
для карты Карно на пять переменных

Правила объединения в контуры при минимизации для КНФ:

1) все нули должны быть заключены в прямоугольные контуры;
2) во всех клетках контура должны быть нули;
3) число клеток в контуре должно быть кратным степени числа два (1, 2, 4, 8 , 16, 32);
4) контуры могут накладываться друг на друга;
5) контуры, все клетки которых уже вошли в другие контуры, являются лишними;
6) для получения наиболее простой формулы надо выбирать контуры с максимально возможным числом клеток;
7) каждому контуру соответствует скобочное выражение (скобка), состоящее из дизъюнкции переменных, значения которых не изменяются во всех клетках контура, т.е. скобок будет столько, сколько в карте контуров.

При составлении внутрискобочных дизъюнкций для каждого контура последовательно рассматривается вхождение всех переменных.

Если контур захватывает как прямое, так и инверсное значение аргумента, то этот аргумент в скобочную дизъюнкцию не входит. В том случае, если контур захватывает только инверсное или только прямое значение аргумента, то аргумент или его инверсия входит в дизъюнкцию.

Все полученные скобки объединяются между собой знаками конъюнкции. Это и будет минимальная ФАЛ. Причем, в отличие от случая с единицами, если аргумент входит в контур без инверсии, то в скобке он должен ставиться с инверсией и наоборот.

Рассмотрим пример на карте Карно для четырех переменных для той же функции, которая была представлена на рисунке 4.3. Выделение контуров с нулями представлено на рисунке 4.6. Для рассматриваемого рисунка получаем три контура с нулями, которым соответствуют три скобочные дизъюнкции $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$ и $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$. Объединив полученные скобки знаками конъюнкции, получаем формулу упрощенной ФАЛ на основе КНФ $f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

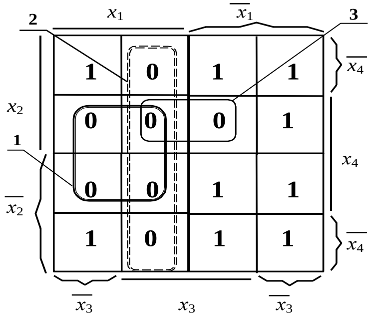

Рисунок 4.6 – Пример выделения контуров с нулями для карты Карно с четырьмя переменными

Проверка правильности полученных при минимизации функций осуществляется путем подстановки в полученную функцию всех наборов аргументов и сравнения ТИ для неупрощенной и упрощенной ФАЛ.

Наиболее часто карты Карно используются для упрощения ФАЛ от двух, трех и четырех переменных. Однако существует возможность использовать каты Карно для минимизации ФАЛ от пяти и шести аргументов.

Метод карт Карно при минимизации неудобен тем, что его трудно запрограммировать на ЭВМ, так как отсутствует четкий алгоритм его реализации и необходим нестандартный подход.

В результате упрощения методом карт Карно может быть получена ТДНФ (трудно поддающаяся дальнейшему упрощению) либо окончательно минимальная форма ФАЛ.

4.2.3 Минимизация методом Квайна

Метод Квайна имеет четко сформулированный алгоритм осуществления отдельных операций и поэтому может быть использован для реализации на ЭВМ [4].

Для проведения минимизации этим методом требуется достаточно много времени ввиду необходимости попарного сравнения друг с другом каждого члена логической функции. При минимизации по методу Квайна предполагается, что исходная функция задана в СДНФ.

Суть метода в следующем.

1 Осуществляется переход от канонической формы записи ФАЛ (СДНФ) к сокращенной на основе формулы склеивания

$$WX \vee W\overline{X} = W, \qquad (4.1)$$

где W – одинаковая часть выражения в обеих конъюнкциях формулы,

X – переменная, которая в разных конъюнкциях имеет противоположные значения.

2 Выполняется переход от сокращенной формы ФАЛ к минимальной с применением формулы поглощения

$$WY \vee W = W \,, \tag{4.2}$$

где Y – часть конъюнкции, которая в одной конъюнкции присутствует, а в другой отсутствует.

Рассмотрим упрощение ФАЛ методом Квайна на примере. Пусть ФАЛ задана табличным способом (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – **ТИ функции**

Номер набора	Аргументы функции				Значения функции	Номер набора	Аргументы функции				Значения функции
	x_1	x_2	x_3	x_4	f		x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	**1**	8	1	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**1**	9	1	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**0**	10	1	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**0**	11	1	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**	12	1	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**0**	13	1	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**1**	14	1	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**1**	15	1	1	1	1	**1**

Запишем СДНФ функции, заданной ТИ. В формуле каждую конъюнкцию пронумеруем соответственно ее порядковому номеру в ТИ. Нумерация нужна для отслеживания попарного перебора всех конъюнкций на предмет применения правила склеивания.

$$f = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{0} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4}_{1} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{4} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4}_{6} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4}_{7} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{8} \vee$$

$$\vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4}_{9} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_3\bar{x}_4}_{14} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_3 x_4}_{15}.$$

На первом этапе, в полученной формуле, сравниваем попарно все конъюнкции (минтермы четвертого ранга) и применяем там, где это возможно, правило склеивания. Склеиванию могут подвергаться только те конъюнкции, которые различаются инверсией лишь одной переменной. Для рассматриваемой функции склеиваются соответственно 0 и 1, 0 и 4, 0 и 8, 1 и 9, 4 и 6, 6 и 7, 6 и 14, 7 и 15, 8 и 9, 14 и 15 конъюнкции. Склеенные минтермы четвертого ранга отмечаются номерами под каждым минтермом третьего ранга с целью отследить, все ли исходные конъюнкции подверглись склеиванию. После первой итерации склеивания получена сокращенная функция из минтермов третьего ранга.

$$f=\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{0-1}\vee\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4}_{0-4}\vee\underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{0-8}\vee\underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3x_4}_{1-9}\vee\underbrace{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4}_{4-6}\vee\underbrace{\bar{x}_1x_2x_3}_{6-7}\vee\underbrace{x_2x_3\bar{x}_4}_{6-14}\vee\underbrace{x_2x_3x_4}_{7-15}\vee$$

$$\vee\underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{8-9}\vee\underbrace{x_1x_2x_3}_{14-15}.$$

По номерам под минтермами проверяем, все ли исходные минтермы четвертого ранга склеились. Так как в полученной формуле присутствуют номера всех исходных конъюнкций, то это означает, что все они подверглись первичному склеиванию. В том случае, если номер какой-то исходной конъюнкции отсутствует в преобразованной формуле, эта конъюнкция должна быть введена в эту формулу через знак дизъюнкции во избежание искажения результата функции.

Далее, если это возможно, к минтермам функции, имеющим одинаковый ранг, снова применяется правило склеивания. В полученной функции склеиванию подвергаются соответственно минтермы третьего ранга 0–1 и 8–9, 0–8 и 1–9, 6–7 и 14–15, 6–14 и 7–15. В результате образуются минтермы второго ранга. При этом минтермы 0–4 и 4–6 не подвергаются склеиванию с другими минтермами. Поэтому они присутствуют в сокращенной форме функции.

$$f=\underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3}_{0-1/8-9}\vee\underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3}_{0-8/1-9}\vee\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4}_{0-4}\vee\underbrace{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4}_{4-6}\vee\underbrace{x_2x_3}_{6-7/14-15}\vee\underbrace{x_2x_3}_{6-14/7-15}.$$

Анализируя полученную формулу, можно заметить, что минтермы $\bar{x}_2\bar{x}_3$ и x_2x_3 в формуле повторяются и, согласно закону повторения, повторяющиеся члены могут быть удалены из формулы. Если больше склеить ничего не удается, то на этом первый этап упрощения заканчивается.

На втором этапе составляется так называемая импликантная таблица или таблица поглощений (перекрытий). Данная таблица позволяет упростить применение правила поглощения и одновременно отследить, все ли исходные конъюнкции (импликанты) учитываются в упрощенном выражении.

В импликантную таблицу (таблица 4.2) входят все исходные конъюнкции (в столбцах) и все конъюнкции, подвергшиеся склеиванию на последнем этапе (в строках), включая те, которые не склеились (если они имеются). В таблице на пересечении строки и столбца, к минтермам которых может быть применено правило поглощения, ставится отметка.

После проставления всех отметок выбираются ядра (ядро) упрощенной функции.

Ядро функции – это та сокращенная импликанта, которая единолично перекрывает какие-либо столбцы таблицы (т.е. в этих столбцах стоит только одна отметка).

Упрощенная функция может иметь несколько ядер или не иметь их вообще. Если функция имеет ядро(а), то оно(и) должно(ы) обязательно присутствовать в минимальной формуле. Если функция не имеет ядра, то условно за ядро принимается та сокращенная импликанта, которая является наиболее простой и одновременно перекрывает как можно больше столбцов исходных импликант функции.

Рассматриваемая функция имеет два ядра. Это обе минтермы второго ранга $\bar{x}_2\bar{x}_3$ и x_2x_3. Все отметки ядер (как первого, так и второго) сносятся в строку перекрытий импликантной таблицы. После этого выполняется проверка: все ли клетки строки перекрытий заполнены. Если заполнены все клетки, то результатом упрощения исходной функции будет дизъюнкция ядер. В противном случае ищутся дополнения к ядрам для заполнения всей строки перекрытий. Для упрощаемой функции осталась одна незаполненная клетка, поэтому необходимо искать дополнение.

Дополнение – это та сокращенная импликанта, которая позволяет оптимальным образом заполнить оставшиеся клетки строки перекрытий. Дополнения необходимо выбирать таким образом, чтобы они были как можно проще (имели меньшее количество переменных) и одновременно перекрывали как можно больше незаполненных клеток строки перекрытий. При этом формула упрощенной функции будет состоять из ядер(а) и дополнений(я).

Так как дополнений может быть несколько, то и формула упрощенной функции может быть различна. Формула упрощенной функции может различаться только дополнениями.

В рассматриваемом варианте функции возможны два варианта дополнения: либо $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, либо $\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$, так как отметки от той и другой импликанты позволяют перекрыть незаполненную клетку.

Т а б л и ц а 4.2 – **Таблица перекрытий**

№ п/п	Упрощенные импликанты	Исходные импликанты								
		$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
1	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	***V***	***V***				***V***	***V***		
2	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	V		V						
3	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$			V	V					
4	x_2x_3				**V**	**V**			**V**	**V**
Строка перекрытий		***V***	***V***	V	**V**	**V**	***V***	***V***	**V**	**V**

Примечания:

1 Овалом выделены те упрощенные импликанты, которые составляют ядро функции.

2 Сплошными линиями показаны направления переноса отметок поглощения в строку перекрытий от ядер функции.

3 Штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно показаны направления переноса отметок перекрытия от первого и второго вариантов дополнений функции.

4 Отметки первого ядра показаны в таблице жирным и наклонным шрифтом, отметки второго ядра показаны жирным шрифтом, а отметки дополнений – обычным шрифтом.

За конечный вариант упрощенной функции принимается тот, в котором меньше всего дополнений и они минимальны по количеству вхождений переменных или по количеству инверсий переменных. В данном случае более оптимальным по количеству инверсий переменных является дополнение $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$.

Таким образом, получаем упрощенный методом Квайна вариант функции $f = \text{ядра} + \text{дополнение} = x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$.

Метод Квайна обладает одним существенным неудобством, которое связано с необходимостью полного попарного сравнения членов СДНФ. При этом с ростом числа членов растет и число сравнений в факториальной зависимости. В 1956 г. Мак-Класки предложил модернизировать метод Квайна, что позволило уменьшить число сравнений. Усовершенствованный метод получил название метода минимизации Квайна–Мак-Класки. Рассмотрим идею данного метода более детально.

4.2.4 Минимизация методом Квайна–Мак-Класки

Суть метода в следующем [1]. Члены СДНФ записываются в виде их двоичных номеров. Все номера разбиваются на группы по числу единиц в них. При этом в i-ю группу входят все номера, которые имеют в своем двоичном коде количество единиц равное i. Затем выполняется попарное сравнение членов соседних по номеру групп (т.е. реализуется закон склеивания по отношению к кодовым комбинациям), так как только члены этих групп отличаются лишь в одном разряде. При образовании членов с рангом (числом единиц) выше нулевого в разряды, соответствующие исключенным переменным, пишется знак тире (прочерк). В остальном методика не отличается от метода Квайна.

Рассмотрим тот же пример, что и для метода Квайна. Имеем функцию

$$f = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{0} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4}_{1} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{4} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4}_{6} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4}_{7} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{8} \vee$$

$$\vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4}_{9} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_3\bar{x}_4}_{14} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_3 x_4}_{15}.$$

Перепишем данную функцию, подставив вместо ее инверсных аргументов «0», а вместо неинверсных – «1» и получим

$$f = \underbrace{0000}_{0} \vee \underbrace{0001}_{1} \vee \underbrace{0100}_{4} \vee \underbrace{0110}_{6} \vee \underbrace{0111}_{7} \vee \underbrace{1000}_{8} \vee \underbrace{1001}_{9} \vee \underbrace{1110}_{14} \vee \underbrace{1111}_{15}.$$

Разобьем номера функции на группы по числу единиц (таблица 4.3).

После разбиения на группы выполняется сравнение соседних групп. При сравнении отыскиваются те пары кодов, которые отличаются одним разрядом на соответствующих позициях. Тот разряд, которым кодовые комбинации различаются, заменяется прочерком, а полученная комбинация записывается в ту из сравниваемых групп, которая имела меньший номер (таблица 4.4). После первого сравнения полученные члены разложения первого ранга также сравниваются между собой. Таких сравнений может быть как меньше, так и больше двух. Это зависит от величины кодовой комбинации и возможностей склеивания комбинаций. В сравнении участвуют только те комбинации, в которых прочерки находятся на одинаковых позициях. Если какие-либо комбинации не подверглись склеиванию, то их вес не уменьшается, и они остаются на своем месте в группе.

Таблица 4.3 – **Разбиение функции на группы**

Номер группы	Члены группы
0	0000
1	0001, 0100, 1000
2	0110, 1001
3	0111, 1110
4	1111

Таблица 4.4 – **Таблица склеивания соседних групп**

Номер группы	Члены группы	Члены разложения первого ранга	Члены разложения второго ранга
0	0000	000–, 0–00, –000	–00–, 0–00
1	0001, 0100, 1000	–001, 01–0, 100–	01–0
2	0110, 1001	011–, –110	–11–
3	0111, 1110	–111, 111–	
4	1111		

Далее, аналогично таблице 4.2, строится таблица поглощений (таблица 4.5), в которую входят все исходные коды (в столбцах) и все коды после последнего склеивания (в строках).

Как видим, получена таблица поглощений, похожая на ту, которая была образована в методе Квайна. Отличие таблицы состоит лишь в том, что вместо импликант, в ней записаны кодовые комбинации. Запишем упрощенное выражение функции аналогично тому, как это было сделано в методе Квайна: $f =$ ÿäðà + äîïîëíåíèå $=$
$= (-00-) \vee (-11-) \vee (01-0)$.

Заменим символы нуля и единицы соответствующими им аргументами и получим окончательное выражение упрощенной функции методом Квайна–Мак-Класки – $f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$.

Т а б л и ц а 4.5 – **Таблица поглощений**

№ п/п	Коды	**0000**	**0001**	**0100**	**1000**	**0110**	**1001**	**0111**	**1110**	**1111**
1	**–00–**	***V***	***V***		***V***		***V***			
2	**0–00**	V		V						
3	**01–0**			V		V				
4	**–11–**					**V**		**V**	**V**	**V**
Строка перекрытий		***V***	***V***	V	***V***	**V**	***V***	**V**	**V**	**V**

Примечания:

1 Овалом выделены те сокращенные коды, которые составляют ядро функции.

2 Штрихпунктирными и сплошными линиями показаны соответственно направления переноса отметок поглощения в строку перекрытий от первого и второго ядер функции.

3 Штриховой линией показано направление переноса отметки перекрытия от дополнения функции.

4 Отметки первого ядра показаны в таблице жирным и наклонным шрифтом, отметки второго ядра показаны жирным шрифтом, а отметки дополнений – обычным шрифтом.

4.3 Минимизация частично заданных ФАЛ

Если ФАЛ однозначно определена на всех возможных наборах значений ее аргументов, то она называется полностью заданной (полностью определенной) [1]. Если же на некоторых наборах значение функции является безразличным и однозначно не определено, то такая функция называется неполностью (частично) определенной (заданной).

Для обозначения «безразличного» значения функции используются различные символы. При табличном, координатном и графическом способах задания ФАЛ в местах неопределенных значений проставляются знаки: «~» (тильда), «*» (звездочка) или «–» (тире), а при аналитическом способе используется знак равнозначности «$^{a}\!/_{0}$».

Минимизация частично заданных функций имеет некоторые особенности, с которыми мы далее познакомимся. Упрощать неполностью заданные ФАЛ можно с использованием карт Карно, методов Квайна, Квайна–Мак-Класки, существенных переменных и др.

4.3.1 Минимизация частично заданных ФАЛ картами Карно

Использование карт Карно для минимизации частично заданных ФАЛ является наиболее удобным и простым.

При составлении карт Карно для неполностью заданной функции в клетках, соответствующих координатам неиспользованных входных наборов проставляются звездочки (прочерки, тильды). Клетки со звездочками (прочерками, тильдами) при необходимости включаются в контуры как вместе с «1» (при получении формулы на базе ДНФ), так и вместе с «0» (при получении формулы на базе КНФ). При этом выражение функции после минимизации оказывается более простым. Рассмотрим, например, карту Карно для четырех переменных, представленную на рисунке 4.7. В том случае, если при ее минимизации не учитывать безразличные состояния, то будет получена функция, образованная тремя контурами (на рисунке показаны сплошными линиями) $f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2\left(x_3 \vee x_4\right) \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

Эта функция значительно упростится, если использовать безразличные состояния при выделении контуров. При этом образуется всего лишь один контур (на рисунке показан штриховой линией). Результирующая функция $f = \bar{x}_2$.

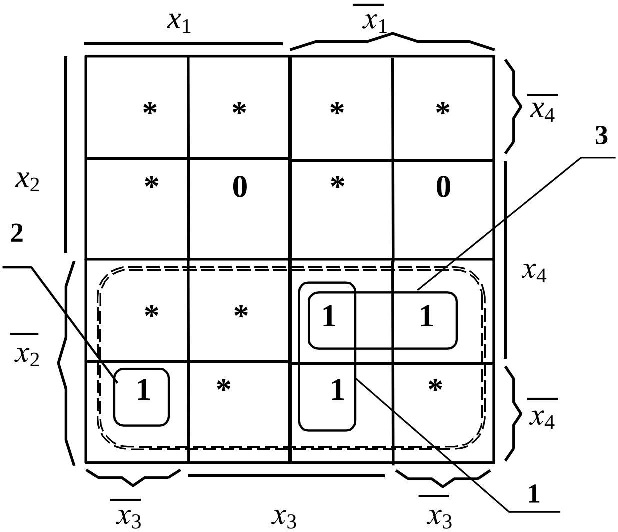

Рисунок 4.7 – Упрощение функции четырех переменных

4.3.2 Минимизация частично заданных ФАЛ методами Квайна и Квайна–Мак-Класки

При упрощении неполностью заданных ФАЛ методами Квайна и Квайна – Мак-Класки необходимо выполнить следующие этапы.

1 Из частично заданной функции f получить полностью заданную функцию f_0 посредством замены на нуль безразличных состояний функции f.

2 Из той же частично заданной функции f получить новую полностью заданную функцию f_1 путем замены на единицу безразличных состояний функции f.

3 Упростить функцию f_1 обычным путем (как это описано в пп. 4.2.3 или 4.2.4 данного пособия).

4 Составить таблицу перекрытий между элементарными конъюнкциями функции f_0 и упрощенной функции f_1 и по этой таблице выбрать окончательную минимальную форму частично заданной функции f .

Рассмотрим процесс минимизации частично заданной функции, заданной таблицей 4.6, методом Квайна.

Т а б л и ц а 4.6 – **ТИ частично заданной функции *f***

Номер набора	Входные переменные			Значения функции
	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	*
1	0	0	1	**0**
2	0	1	0	**1**
3	0	1	1	*
4	1	0	0	**1**
5	1	0	1	*
6	1	1	0	*
7	1	1	1	**1**

Реализуем описанные этапы минимизации. Получим из неполностью заданной функции f две полностью заданные f_0 и f_1 и запишем их в таблицу 4.7 наряду с функцией f.

Т а б л и ц а 4.7 – **ТИ функций *f*, f_0 и f_1**

Номер набора	Входные переменные			Значения функций		
	x_3	x_2	x_1	f	f_0	f_1
0	0	0	0	*	**0**	**1**
1	0	0	1	**0**	**0**	**0**
2	0	1	0	**1**	**1**	**1**
3	0	1	1	*	**0**	**1**
4	1	0	0	**1**	**1**	**1**
5	1	0	1	*	**0**	**1**
6	1	1	0	*	**0**	**1**
7	1	1	1	**1**	**1**	**1**

Упростим полностью заданную функцию f_1. Для этого запишем СДНФ этой функции $f_1 = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2 x_1 \vee x_3 x_2\bar{x}_1 \vee x_3 x_2 x_1$.

Выполним склеивание конъюнкций полученной СДНФ.

$$f_1 = \bar{x}_3\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_2 x_1 \vee x_3\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_3 x_2 =$$
$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_3 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 .$$

В результате склеивания получены три минтерма первого ранга $\bar{x}_1$, x_2 и x_3. Все эти минтермы образуют ядро функции f_1, и поэтому можно сразу записать результат минимизации $f_1^{min} = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Далее строим таблицу 4.8, в которой отражается результат перекрытия между конъюнкциями упрощенной функции f_1^{min} и функции f_0.

Т а б л и ц а 4.8 – **Таблица перекрытий функций f_0 и f_1^{min}**

f_1^{min}	f_0		
	$\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1$	$x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$	$x_3 x_2 x_1$
$\bar{x}_1$	$\vee$	$\vee$	
x_2	$\vee$		$\vee$
x_3		$\vee$	$\vee$

Анализируя варианты перекрытий минтермами функции f_1^{min} импликант функции f_0, можно получить три варианта упрощения неполностью заданной функции f. Первый из них – это $\bar{x}_1 \vee x_2$, второй – $\bar{x}_1 \vee x_3$ и третий – $x_2 \vee x_3$. Наиболее оптимальным следует считать третий вариант, так как в нем отсутствует инверсия переменной. Таким образом, запишем результат минимизации $f_{min} = x_2 \vee x_3$.

В таблицах перекрытий между функциями возможны также случаи, когда один или несколько минтермов функции f_1^{min} не перекрывает ни одной из импликант функции f_0. В таком случае эти минтермы не войдут в конечную минимальную формулу.

4.3.3 Минимизация методом существенных переменных

Метод существенных переменных основан на сопоставлении разрешенных наборов значений переменных, на которых ФАЛ принимает единичное значение, с запрещенными наборами, на которых ФАЛ принимает нулевое значение. В том случае, если хотя бы на одном наборе переменных выполняется неравенство $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \neq f(\bar{x}_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$, переменная x_i является существенной. При минимизации неполностью заданных функций методом существенных переменных необходимо пройти следующие пять этапов [1].

1-й этап. Построение таблицы существенных переменных. Таблица должна содержать n строк – по числу разрешенных наборов функции, m столбцов – по числу запрещенных наборов и столбец остатков, в который записываются существенные переменные по результатам сравнения разрешенных наборов строк с запрещенными наборами столбцов.

2-й этап. Заполнение таблицы существенных переменных. Для этого попарно сравнивают разрешенный набор строки с каждым запрещенным набором столбца. В клетку таблицы заносятся те переменные, по которым рассматриваемая пара наборов различается между собой, и с теми значениями, которые переменные имеют в разрешенном наборе.

3-й этап. Обработка таблицы существенных переменных. Она проводится построчно в следующем порядке:

а) определяются те клетки, которые содержат по одной переменной. Эти переменные обводятся кружком и записываются в столбец остатков в виде конъюнкции. Все члены строки, которые содержат переменные, записанные в столбец остатков, отмечаются знаком дизъюнкции «$\vee$» и исключаются из рассмотрения;

б) среди членов строки, не отмеченных знаком «$\vee$», выделяется переменная, встречающаяся наиболее часто. Она обводится кружком и приписывается со знаком конъюнкции в столбец остатков к имеющимся там переменным. Члены строки, содержащие данную переменную, отмечаются знаком «$\vee$» и исключаются из рассмотрения. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в строке останутся неотмеченными только клетки, содержащие неповторяющиеся переменные или переменные, повторяющиеся одинаковое число раз;

в) оставшиеся неотмеченными неповторяющиеся переменные или повторяющиеся одинаковое число раз соединяются знаком дизъюнкции, заключаются в скобки и через знак конъюнкции приписываются в столбец остатков к имеющимся там существенным переменным.

4-й этап. Построение таблицы покрытий существенных переменных. Эта таблица аналогична импликантной таблице в методе Квайна. Ее столбцы соответствуют разрешенным наборам, а строки – конъюнкциям существенных переменных, полученных для каждой строки таблицы существенных переменных. Если одним из членов конъюнкции в столбце остатков является дизъюнкция переменных, то осуществляется преобразование по распределительному закону (раскрываются скобки).

5-й этап. Обработка таблицы покрытий. Обработка выполняется, как и обработка импликантной таблицы: проставляются отметки в тех столбцах таблицы, наборы которых покрываются данной комбинацией существенных переменных, т.е. эта комбинация образована в результате сравнения соответствующего разрешенного набора с запрещенными наборами.

Этот метод минимизации следует использовать при большом числе переменных.

Рассмотрим реализацию данного метода на конкретном примере. Пусть неполностью определенная функция задана таблицей 4.9.

Т а б л и ц а 4.9 – **Неполностью заданная ФАЛ четырех переменных**

Номер набора	x_1	x_2	x_3	x_4	f	Номер набора	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	**1**	8	1	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	*	9	1	0	0	1	*
2	0	0	1	0	**0**	10	1	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**0**	11	1	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**	12	1	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**0**	13	1	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	*	14	1	1	1	0	*
7	0	1	1	1	*	15	1	1	1	1	*

Анализируя данные таблицы, определяем, что в ней имеется 5 разрешенных (0, 4, 8, 12 и 13) наборов и 5 запрещенных (2, 3, 5, 10 и 11). Остальные наборы являются неиспользуемыми.

1-й этап. Составим таблицу существенных переменных (таблица 4.10).

Т а б л и ц а 4.10 – **Таблица существенных переменных**

Разрешенные наборы	Запрещенные наборы					Остатки
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$						
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$						
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$						
$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$						
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$						

2-й этап. Заполним таблицу существенных переменных (таблица 4.11). Для этого поочередно сравним разрешенный набор каждой строки со всеми запрещенными наборами. В клетках на пересечении разрешенного и запрещенного наборов записываем несовпадающие элементы в таком виде, как они представлены в разрешенном наборе.

Т а б л и ц а 4.11 – **Заполненная таблица существенных переменных**

Разрешенн ые наборы	Запрещенные наборы					Остатки
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_2\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_4$	$x_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3$	x_1	$x_2\bar{x}_3x_4$	$x_2\bar{x}_3$	

3-й этап. Обрабатываем таблицу существенных переменных (таблица 4.12). Определяем клетки, содержащие по одной переменной, обводим их кружком и записываем в столбец остатков. Отмечаем знаком «$\vee$» те члены строки, в которые входят обведенные кружком переменные, и исключаем их из дальнейшего рассмотрения.

Т а б л и ц а 4.12 – **Заполненная таблица существенных переменных**

Разрешенн ые наборы	Запрещенные наборы					Остатки
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$\bar{x}_2\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_3\ \vee$	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$\bar{x}_3$
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$\bar{x}_4$
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_3\ \vee$	$x_1\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$\bar{x}_3$
$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_4$	$x_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4\ \vee$	$x_1x_2\bar{x}_3\ \vee$	x_1	$x_2\bar{x}_3x_4$	$x_2\bar{x}_3$	x_1

Среди членов строк, не отмеченных знаком «$\vee$», выделяем наиболее часто встречающуюся переменную, обводим ее кружком и дописываем со знаком конъюнкции в столбец остатков (таблица 4.13). Члены строки с выделенной переменной отмечаем знаком «$\vee$» и исключаем из рассмотрения.

Т а б л и ц а 4.13 – **Заполненная таблица существенных переменных**

Разрешенн ые наборы	Запрещенные наборы					Остатки
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$			$\bar{x}_2\ \bar{x}_4$			$\bar{x}_3$
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_2\cdot\bar{x}_3$			$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\ \vee$		$\bar{x}_4\bar{x}_3$
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$			$x_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4$			$\bar{x}_3$
$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\ x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$x_1\ \bar{x}_4$	$x_2\bar{x}_3\ \vee$	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ \vee$	$\bar{x}_3$
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$				$x_2\bar{x}_3x_4\ \vee$	$x_2\cdot\bar{x}_3$	x_1x_2

Оставшиеся неотмеченными неповторяющиеся переменные объединяем знаками дизъюнкции, заключаем в скобки и через знак конъюнкции дописываем в столбец остатков (таблица 4.14).

Т а б л и ц а 4.14 – **Обработанная таблица существенных переменных**

Разрешенные наборы	Запрещенные наборы					Остатки
	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$			$\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4$			$\bar{x}_3\left(\bar{x}_2\vee\bar{x}_4\right)$
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$						$\bar{x}_4\bar{x}_3$
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$			$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4$			$\bar{x}_3\left(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_4\right)$
$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$			$x_1\cdot\bar{x}_4$			$\bar{x}_3\left(x_1\vee\bar{x}_4\right)$
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$						x_1x_2

4-й этап. Строим таблицу покрытий существенных переменных (таблица 4.15), не забыв раскрыть скобки для тех остатков, где скобки имеются.

Т а б л и ц а 4.15 – **Таблица покрытий существенных переменных**

Остатки	Существенные переменные				
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_2\bar{x}_3$	∨		∨		
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	∨	∨	∨	∨	
$x_1\bar{x}_3$			∨	∨	∨
x_1x_2				∨	∨

5-й этап. Обработаем таблицу покрытий. В качестве ядра минимальной функции выбираем конъюнкцию $\bar{x}_3\bar{x}_4$, так как она единолично перекрывает столбец $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$. Из таблицы видно, что существует два варианта дополнений – конъюнкции $x_1\bar{x}_3$ и x_1x_2. Первую конъюнкцию следует выбрать в качестве дополнения в том случае, если упрощенная функция будет реализовываться в базисе «ИЛИ-НЕ», а вторую – если упрощенная функция будет реализовываться в базисах «И-ИЛИ-НЕ» либо «И-НЕ». Такое применение дополнений позволит избежать лишних инверсий при реализации упрощенной функции.

Таким образом, упрощенный вариант функции, заданной таблицей 4.9, для базисов реализации «И-ИЛИ-НЕ» и «И-НЕ» имеет вид $f^{min}=\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1x_2$, а для базиса «ИЛИ-НЕ» – $f^{min}=\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_3$. Кроме того необходимо помнить и о скобочных формах функций, которые позволяют сокращать количество используемых логических элементов. Так, функцию

$f^{min} = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3$ можно еще больше упростить, если вынести за скобки переменную $\bar{x}_3$. В результате получится функция $f^{min} = \bar{x}_3(\bar{x}_4 \vee x_1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Сапожников В.В. и др.* Дискретные устройства железнодорожной автоматики, телемеханики и связи: Учебник для вузов ж.-д. трансп. – М.: Транспорт, 1988. – 255 с.

2 *Пухальский Г.И., Новосельцева Т.Я.* Проектирование дискретных устройств на интегральных микросхемах: Справочник. – М.: Радио и связь, 1990. – 304 с.

3 *Ершова Э.Б. и др.* Особы дискретной автоматики в электросвязи: Учебник для вузов связи/*Ершова Э.Б., Рогинский В.Н., Маркин Н.П.* – М.: Связь, 1980. – 232 с.

4 Проектирование цифровых вычислительных машин: Учебное пособие для студентов вузов / Под ред. *С.А. Майорова.*. – М.: Высш. школа, 1972. – 344 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(*обязательное*)

Задания к практическим работам № 1, 2

Практическая работа № 1 *«Изучение способов задания функций алгебры логики»*

Необходимо задать ФАЛ табличным, координатным и числовым способами, получить СДНФ и СКНФ ФАЛ, варианты которых выбираются из таблицы А.1 по указанию преподавателя.

Практическая работа № 2 *«Минимизация функций алгебры логики»*

Необходимо упростить ФАЛ, варианты которых были заданы в работе № 1, при помощи законов алгебры логики и карт Карно.

Т а б л и ц а А.1 – **Варианты заданий к практическим работам № 1, 2**

Вариант	Функции алгебры логики	Вариант	Функции алгебры логики
01	$(\bar a b \lor \bar c a)(\overline{ab} \lor c)$ $\bar x_1 x_2 \bar x_3 \lor \bar x_1 \bar x_2 \bar x_3 \lor (\overline{x_1 x_2} \lor \bar x_3)$	09	$c\bar a \lor \bar b \lor (\overline{ca} \lor ab\bar c)\bar a$ $(a \lor \bar c)\overline{abc} \lor \bar a b$
02	$\bar x_1 \bar x_2 \lor x_1 \bar x_3 \lor x_1 x_2 (\bar x_1 x_3 \lor \overline{x_1 \bar x_3})$ $(a \lor a)(\bar a \lor b)(\bar a \bar b \lor \bar b) \lor \bar a$	10	$abc \lor \bar a(c \lor \bar c) \lor ab\bar c$ $(\bar x_1 \bar x_2 \lor \bar x_3)(\overline{x_1 x_2 x_3} \lor \overline{\bar x_1 \bar x_2 \bar x_3})$
03	$\bar a \bar b \bar c \lor \overline{ab}(c \lor \bar a)$ $\bar x_1 x_2 \lor \bar x_1 (x_2 x_3 \lor \overline{\bar x_2 \bar x_3}) \lor \bar x_3$	11	$\bar x_1 \bar x_2 \lor \bar x_2 x_1 \lor (\bar x_1 \lor x_2 \bar x_3)$ $(\bar a b \lor \bar c a)(\overline{\overline{ab} \lor c})$
04	$(\bar x_1 \lor \bar x_3)\overline{x_1 x_2 x_3} \lor \bar x_1 x_2$ $a(\bar a \lor abc)(\bar a \lor \overline{\bar b \bar c})$	12	$a \lor (a \lor b \lor \bar c)(\bar a \lor b \bar c \lor cb)$ $x_2 (x_1 \lor \bar x_2 x_3) \lor x_1 x_2 x_3 (\bar x_1 \lor x_2 x_3)$
05	$(\bar a \bar b \lor \bar c)(\overline{abc} \lor \overline{\bar a \bar b \bar c})$ $\bar x_1 x_1 \lor \bar x_2 (\overline{\bar x_2 \lor x_2 x_3})(x_1 \lor \bar x_3 x_2)$	13	$\overline{a \lor (\bar a \lor \bar b \lor \bar c)}\,(a \lor \bar b \lor \bar c)$ $x_2 (x_2 \lor \overline{x_1 x_2 \bar x_3}) \lor \bar x_1 \bar x_2 \bar x_3$
06	$x_1 x_2 x_3 \lor \bar x_1 x_2 x_3 (\bar x_1 x_2 \lor \overline{x_1 x_2 \bar x_3 \bar x_3})$ $\bar a \lor a\bar b \lor b\bar c(\bar a \lor bc)$	14	$x_1 x_2 \bar x_3 \lor \bar x_1 x_2 (\overline{\bar x_1 \lor \bar x_2 \lor \bar x_3})(x_1 \lor \bar x_3)$ $a\bar b c \lor \bar a bc(\bar a b \lor ab\bar c)$
07	$x_1 (x_1 \lor x_1 x_2 \bar x_3) \lor \bar x_1 \bar x_2 \bar x_3$ $a \lor \overline{\bar b \bar c} \lor (a \lor \bar b)(\overline{\bar a \lor \bar b})$	15	$\overline{ab} \lor \bar a b \lor \overline{\bar a c \lor bc}(\bar a \lor \bar c b)$ $x_1 x_2 x_3 \lor \bar x_2 x_1 x_3 (\bar x_1 x_2 \lor x_2 x_1 \bar x_3)$
08	$b(a \lor \bar b c) \lor \overline{abc}(\bar a \lor bc)$ $\bar x_1 \lor x_1 \bar x_2 \lor \overline{x_1 x_2 \bar x_3} \lor x_1 (\bar x_1 \lor \bar x_3)$	16	$\bar a \lor a\bar b \lor \overline{ab\bar c} \lor a(\bar a \lor \bar c)$ $(\bar x_1 \lor x_2)(\bar x_1 \lor x_3) \lor x_1 x_2 x_3 \lor \bar x_1 x_3$

Продолжение таблицы А.1

Вариант	Функции алгебры логики	Вариант	Функции алгебры логики
17	$(\bar a \vee b)(\bar a \vee c\,\bar c) \vee ab\bar c \vee \bar a cc$ $ab \vee \bar a\,b \vee \bar a\,c \vee bc\overline{(\bar a \vee \bar c\,b)}$	24	$a \vee \overline{\bar b\,\bar c} \vee (a \vee \bar b)\overline{(\bar a \vee \bar b)}$ $(\bar x_1 \vee x_2)(\bar x_1 \vee x_3) \vee \overline{x_1x_2x_3 \vee \bar x_1x_3}$
18	$\overline{\overline{\bar a\,b}\,\bar c} \vee ab\bar c \vee \bar a c$ $ab\bar c \vee \bar a\,b(\bar a \vee \bar b \vee c)(a \vee \bar c)$	25	$\bar a \vee a\bar b \vee b\bar c(\bar a \vee bc)$ $\bar x_1\bar x_2\bar x_3 \vee \overline{x_1x_2}(x_3 \vee \bar x_1)$
19	$\overline{x_1x_2x_3 \vee \bar x_1x_2\bar x_3} \vee (x_1x_2 \vee \bar x_3x_1)$ $\bar a \vee (a \vee \bar b \vee \bar c)(a \vee \bar b \vee \bar c)$	26	$\bar a aa \vee \bar b(\bar b \vee cb)(a \vee b\,\bar c)$ $x_1x_2 \vee (\bar x_1 \vee x_2)(\bar x_2 \vee \bar x_3x_2) \vee \bar x_2x_1$
20	$(\bar x_1\bar x_3 \vee \bar x_1x_2)(x_1x_2 \vee \bar x_3)$ $a \vee (a \vee b \vee \bar c)(\bar a \vee b\bar c \vee \bar c b)$	27	$a(\bar a \vee abc)(\bar a \vee \overline{\bar b\bar c})$ $\overline{\overline{\bar a\,b}\,\bar c} \vee ab\bar c \vee \bar a\,\overline{cc}$
21	$a \vee (\bar a \vee b)(a \vee \overline{\bar c\,b}) \vee \bar b\,a$ $\overline{\bar x_1\bar x_2} \vee x_1\bar x_2 \vee (\bar x_1 \vee x_2\bar x_3)$	28	$x_1x_2x_3 \vee \bar x_1(x_2x_3 \vee \bar x_2\bar x_3) \vee \bar x_3$ $a \vee \overline{(\bar a \vee b)(a \vee \bar c\,b)} \vee a\,\bar b$
22	$x_2 \vee \bar x_1x_2 \vee \bar x_2\bar x_1 \vee \overline{x_1x_2x_3}(\bar x_1 \vee \overline{x_2x_3})$ $(a \vee b)(\bar a \vee b)(\bar a\,\bar b \vee \bar c) \vee \bar a$	29	$(a \vee \bar b)(a \vee b)(\bar a\,\bar b \vee \bar c) \vee \bar a$ $(\bar x_1 \vee \bar x_3)\overline{x_1x_2x_3} \vee \bar x_1\bar x_2$
23	$x_2 \vee x_1x_2 \vee \bar x_1x_3(\overline{\overline{x_1x_2} \vee \bar x_2})$ $\bar a\,a \vee \bar b(\bar b \vee c\,\bar b)(\overline{a \vee b\bar c})$	30	$\bar a\,b\bar c \vee \overline{\bar a\,\bar b\,\bar c \vee (ab \vee \bar c)}$ $(a \vee \bar b)(\bar a \vee c) \vee a\,\bar b\,\bar c \vee \bar a\,c$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(*обязательное*)

Задания к практическим работам № 3, 4

Практическая работа № 3 *«Упрощение полностью заданных ФАЛ методами Квайна и Квайна–Мак-Класки»*

Необходимо упростить две функции, которые задаются преподавателем по таблице Б.1. Причем, одна из двух функций упрощается методом Квайна, а вторая – методом Квайна–Мак-Класки.

Практическая работа № 4 *«Упрощение частично заданных ФАЛ методами существеных переменых, Квайна и Квайна–Мак-Класки »*

Необходимо упростить одну из частично заданных функций, варианты которых были заданы в работе № 3, методом существенных переменных, а вторую – методом Квайна или Квайна–Мак-Класки (по выбору). Частично заданные наборы: (с 0 по 5) – для вариантов 1–6; (с 6 по 10) – для вариантов 7–12; (с 11 по 15) – для вариантов 13–18; (с 0 по 3 и с 6 по 9) – для вариантов 19–23; (с 2 по 7 и с 9 по 12) – для вариантов 24–27; (с 8 по 12) – для вариантов 28–32.

Таблица Б.1 – **Варианты заданий к практическим работам № 3, 4**

Вариант	$f = \{\ldots\}_{x_1x_2x_3x_4}$	Вариант	$f = \{\ldots\}_{x_1x_2x_3x_4}$
1	**2**	**1**	**2**
1	$f = \{0, 2, 3, 4, 5, 8, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 2, 5, 6, 7, 8, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$	7	$f = \{6, 7, 9, 10, 11, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 5, 6, 7, 8, 10, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
2	$f = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 1, 2, 3, 9, 11, 12, 13, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$	8	$f = \{0, 7, 9, 11, 13, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{1, 3, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$
3	$f = \{2, 3, 4, 5 6, 7, 10\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$	9	$f = \{0, 1, 6, 7, 8, 11, 12, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$
4	$f = \{3, 4 5, 6, 8, 9, 11\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	10	$f = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 3, 9, 10, 12, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$
5	$f = \{0, 1, 4, 5 6, 9, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{4, 6, 9, 10, 11, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$	11	$f = \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$
6	$f = \{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 5, 7, 8, 9, 10, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$	12	$f = \{0, 1, 6, 7, 8, 11, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 1, 5, 6, 7, 11, 12, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$

Продолжение таблицы Б.1

Вари ант	$f = \{\ldots\}_{x_1x_2x_3x_4}$	Вариа нт	$f = \{\ldots\}_{x_1x_2x_3x_4}$
1	**2**	**1**	**2**
13	$f = \{5, 6, 7, 8, 9, 11, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{6, 8, 11, 12, 13, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	23	$f = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 1, 2, 9, 12, 13, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
14	$f = \{0, 3, 7, 8\ 9, 10\ 12, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{7, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	24	$f = \{0, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 2, 3, 11, 12, 13, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
15	$f = \{0, 3, 4, 5, 8, 10, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 1, 2, 7, 8, 10, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$	25	$f = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$
16	$f = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	26	$f = \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{3, 4, 5, 7, 9, 10, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$
17	$f = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 3, 10, 11, 12, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	27	$f = \{5, 6, 7, 8, 9, 11, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{5, 7, 8, 9, 11, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
18	$f = \{1, 2, 2, 4, 5, 10, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{1, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	28	$f = \{0, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
19	$f = \{2, 3, 6, 7, 11, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 6, 7, 11, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$	29	$f = \{0, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 2, 4, 5, 7, 13, 14, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
20	$f = \{0, 1, 2, 3, 7, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{0, 3, 7, 8, 9, 11, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$	30	$f = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{1, 2, 8, 9, 10, 12\}_{x_1x_2x_3x_4}$
21	$f = \{4, 8, 10, 11, 12, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{4, 5, 6, 7\ 8, 10, 13\}_{x_1x_2x_3x_4}$	31	$f = \{1, 3, 4, 5, 10, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{1, 3, 6, 7, 9, 10, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$
22	$f = \{2, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{2, 5, 9, 10, 13, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$	32	$f = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 13, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ $f = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14\}_{x_1x_2x_3x_4}$

Примечание – Запись вида $f\{0, 1, 6, 8, 12, 15\}_{x_1x_2x_3x_4}$ означает, что функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на нулевом, первом, шестом, восьмом, двенадцатом и пятнадцатом наборах принимает значение логической единицы, а на всех остальных — логического нуля.

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(*рекомендуемое*)

Основные аксиомы и законы алгебры логики

Аксиомы АЛ

$$\overline{0}=1,\ \ \overline{1}=0,\ \ 1\vee 1=1,\ \ 0\cdot 0=0,\ \ 1\cdot 1=1,$$
$$0\vee 0=0,\ \ 1\cdot 0=0\cdot 1=0,\ \ 0\vee 1=1\vee 0=1.$$

Законы АЛ

Нулевого множества
$$0\vee x=x;\quad 0\cdot x=0;\quad 0\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=0.$$
Универсального множества
$$1\cdot x=x;\quad 1\vee x=1;\quad 1\vee x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n=1.$$
Повторения
$$x\cdot x\cdot\ldots\cdot x=x;\quad x\vee x\vee\ldots\vee x=x.$$
Двойного отрицания
$$\overline{\overline{x}}=x.$$
Дополнительности
$$x\cdot\overline{x}=0;\quad x\vee\overline{x}=1.$$
Переместительный
$$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z=x\vee y\vee z;\quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=x\cdot y\cdot z.$$
Распределительный
$$x\cdot(y\vee z)=x\cdot y\vee x\cdot z;\quad x\vee y\cdot z=(x\vee y)\cdot(x\vee z).$$
Поглощения
$$x\cdot(y\vee x)=x;\quad x(x\vee a)(x\vee b)\cdot\ldots\cdot(x\vee z)=x;\quad x\vee xz=x;$$
$$x\vee(\overline{x}\vee y)=xy;\quad x\vee xa\vee xb\vee\ldots\vee xz=x;\quad x\vee\overline{x}y=x\vee y.$$
Склеивания
$$xy\vee\overline{x}y=y;\quad (x\vee y)(x\vee\overline{y})=x.$$
Обобщенного склеивания
$$xy\vee\overline{x}z\vee yz=xy\vee\overline{x}z;\quad (x\vee y)(\overline{x}\vee z)=xz\vee\overline{x}y.$$
Двойственности (правило де Моргана)
$$\overline{a\,b}=\overline{a}\vee\overline{b};\quad \overline{a\,b\,c\cdot\ldots\cdot z}=\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c}\vee\ldots\vee\overline{z}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БЕРЕЗНЯЦКИЙ Юрий Федорович

Задание и минимизация функций алгебры логики

Пособие для практических занятий
по дисциплине «Теория дискретных устройств»

Редактор О. В. Занина
Технический редактор В. Н. Кучерова
Корректор Т. М. Ризевская

Подписано в печать 16.02.2004 г. Формат бумаги $60x84_{1/16}$.
Бумага газетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 2,56. Уч.-изд. 2,66. Тираж 170 экз.
Зак. № . Изд. № 3993.

Редакционно-издательский отдел БелГУТа, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛВ № 57 от 22.10.2000 г.

Типография БелГУТа, 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛП № 360 от 26.07.1999 г.