

УДК 539.3

А. С. КРАВЧУК, доктор физико-математических наук, А. И. КРАВЧУК, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет, Минск

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С МНОГОУГОЛЬНЫМ ВЫРЕЗОМ ПРИ ЕЕ РАВНОМЕРНОМ РАСТЯЖЕНИИ В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКЕ

Разработана новая методика решения однородных краевых задач для многоугольных вырезов в изотропной плоскости при ее нагружении в бесконечно удаленной точке. В основе этой методики лежат разложения конформного отображения в ряд Фурье. В соответствии с предлагаемой методикой внесены изменения в краевые условия, которым должны удовлетворять две гармонические функции, решающие данный тип задач. Обращено внимание на то, что в механике неверно используется словосочетание «отображение на плоскость с отверстием», тогда как на самом деле отображается плоскость с круглым отверстием на плоскость с многоугольным вырезом. Получены уравнения, определяющие коэффициенты аналитических функций, решающих модельную задачу о растяжении горизонтальной трещины в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Введение. Несмотря на имеющуюся в настоящее время мощную вычислительную технику, позволяющую численно решать многие задачи теории упругости, важное значение имеет разработка методов приближенных решений для отдельных классов задач, которые давали бы решения в виде некоторых сравнительно простых аналитических выражений [1].

Статья содержит общие формулы и методические указания для решения задач по концентрации напряжений возле многоугольных вырезов. В отличие от общепринятых методик, предложенных Г. Н. Савиным [1] и Н. И. Мухелишвили [2], в данной статье используется разложение в ряд Фурье конформного отображения на границе отверстия. Исходя из этого общие уравнения, определяющие однородные краевые условия на границе выреза переписаны в ином виде по сравнению с упомянутыми классическими работами [1, 2]. Методика, предлагаемая авторами, хотя выглядит достаточно громоздкой, позволяет с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica строить распределения напряжений, интересующие инженеров для расчета на прочность, не углубляясь в сложную теорию, например, интегралов типа Коши [2].

В качестве примера применения данной методики построено аналитическое решение для трещины, растягиваемой в двух перпендикулярных направлениях.

Рассмотрим упругую плоскость xOy с многоугольным вырезом. Ось Ox направлена горизонтально. Обозначим рассматриваемую область через S , а границу выреза – через L . Известно [1, 2], что для аналитических функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ в случае решения первой основной задачи для многоугольного отверстия L , свободного от напряжений, должно выполняться уравнение

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} \Big|_L = 0, \quad (1)$$

где $\varphi_1'(z) = \frac{d\varphi_1(z)}{dz}$.

В случае решения второй основной задачи для жесткой (недеформируемой) многоугольной вставки геометрически совпадающей с контуром отверстия и сцепленной с ним, должно выполняться равенство

$$\kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \Big|_L = 0. \quad (2)$$

где κ – константа, определяемая видом напряженного состояния: $\kappa = 3 - 4\nu$ – при плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – при плоском напряженном состоянии.

Следует отметить особенность важных с технической точки зрения приложений: в них необходимо вычислить распределение напряжений σ_1 или τ_{\max} . Выбор этих параметров зависит от конкретной теории прочности, которую планируется применить в расчетах [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} + \sqrt{z} \cdot \varphi_1''(z) + \psi_1'(z); \\ \tau_{\max} &= \sqrt{z} \cdot \varphi_1''(z) + \psi_1'(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Исходя из общих формул [2], при отсутствии вращения на бесконечности комплексные аналитические функции, решающие основные задачи механики твердого тела для кругового выреза в плоскости, приобретают вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{F_1 + iF_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) + \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{z^k}; \\ \psi_1(z) &= \kappa \frac{F_1 - iF_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})e^{-2i\alpha} \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b'_k}{z^k}, \end{aligned} \quad (4)$$

где F_1 , F_2 – проекции главного вектора сил, приложенных к отверстию; κ – константа, определяемая видом напряженного состояния; $\kappa = 3 - 4\nu$ – при плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – при плоском напряженном состоянии; σ_1 , σ_2 – напряжения однородного растяжения/сжатия на бесконечности в декартовой системе координат, повернутой на угол α относительно заданной системы xOy ; a'_k и b'_k – комплексные коэффициенты, тождественно удовлетворяющее краевым условиям на границе L многоугольного выреза при решении первой основной задачи.

Основные сведения о конформном отображении. Пусть z и ζ – две комплексные переменные, связанные соотношением [2]:

$$z = \omega(\zeta), \quad (5)$$

где $\omega(\zeta)$ – однозначная аналитическая функция в некоторой области Ω на плоскости переменной $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$; i – комплексная единица. Соотношение (5) приводит в соответствие каждой точке ζ области Ω вполне определенную точку $z = x + iy$ на плоскости этой последней переменной. Эти точки заполняют на плоскости z некоторую определенную область S . Предположим и обратное: каждой точке z области S в силу соотношения (5) соответствует одна вполне определенная точка области Ω . В этом случае говорят, что соотношение (1) определяет взаимно однозначное конформное отображение области S на область Ω (рисунок 1).

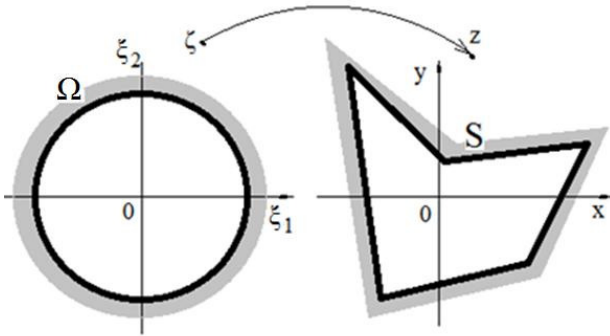


Рисунок 1 – Определение отображения области Ω на область S

Подчеркнем особенность использования определения конформного отображения в механике твердого тела [1, 2]: хотя в геометрическом понимании происходит отображение $\zeta \in \Omega$ на $z \in S$ (см. рисунок 1), однако в соответствии с устоявшимися в механике твердого тела традициями утверждается, что $z = \omega(\zeta)$ – отображение области S на область Ω . В дальнейшем будем придерживаться математической точки зрения.

Отображение называется конформным благодаря следующему свойству, характерному для соотношений вида (5), где $\omega(\zeta)$ – аналитическая функция: если в области Ω взять два линейных элемента, выходящих из некоторой точки ζ и составляющих между собой некоторый угол γ , то соответствующие им элементы в области S будут составлять такой же угол γ , причем направление отсчета углов сохраняется.

В данной статье в дальнейшем рассматриваются только области, ограниченные одним контуром.

Преобразование общих формул при конформном отображении круга на многоугольную область. Полагая, что $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$, и исходя из очевидного правила дифференцирования композиции функций, получаем

$$\frac{d}{d\zeta} \varphi(\zeta) = \frac{d}{dz} \varphi_1(z) \frac{d}{d\zeta} \omega(\zeta) = \frac{d}{dz} \varphi_1(z) \omega'(\zeta). \quad (6)$$

Подставляя (5) в (1) и (2) с учетом (6), получаем после домножения на $\overline{\omega'(\zeta)}$:

$$\overline{\omega'(\zeta)} \varphi(\zeta) + \omega(\zeta) \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)} \psi(\zeta) \Big|_{L(\omega(\zeta))} = 0; \quad (7)$$

$$\overline{\kappa \omega'(\zeta)} \varphi(\zeta) - \omega(\zeta) \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\omega'(\zeta)} \psi(\zeta) \Big|_{L(\omega(\zeta))} = 0, \quad (8)$$

где $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$; $\psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta))$; $\varphi'(\zeta) = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}$.

Отметим, что краевые условия (7) и (8) сильно отличаются от общепринятых в литературе, посвященной концентрации напряжений [1], однако это единственно возможный путь решения краевых задач для многоугольных вырезов с нулевыми краевыми условиями на границе.

Дифференцируя (6) еще раз по ζ , получаем:

$$\begin{aligned} \varphi''(\zeta) &= \frac{d^2}{d\zeta^2} \varphi(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d}{dz} \varphi_1(z) \cdot \frac{d}{d\zeta} \omega(\zeta) \right) = \\ &= \frac{d^2}{dz^2} \varphi_1(z) \omega'(\zeta)^2 + \frac{d}{dz} \varphi_1(z) \omega''(\zeta). \end{aligned}$$

Подставляя в полученное равенство формулу (6), окончательно можно вывести равенство:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_1(z) = \frac{1}{\omega'(\zeta)^3} (\omega'(\zeta) \varphi''(\zeta) - \varphi'(\zeta) \omega''(\zeta)). \quad (9)$$

Соответственно (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega(\zeta)} + \overline{\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right)} + \\ &+ \left| \overline{\omega(\zeta)} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)^3} (\omega'(\zeta) \varphi''(\zeta) - \varphi'(\zeta) \omega''(\zeta)) + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right|; \\ \tau_{\max} &= \left| \overline{\omega(\zeta)} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)^3} (\omega'(\zeta) \varphi''(\zeta) - \varphi'(\zeta) \omega''(\zeta)) + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right|. \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (10) существенно отличаются от общих формул, приведенных в монографии Г. Н. Савина [1].

Решение задачи для трещины, края которой свободны от внешних воздействий, при растяжении плоскости с разрезом конечной длины вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений [$\alpha = 0$ в (4)]. Соблюдая принятые ранее правила, рассмотрим отображение внешности круга, радиуса R на внешность разреза $(-R, R)$ на вещественной оси $0\xi_1$:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right). \quad (11)$$

Комплексные потенциалы $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$, $\psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta))$ с учетом (4) и (5) при отсутствии напряжений, приложенных к контуру трещины, и совпадением направлений $0\xi_1$ и $0x$ приобретут вид

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{4} (\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2}) \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}; \\ \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2} (\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2}) \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что значения коэффициентов $\sigma_{0,1}$ и $\sigma_{0,2}$ не изменились, поскольку радиус отображаемой на трещину окружности (плоскость ζ) совпадает с радиусом описанной около трещины окружности в плоскости z . Выполнив замену $\zeta = Re^{i\theta}$, получаем краевое условие на границе выреза:

$$\begin{aligned}
& \overline{\omega'(Re^{i\theta})} \varphi(Re^{i\theta}) + \omega(Re^{i\theta}) \overline{\varphi'(Re^{i\theta})} + \\
& + \overline{\omega'(Re^{i\theta})} \psi(Re^{i\theta}) = \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R(e^{i2\theta} - 1) + \\
& + (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{R^k} e^{-ik\theta} - R \left(\frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})(e^{i2\theta} + 1) - \right. \\
& \left. - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k}}{R^{k+1}} e^{i(k+2)\theta} \right) - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R(e^{i2\theta} - 1) + \\
& + (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{R^k} e^{-ik\theta} = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Проведя очевидные преобразования, получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R(e^{i2\theta} - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{R^k} e^{-i(k-1)\theta} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{R^k} e^{-i(k+1)\theta} - R \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})(e^{i2\theta} + 1) + \\
& + R \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k}}{R^{k+1}} e^{i(k+3)\theta} + R \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k}}{R^{k+1}} e^{i(k+1)\theta} - \\
& - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R(e^{i2\theta} - 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{R^k} e^{-i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{R^k} e^{-i(k+1)\theta} = 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

Разделяя вещественную и мнимую части (14), получаем систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R(\cos(2\theta) - 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Re}(a_k) \cos((k-1)\theta) + \operatorname{Im}(a_k) \sin((k-1)\theta)) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Re}(a_k) \cos((k+1)\theta) + \operatorname{Im}(a_k) \sin((k+1)\theta)) - \\
& - R \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})(\cos(2\theta) + 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^k} (\operatorname{Re}(a_k) \cos((k+3)\theta) + \operatorname{Im}(a_k) \sin((k+3)\theta)) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^k} (\operatorname{Re}(a_k) \cos((k+1)\theta) + \operatorname{Im}(a_k) \sin((k+1)\theta)) - \\
& - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R(\cos(2\theta) - 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Re}(b_k) \cos((k-1)\theta) + \operatorname{Im}(b_k) \sin((k-1)\theta)) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{R^k} (\operatorname{Re}(b_k) \cos((k+1)\theta) + \operatorname{Im}(b_k) \sin((k+1)\theta)) = 0; \\
& \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R \sin(2\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Im}(a_k) \cos((k-1)\theta) - \operatorname{Re}(a_k) \sin((k-1)\theta)) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Im}(a_k) \cos((k+1)\theta) - \operatorname{Re}(a_k) \sin((k+1)\theta)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - R \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)) + 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^k} (-\operatorname{Im}(a_k) \cos((k+3)\theta) + \operatorname{Re}(a_k) \sin((k+3)\theta)) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^k} (-\operatorname{Im}(a_k) \cos((k+1)\theta) + \operatorname{Re}(a_k) \sin((k+1)\theta)) - \\
& - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R((\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)) - 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Im}(b_k) \cos((k-1)\theta) - \operatorname{Re}(b_k) \sin((k-1)\theta)) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} (\operatorname{Im}(b_k) \cos((k+1)\theta) - \operatorname{Re}(b_k) \sin((k+1)\theta)) = 0. \quad (15)
\end{aligned}$$

Разделяя (15) по группам синусов и косинусов, получаем две системы уравнений относительно вещественной и мнимой частей:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R(\cos(2\theta) - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \cos((k-1)\theta) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \cos((k+1)\theta) - R \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})(\cos(2\theta) + 1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \cos((k+3)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \cos((k+1)\theta) - \\
& - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R(\cos(2\theta) - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(b_k) \cos((k-1)\theta) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(b_k) \cos((k+1)\theta) = 0; \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R \sin(2\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \sin((k-1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \sin((k+1)\theta) - R \frac{1}{4}(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2}) \sin(2\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \sin((k+3)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(a_k) \sin((k+1)\theta) - \\
& - \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R \sin(2\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(b_k) \sin((k-1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Re}(b_k) \sin((k+1)\theta) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \sin((k-1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \sin((k+1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \sin((k+3)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \sin((k+1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(b_k) \sin((k-1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(b_k) \sin((k+1)\theta) = 0; \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \cos((k-1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \cos((k+1)\theta) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \cos((k+3)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(a_k) \cos((k+1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(b_k) \cos((k-1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} \operatorname{Im}(b_k) \cos((k+1)\theta) = 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

Очевидно, что из системы уравнений (17) можно получить только однородные системы относительно $\operatorname{Im}(a_k)$, $\operatorname{Im}(b_k)$, откуда следует, что $\operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im}(b_k) = 0$,

т.е. коэффициенты a_k и b_k являются вещественными. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только систему (16).

Из первого уравнения (16) получим тождество для констант:

$$-(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2})R + \frac{1}{R}a_1 + \frac{1}{R}b_1 = 0. \quad (18)$$

При $\cos(\theta)$ и $\sin(\theta)$ из (16) получаем уравнение

$$a_2 + b_2 = 0. \quad (19)$$

При $\cos(2\theta)$ и $\sin(2\theta)$ из (16) получаем два одинаковых уравнения:

$$\begin{aligned} a_3 + b_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R^4 + R^2b_1; \\ -a_3 - b_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R^4 - R^2b_1 - 2R^2a_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Из требования равенства правых частей (20) и (18) получаем систему уравнений для определения a_1 и b_1 :

$$a_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R^2; \quad (21)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(2(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2}) - (\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2}))R^2.$$

При $\cos(3\theta)$ и $\sin(3\theta)$ из (16) получаем еще два одинаковых уравнения:

$$\begin{aligned} a_4 + b_4 &= -R^2a_2 + R^2b_2; \\ a_4 + b_4 &= 3R^2a_2 + R^2b_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Из требования равенства правых частей в (22) с учетом (19) получаем

$$a_2 = 0; \quad b_2 = 0. \quad (23)$$

При $\cos(m\theta)$ и $\sin(m\theta)$ $m \geq 4$ из (16) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &a_{m+1} + b_{m+1} = \\ &= -(m-2)R^2a_{m-1} + R^2b_{m-1} - (m-3)R^4a_{m-3}; \\ &a_{m+1} + b_{m+1} = \\ &= mR^2a_{m-1} + R^2b_{m-1} + (m-3)R^4a_{m-3}. \end{aligned} \quad (24)$$

Вычитая в (24) из первого уравнения второе и проведя замену $j = m - 1$, получаем рекуррентную формулу определения коэффициента a_j при $j \geq 3$:

$$a_j = -2\frac{(j-2)}{j}R^2a_{j-2}. \quad (25)$$

Получено 26.03.2016

A. S. Kravchuk, A. I. Kravchuk. Strength calculations of elastic isotropic plane with polygonal cutouts under with uniform stretching at the infinitely distant point.

A new method of solving of boundary problems for polygonal cutouts in plane loaded at infinity was worked out. The basis of this technique is expansion of conformal mapping to the Fourier series. The boundary conditions to be satisfied by two harmonic functions solving this type of problems were changed under the proposed methodology.

Рекуррентное уравнение (25) позволяет вернуться последовательно к уравнениям (20), (22) и получить значение коэффициента b_j

$$b_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,2})R^4 + R^2b_1 - a_3; \quad (26)$$

$$b_4 = -R^2a_2 + R^2b_2 - a_4 = 0.$$

И далее из (24) при $j \geq 5$:

$$b_j = -(j-3)R^2a_{j-2} + R^2b_{j-2} - (j-4)R^4a_{j-4} - a_j. \quad (27)$$

Отметим отличительную особенность предлагаемой методики от методики, используемой Г. Н. Савиным [1]: прежде чем переходить к удовлетворению краевого условия аналогичного (7) после подстановки туда (11) и (12), Савин использовал разложение в ряд выражения $\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$ в окрестности бесконечно удаленной точки, что

приводит к необходимости перемножения рядов и не позволяет в замкнутом виде получить систему уравнений (21), (23), (25)–(27) для коэффициентов a_k и b_k потенциалов (12).

Заключение. Разработана новая методика решения однородных краевых задач для многоугольных вырезов в изотропной плоскости при ее нагружении в бесконечно удаленной точке. В основе этой методики лежат разложения конформного отображения в ряд Фурье.

В соответствии с предлагаемой методикой внесены изменения в краевые условия, которым должны удовлетворять две гармонические функции, решающие данный тип задач.

Обращено внимание на то, что в механике неверно используется словосочетание «отображение на плоскость с отверстием», тогда как на самом деле отображается плоскость с круглым отверстием на плоскость с многоугольным вырезом.

Получены уравнения, определяющие коэффициенты аналитических функций, решающих модельную задачу о растяжении горизонтальной трещины в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Список литературы

- 1 Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – Киев : Наукова думка, 1968. – 887 с.
- 2 Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили – М. : Наука, 1966. – 708 с.