УДК 539.3

А. С. КРАВЧУК, доктор физико-математических наук, А. И. КРАВЧУК, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет, Минск

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С. П. ТИМОШЕНКО ОБ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ

Предложена методика математического решения задачи С. П. Тимошенко о напряженном состоянии плоскости с круговым отверстием, свободным от нормальных и касательных напряжений, при его одноосном растяжении на бесконечности. Предлагаемое решение не использует качественные рассуждения о вспомогательных напряженных состояниях и их суперпозиции с искомым распределением напряжений, что позволяет использовать его в качестве примера решения краевой задачи в университетских курсах по механике твердого деформируемого тела для естественно-научных специальностей.

Введение. Решение задачи С. П. Тимошенко о концентрации напряжений при одноосном растяжении упругой изотропной плоскости с отверстием [1] в настоящее время является классическим решением, демонстрируемым в качестве примера решения краевой задачи студентам технических вузов [2]. Для студентов естественно-научных специальностей данное решение используется крайне редко [3], т.к. по сути своей оно содержит много интуитивных рассуждений о вспомогательных напряженных состояниях и их суперпозициях с напряженным состоянием около отверстия [1, 2].

Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим задачу об отверстии, свободном от внешних нормальных и касательных напряжений, в бесконечной пластине, находящейся под действием растягивающих напряжений величиной σ_∞ (рисунок 1).

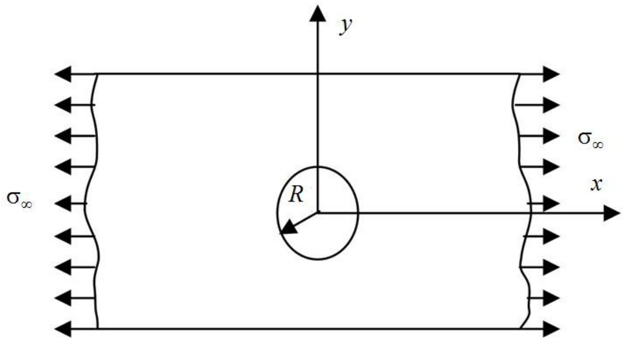

Рисунок 1 – Равновесие пластины с отверстием радиуса *R* [2]

Будем предполагать, что функция напряжений будет иметь вид

$$\Phi(r,\theta) = f_1(r) + f_2(r)\cdot\cos(2\theta). \tag{1}$$

Применяя к (1) последовательно два оператора Лапласа в полярной системе координат, получаем

$$\Delta\Phi = \frac{d^4 f_1(r)}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 f_1(r)}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{df_1(r)}{dr} + \left(\frac{d^4 f_2(r)}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 f_2(r)}{dr^3} - \frac{9}{r^2}\cdot\frac{d^2 f_2(r)}{dr^2} + \frac{9}{r^3}\cdot\frac{df_2(r)}{dr}\right)\times\cos(2\theta). \tag{2}$$

Приравнивая (2) к нулю для любого угла θ, получаем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^4 f_1(r)}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 f_1(r)}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{df_1(r)}{dr} = 0;$$
$$\frac{d^4 f_2(r)}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 f_2(r)}{dr^3} - \frac{9}{r^2}\cdot\frac{d^2 f_2(r)}{dr^2} + \frac{9}{r^3}\cdot\frac{df_2(r)}{dr} = 0, \tag{3}$$

общие решения, которых имеют вид

$$f_1(r) = C_{1,1}\cdot\ln(r) + \frac{C_{1,2}}{2}r^2 - \frac{C_{1,3}}{4}r^2 + \frac{C_{1,3}}{2}r^2\ln(r) + C_{1,4};$$
$$f_2(r) = -\frac{C_{2,1}}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{C_{2,2}}{2}r^2 + \frac{C_{2,3}}{4}r^4 + C_{2,4}, \tag{4}$$

где $C_{1,j}$, $C_{2,j}$ ($j=\overline{1,4}$) – константы, выбираемые исходя из краевых условий и поведения функции напряжений на бесконечности.

Подставляя (4) в (1), получаем, что функция напряжений принимает вид

$$\Phi(r,\theta) = C_{1,1}\cdot\ln(r) + \frac{C_{1,2}}{2}r^2 - \frac{C_{1,3}}{4}r^2 + \frac{C_{1,3}}{2}r^2\ln(r) + C_{1,4} + \left(-\frac{C_{2,1}}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{C_{2,2}}{2}r^2 + \frac{C_{2,3}}{4}r^4 + C_{2,4}\right)\cdot\cos(2\theta). \tag{5}$$

Отметим, что для компонент напряжений справедливы равенства

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi; \tag{6}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi; \tag{7}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Phi. \tag{8}$$

Исходя из ограниченности напряжений при $r \gg R$, из (6)–(8) становится очевидно, что в (5) $C_{1,3} = C_{2,3} = 0$ и $C_{1,4} = 0$ (как константа, не оказывающая никакого влияния на напряженное состояние), а $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $C_{2,2}$, $C_{2,4}$ – константы, подлежащие определению, исходя из краевых условий. Таким образом, функция напряжений (5) принимает вид

$$\Phi(r,\theta) = \left(C_{1,1}\cdot\ln(r) + \frac{C_{1,2}}{2}r^2\right) + \left(-\frac{C_{2,1}}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{C_{2,2}}{2}r^2 + C_{2,4}\right)\cdot\cos(2\theta). \tag{9}$$

Прежде чем переходить к анализу краевых условий, формально вычислим нормальные радиальные и касательные напряжения, действующие в плоскости с отверстием. Для этого воспользуемся соотношениями (6)–(8) и (9):

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi = \frac{C_{1,1}}{r^2} + C_{1,2} + \left(3\frac{C_{2,1}}{r^4} - C_{2,2} - 4\frac{C_{2,4}}{r^2}\right)\cos(2\theta); \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi = -\frac{C_{1,1}}{r^2} + C_{1,2} + \left(-3\frac{C_{2,1}}{r^4} + C_{2,2}\right)\cos(2\theta); \quad (11)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Phi = \left(3\frac{C_{2,1}}{r^4} + C_{2,2} - 2\frac{C_{2,4}}{r^2}\right)\cdot\sin(2\theta). \quad (12)$$

Переходя на границу отверстия (приравнивая $r = R$) в (10) и (12) и сравнивая результат с краевыми условиями, поставленными ранее, получаем следующую систему уравнений для определения оставшихся коэффициентов:

$$C_{1,1} = -R^2 C_{1,2}; \quad C_{2,4} = -C_{2,2}R^2; \quad C_{2,1} = -C_{2,2}R^4. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (10), получаем

$$\sigma_r = -\frac{R^2 C_{1,2}}{r^2} + C_{1,2} - C_{2,2}\left(3\frac{R^4}{r^4} + 1 - 4\frac{R^2}{r^2}\right)\cos(2\theta). \quad (14)$$

Переходя в (14) к пределу $r \to \infty$ при бесконечности, получаем

$$\sigma_r = C_{1,2} - C_{2,2}\cdot\cos(2\theta).$$

Положив

$$C_{1,2} = -C_{2,2} = \frac{\sigma_\infty}{2}, \quad (15)$$

получаем из (10)–(12) при $r \to \infty$:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2}(1+\cos(2\theta)) = \sigma_\infty\cdot\cos(\theta)^2; \quad (16)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2}(1-\cos(2\theta)) = \sigma_\infty\cdot\sin(\theta)^2; \quad (17)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}\cdot\sin(2\theta). \quad (18)$$

Таким образом, основное напряженное состояние в задаче Тимошенко о деформировании упругой плоскости с отверстием, свободным от нормальных и касательных напряжений, определяется формулами (16)–(18). Перечисленные формулы позволяют восстановить функцию напряжений $\Phi^*(r,\theta)$, которая определяет указанное напряженное состояние плоскости в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\Phi^*(r,\theta) = \frac{\sigma_\infty}{4}r^2(1-\cos(2\theta)) = \frac{\sigma_\infty}{2}r^2\cdot\sin(\theta)^2.$$

Выполнив очевидную замену $y = r\cdot\sin(\theta)$, можно перейти к полиномиальной функции напряжений $\Phi_D^*(x,y)$ в декартовой системе координат:

$$\Phi_D^*(x,y) = \frac{\sigma_\infty}{2}\cdot y^2. \quad (19)$$

Очевидно, что функция напряжений (19) соответствует однородному растяжению плоскости вдоль оси $0x$ напряжениями σ_∞, приложенными на бесконечности.

Окончательно исходя из (10)–(12), (13) и (15) можно выписать формулы, определяющие напряженное состояние около отверстия, свободного от внешних нормальных и касательных напряжений, в плоскости при ее одноосном однородном растяжении [1]:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_\infty}{2}\left(1 - 4\cdot\frac{R^2}{r^2} + 3\cdot\frac{R^4}{r^4}\right)\cos(2\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_\infty}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos(2\theta);$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}\left(1+2\frac{R^2}{r^2} - 3\frac{R^4}{r^4}\right)\cdot\sin(2\theta).$$

Заключение. Предложена методика математического решения задачи С. П. Тимошенко о напряженном состоянии плоскости с круговым отверстием, свободным от нормальных и касательных напряжений при его одноосном растяжении на бесконечности.

Предлагаемое решение не использует качественные рассуждения о вспомогательных напряженных состояниях и их суперпозиции с искомым распределением напряжений, что позволяет использовать его в качестве примера решения краевой задачи в университетских курсах по механике твердого деформируемого тела для естественно-научных специальностей.

Список литературы

1 **Тимошенко, С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко. – Л.–М. : ОНТИ, 1937. – 451 с.

2 Элементы теории упругости : метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлению 151000 «Технологические машины и оборудование» / сост. А. А. Светашков. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2013. – 156 с.

3 **Журавков, М. А.** Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 543 с.

Получено 26.03.2016

A. S. Kravchuk, A. I. Kravchuk. Mathematical solution of S. P. Tymoshenko's problem of uniaxial tension of plate with hole.

The technique of the mathematical solution of the Timoshenko's problem of uniaxial tension at infinity of plane with a circular hole was created. The hole is free of normal and shear stresses. The proposed solution is not using qualitative consideration about the auxiliary states and their superposition with the required solution. The proposed solution can be used in university courses on the mechanics of deformable body for natural science specialties.