

УДК 539.3

С. С. ЩЕРБАКОВ, доктор физико-математических наук, А. В. КРУПОДЕРОВ, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет, Минск

### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ РОЛИК / ВАЛ С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ТЕПЛА, ВЫДЕЛИВШЕГОСЯ ПРИ ТРЕНИИ

Изучается напряженно-деформированное состояние, возникающее в области контакта двух твердых тел при действии контактного давления и температуры, вызванной трением между контактирующими телами. Рассмотрена пара трения качения «ролик / вал», работающая во многоцикловом режиме. Получено распределение температуры в системе, вызванное выделением тепла при трении вала и ролика. Рассчитано пространственное напряженное состояние системы при совместном действии контактного давления и температуры. Результаты расчетов показали значительное изменение распределения напряжений в области контакта за счет действия тепловой нагрузки.

**Введение.** Задача исследования контактного взаимодействия с трением имеет большое практическое значение в таких областях, как машиностроение и транспорт (зубчатые передачи, подшипники, система колесо / рельс). Весьма важным является также учет температурных эффектов, возникающих вследствие трения. Данной теме посвящено достаточно много работ. В работах [1, 2] изложены методы расчета напряженно-деформированного состояния контактирующих тел, учитывающих тепловыделение от трения. Задачи рассматриваются в плоской постановке. В работе [3] рассматривается трехмерная задача о напряженно-деформированном состоянии при качении шара по полупространству, учитывающая тепловыделение. Более подробный анализ работ, посвященных данной тематике, приведен в [4]. Настоящая работа посвящена оценке влияния тепла, выделяющегося при многоцикловом трении в паре ролик / вал, на напряженно-деформированное состояние в окрестности контактного взаимодействия. По сравнению с работами, приведенными в [4], основными особенностями данной работы являются: анализ напряженно-деформированного состояния, вызванного температурными и контактными воздействиями конкретной прикладной системы ролик / вал; учет цикличности нагружения; анализ *пространственного* напряженно-деформированного состояния системы.

**Постановка задачи.** Исследуемая пара трения ролик / вал, применяющаяся в испытаниях на контактную усталость [5], представлена на рисунке 1. Применительно к данной системе будем решать задачу определения температурного поля, вызванного циклическим движением ролика по валу, а также напряженно-деформированного состояния тела трехмерной окрестности при одновременном действии контактного давления и тепла.

Площадка контакта в системе ролик / вал мала по сравнению с размерами взаимодействующих тел, а сами тела ограничены поверхностями второго порядка. Поэтому для расчета напряжений в окрестности площадки контакта воспользуемся моделью полупространства, нагруженного эллиптически распределенным контактным давлением [6]:

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2} H(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2),$$

где  $p_0$  – максимум контактного давления;  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси эллипса контакта;  $H$  – функция Хевисайда.

Исходную задачу теории термоупругости о совместном температурном и контактном нагружении можно, в силу линейности определяющих уравнений, рассмотреть как суперпозицию решений двух отдельных задач, т.е. для температурного нагружения при отсутствии контактного взаимодействия и контактного взаимодействия при отсутствии нагрева. При этом во втором случае соотношения Дюамеля – Неймана, в силу того, что температура нулевая, переходят в обычный закон Гука.

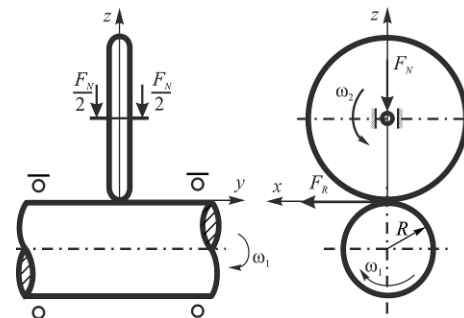


Рисунок 1 – Расчетная схема

Основное внимание будем уделять изменению напряженного состояния, вызванному влиянием температуры, в окрестности контактного взаимодействия. Определение размеров области контакта  $a$  и  $b$  производилось упрощенно лишь из условий контактного взаимодействия. Данное упрощение основано, с одной стороны, на том, что контактное нагружение задано силой  $F_N$ , т.е. условия на контактных поверхностях заданы в усилиях, а не в перемещениях. С другой стороны, увеличение размеров тел в окрестности контактного взаимодействия вследствие нагрева значительно (на несколько порядков) меньше радиусов контактирующих тел, функциями которых являются  $a$  и  $b$ .

**Распределение температуры при циклическом трении.** Величина скорости тепловыделения при трении двух тел на единичной площадке непосредственно под поверхностью контакта при действии контактного давления  $p$  имеет вид [6]

$$\dot{q} = fvp,$$

где  $f$  – коэффициент трения,  $v$  – линейная скорость при движении ролика по валу.

Поверхность вне контакта будем считать теплоизолированной. Общая формула для скорости движущегося вдоль оси  $x$  источника тепла будет следующей:

$$\dot{q}(x, y, t) = fvp(x - vt, y).$$

В силу того, что площадка контакта мала по сравнению с радиусами ролика и вала, то тепловыделение в системе вследствие трения будем рассматривать как циклическое при движении источника тепла вдоль отрезка  $[-l, l]$  на поверхности полупространства ( $l$  – длина окружности вала). Таким образом, окончательный вид циклической тепловой нагрузки будет следующим:

$$\dot{q}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{q}_1 \left( x, y, t - \frac{2(a+l)}{v} i \right), \quad (1)$$

где

$$\dot{q}_1(x, y, t) = \dot{q}_0(x - vt, y) (H(x+l) - H(x-l)) H(t),$$

$$\dot{q}_0(x, y) = fvp_0 \sqrt{1 - \left( \frac{(x - (l-a))^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} \times H \left( 1 - \left( \frac{(x - (l-a))^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right).$$

Решение задачи теплопроводности при движении источника тепла по поверхности полупространства со скоростью  $\dot{q}(\xi, \eta, \tau)$  дается следующей формулой [7]:

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \int_S \dot{q}(\xi, \eta, \tau) G^{(T)}(x - \xi, y - \eta, z, t - \tau) d\xi d\eta d\tau, \quad (2)$$

$$\text{где } G^{(T)}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c(\pi\kappa t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{R^2}{4\kappa t}}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Физический смысл фундаментального решения  $G^{(T)}(x, y, t)$  заключается в определении распределения температуры от мгновенно высвободившегося в начале координат на поверхности единичного количества теплоты.

Используя формулы (1), (2), получим распределение температуры в теле от циклически движущегося вдоль отрезка источника теплоты:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_1 \left( x, y, z, t - \frac{2(a+l)}{v} i \right), \quad (3)$$

где

$$T_1(x, y, z, t) = \int_0^t \int_S q_1(\xi, \eta, \tau) G^{(T)}(x - \xi, y - \eta, z, t - \tau) d\xi d\eta d\tau$$

представляет собой распределение температуры от единойжды прошедшего отрезок  $[-l, l]$  источника теплоты. На рисунке 2 приведены графики для  $T_1$  в сечении  $y = 0$  в разные моменты времени. Графики строи-

лись для следующих расчетных данных:  $p_0 = 3 \cdot 10^9$  Па;  $f = 0,05$ ;  $a = 1,781 \cdot 10^{-4}$  м;  $b = 1,351 \cdot 10^{-4}$  м;  $l = 0,005$  м;  $\kappa = 0,044 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с;  $c = 462$  Дж/(кг·К);  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>;  $v = 2\pi\omega_2 l / 60 = 1,57$  м/с;  $\omega_2 = 3000$  об/мин. Большая полуось эллипса контакта  $a$  параллельна оси  $x$ ,  $b$  параллельна оси  $y$ .

Из рисунка 2 видно, что в момент времени  $t$  максимум распределения температуры находится на поверхности полупространства в окрестности движущегося источника тепла (области контактного взаимодействия с трением). Температура полупространства со временем постепенно затухает после прохождения источником тепла.

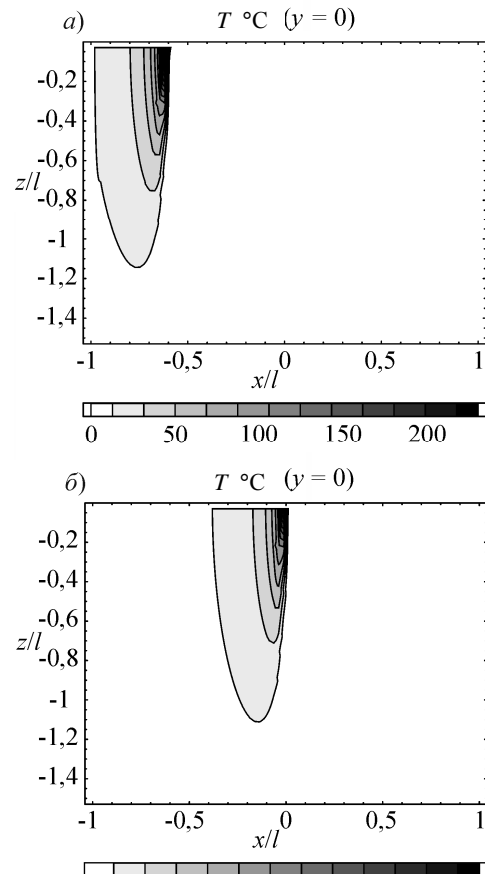


Рисунок 2 – Распределение температуры в моменты времени:

$$\text{а) } t = 2 \frac{2l+a}{V}; \quad \text{б) } t = 5 \frac{2l+a}{V}$$

**Термоупругие напряжения.** Зная распределение температуры в окрестности контакта, можно найти напряженно-деформированное состояние тела [8, 9]. Однако для нестационарного распределения тепла этот процесс представляет собой определенные трудности. Поэтому ограничимся рассмотрением напряженно-деформированного состояния от установившейся после многих циклов трения стационарной температуры на поверхности, являющейся пределом осредненного по времени выражения для  $T$ :

$$T^{(st)}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(x, y, 0, t) dt.$$

Аналитическое существование предела для указанного выражения установить довольно сложно. Прове-

денный для принятых параметров системы численный эксперимент показал, что в некоторой точке на пути трения осредненная по времени температура  $T^{st}$  возрастает не бесконечно, а лишь до некоторого значения, что объясняется рассеянием тепла в полупространстве. Из рисунка 3 видно, что после многих циклов температура  $T^{st}$  достигает предельного значения:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sT^L(s),$$

где индексом  $L$  обозначено изображение функции по Лапласу.

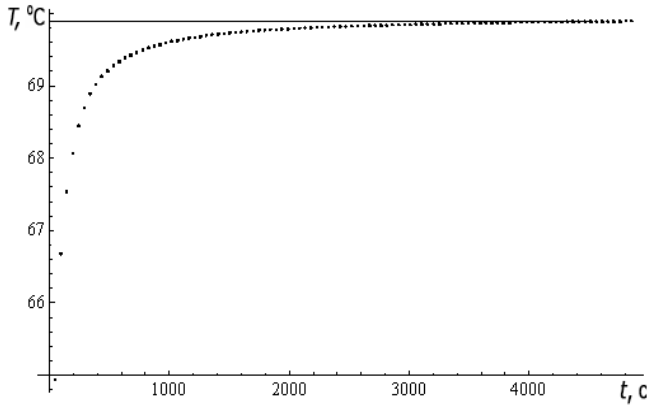


Рисунок 3 – Распределение температуры  $T^{st}$  во времени

Таким образом, температурное поле для всего полупространства рассчитывается следующим образом [8]:

$$T(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_s T^{(st)}(\xi, \eta) \times \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\xi d\eta, \quad (4)$$

а формулы для напряжений имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(T)}(x, y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_s T^{(st)}(\xi, \eta) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\xi d\eta, \\ \sigma_{yy}^{(T)}(x, y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_s T^{(st)}(\xi, \eta) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\xi d\eta, \\ \sigma_{xy}^{(T)}(x, y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_s T^{(st)}(\xi, \eta) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\xi d\eta, \\ \sigma_{zz}^{(T)}(x, y, z) &= 0, \sigma_{xz}^{(T)}(x, y, z) = 0, \sigma_{yz}^{(T)}(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следует отметить, что при установившемся тепловом режиме полупространства отсутствуют температурные напряжения на плоскостях, параллельных его границе [8], поэтому в формулах (5) напряжения  $\sigma_{zz}^{(T)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(T)}$ ,  $\sigma_{yz}^{(T)}$  равны 0.

При движении ролика по валу после некоторого количества циклов устанавливается постоянная вдоль до-

рожки качения температура, т.е. распределение температуры не зависит от полярного угла. В рассматриваемом случае аналогом полярного угла является координата  $x$  вдоль движения источника тепла. Следовательно, можно перейти к плоской задаче термоупругости для установившегося вдоль  $y$  кругового распределения температуры в силу (1)  $T^{(st)}(y) = T^{(st)}(0, y)$ . Формулы (5) в данном случае примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^b T^{(st)}(\eta) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln(\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\xi d\eta, \\ \sigma_{yy}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^b T^{(st)}(\eta) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\eta dx, \\ \sigma_{xy}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^b T^{(st)}(\eta) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial xy} \ln(\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z) d\eta dx, \\ \sigma_{zz}^{(T)}(y, z) &= 0, \sigma_{xz}^{(T)}(x, y, z) = 0, \sigma_{yz}^{(T)}(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Производя интегрирование по бесконечному промежутку в формулах (6), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-b}^b T^{(st)}(\eta) \times \\ &\times \left( x \left( \frac{-R^3 + z(R^2 + (y-\eta)^2)}{R^3 r^2} \right) \right)_{-\infty}^{\infty} d\eta, \\ \sigma_{yy}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-b}^b T^{(st)}(\eta) \left( \frac{x(R^2 - zR)}{R^2 r^2} \right)_{-\infty}^{\infty} d\eta, \\ \sigma_{xy}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-b}^b T^{(st)}(\eta) \left( \frac{(y-\eta)}{R^2 + zR} \right)_{-\infty}^{\infty} d\eta, \end{aligned}$$

где  $R = \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}$ .

Предельный переход по соответствующим пределам интегрирования приводит формулы (6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(T)}(y, z) &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{2\pi} \int_{-b}^b T^{(st)}(\eta) \frac{2z}{(y-\eta)^2 + z^2} d\eta, \\ \sigma_{xx}^{(T)}(y, z) &= 0, \sigma_{xy}^{(T)}(y, z) = 0, \sigma_{zz}^{(T)}(y, z) = 0, \\ \sigma_{xz}^{(T)}(x, y, z) &= 0, \sigma_{yz}^{(T)}(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из формул (7) видно, что в итоге остается один ненулевой компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}^{(T)}$ . Если также упростить выражение для распределения температуры (4) применительно к плоской задаче, то можно убедиться, что оно отличается от напряжения только отсутствием множителя  $-2\mu\alpha(1+\nu)$ . Из рисунка 4 видно, что при действии стационарного источника тепла

температура и термоупругие напряжения распределяются симметрично оси  $z$  и достигают максимальных значений  $97^\circ\text{C}$  и  $0,13p_0$  на поверхности трения, быстро затухая при удалении от нее.

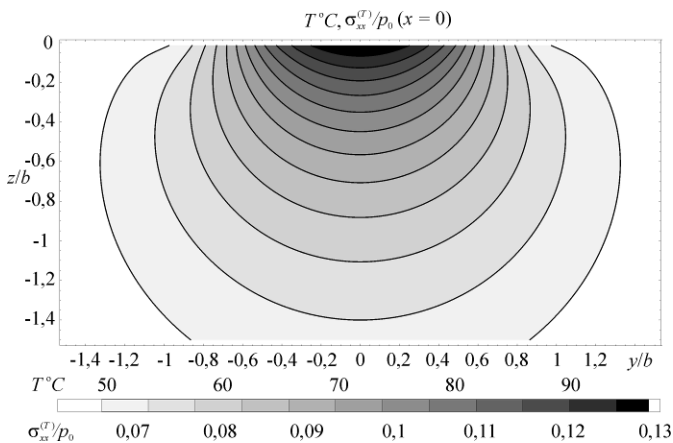


Рисунок 4 – Установившиеся распределения температуры и сжимающие напряжения  $\sigma_{xx}^{(T)}$  при действии циклического источника теплоты

**Объединенное напряженно-деформированное состояние.** Расчет напряжений  $\sigma_{ij}^{(n)}$  в любой точке  $M(x,y,z)$  полупространства при действии на поверхность нормальных контактных усилий  $p^{(n)}(x,y)$  может быть произведен с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(B)}$  из фундаментального решения задачи Буссинеска о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [6]:

$$\sigma_{ij}^{(n)}(x, y, z) = \int_S p^{(n)}(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta, \quad (8)$$

где

$$G_{xx}^{(B)}(x, y, z) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\},$$

$$G_{yy}^{(B)}(x, y, z) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\},$$

$$G_{zz}^{(B)}(x, y, z) = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5},$$

$$G_{xy}^{(B)}(x, y, z) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\},$$

$$G_{xz}^{(B)}(x, y, z) = -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \quad G_{yz}^{(B)}(x, y, z) = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5},$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Решение задачи (8) для эллиптического контактного взаимодействия (в том числе с учетом трения и неконтактных нагрузок) рассмотрено в работах [10–13].

В случае линейной зависимости между напряжениями и деформациями и линейности разрешающих уравнений объединенное напряженное состояние при одновременном действии контактных и стационарных тепловых нагрузок может быть получено суперпозицией соответствующих компонент тензоров напряжений

$$\sigma_{ij}^{(n+T)} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(T)}. \quad (9)$$

Отметим, что поскольку коэффициент трения качения между роликом и валом весьма мал ( $f = 0,05$ ), вклад силы трения качения в формирование напряженного состояния незначителен и в (9) не учитывается.

Как следует из формул (7), температура вызывает появление лишь одной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}^{(T)}$ . Из рисунка 5 видно, что сжимающие температурные напряжения  $\sigma_{xx}^{(T)}$  в целом увеличивают сжимающие напряжения  $\sigma_{xx}^{(n+T)}$  примерно на 13 % по сравнению с сжимающими напряжениями  $\sigma_{ij}^{(n)}$ , вызванными только контактным давлением.

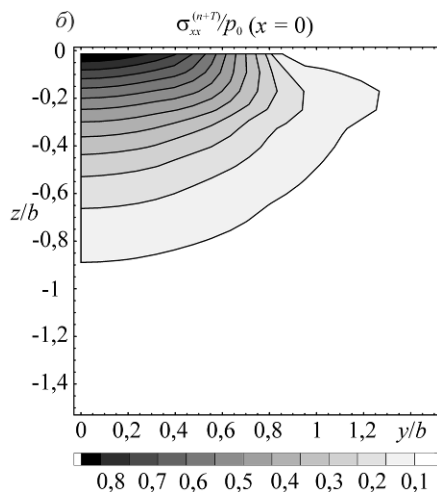
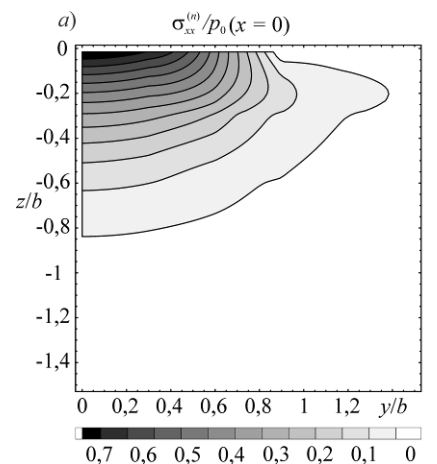


Рисунок 5 – Распределение напряжения  $\sigma_{xx}$  при действии: а – контактного давления; б – контактных и тепловых нагрузок

Таким образом, учет термоупругих напряжений, вызванных многоцикловым трением качения, позволяет существенно уточнить напряженно-деформированное состояние в области контактного взаимодействия.

#### Список литературы

- Евтушенко, А. А. Плоская контактная задача термоупругости при квазистационарном тепловыделении / А. А. Евтушенко, О. М. Уханская // Изв. РАН МТТ. – № 5. – 1994. – С. 37–45.
- Грилицкий, Е. В. Плоская контактная задача нестационарной термоупругости с учетом теплообразования от трения /

Е. В. Грилицкий, А. А. Евтушенко, В. И. Паук // Изв. РАН МТТ. – № 5. – 1994. – С. 62–68.

3 **Barber, J. R.** Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space / J. R. Barber // *Wear*. – Vol. 35. – 1975. – P. 283–289.

4 **Ворович, И. И.** Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001. – С. 476–490.

5 **Сосновский, Л. А.** Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.

6 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

7 **Карслоу, А.** Теплопроводность твердых тел / А. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

8 **Лурье, А. И.** Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

9 **Коваленко, А. Д.** Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 308 с.

10 **Журавков, М. А.** Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования / М. А. Журавков, С. С. Щербаков // Вести НАНБ. Сер. 1. – № 3. – 2008. – С. 60–64.

11 **Sosnovskiy, L. A.** Vibro-impact in rolling contact / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov // *Journal of Sound and Vibration*. – Vol. 308, Issues 3–5. – 2007. – P. 489–503.

12 **Щербаков, С. С.** Напряженно-деформированное состояние системы «диск – цилиндр» в условиях контактного взаимодействия и изгиба цилиндра / С. С. Щербаков // Весті НАНБ. Серія фіз.-техн. наук. – № 3. – 2010. – С 29–34.

13 **Круподеров, А. В.** Аналитическое решение задачи определения напряженно-деформированного состояния полупространства при действии на него распределенной нормальной нагрузки / А. В. Круподеров, С. С. Щербаков // Вестник БГУ. Сер. 1. – № 1. – 2010. – С. 17–21.

Получено 15.05.2016

**S. S. Sherbakov, A. V. Krupoderov.** Stress-strain state of roller-shaft system with the account of contact interaction and heat generated by friction.

Stress-strain state in the area of contact of two solids under the action of contact pressure and temperature, caused by friction between the contacting bodies is studied. Roller-shaft system operating in high-cycle regime under rolling friction is considered. Distribution of temperature in the system caused heat due to friction between the shaft and the roller is obtained. Spatial stress state of the system under the combined action of contact pressure and temperature is calculated. Calculation results showed significant change of stress distribution in the contact area due to the effect of the temperature load.