

УДК 620.178.16; 620.178.3

Л. А. СОСНОВСКИЙ, доктор технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, С. С. ЩЕРБАКОВ, доктор физико-математических наук, Белорусский государственный университет, Минск, В. В. КОМИССАРОВ, кандидат технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ЗАКОН (ВНЕШНЕГО) ТРЕНИЯ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Дан аналитический обзор известных законов трения. Для трибофатической системы представлен обобщенный закон трения.

Введение. Как известно, всякая научная дисциплина призвана и имеет своей целью понять и описать те или иные закономерности и особенности развития определенных явлений, ситуаций, событий, обусловленных существованием некоторых реальных или мыслимых объектов, которые обнаруживают специфические свойства [1]. Если говорить о трибологии, то она занимается, по существу, двумя явлениями: трением и изнашиванием. При этом понятие о трении представляется фундаментальным [2–13 и мн. др.]. Было бы удивительно, если бы такого ранга явление не обнаруживало своих, специфических, законов. И совсем неудивительно, что главный – первый закон трения обсуждается специалистами (в той или иной постановке) вот уже несколько столетий. Ниже излагается очередной взгляд на проблему трения. Необходимость нового анализа диктуется практикой: оказалось, что реально существует и является весьма ответственным своеобразный технический объект – силовая система [1]. Так называют всякую пару трения, один из элементов которой дополнительно воспринимает и передает повторно-переменную (в частности – циклическую) нагрузку, которая обуславливает его объемное деформирование (растяжение-сжатие, изгиб, кручение и т. д.) [37]. В работе проводится сравнительный анализ применительно к этим двум объектам.

1 Пара трения. Обычная формулировка общепризнанного в трибологии закона трения, называемого также законом Амонтона, такова: *сила трения (F_S) прямо пропорциональна контактной нагрузке (F_N), т. е.*

$$F_S = f F_N. \tag{1}$$

где f – коэффициент трения. Его содержательный смысл: если растет контактная нагрузка F_N , то сила трения F_S увеличивается соответственно – так, что их отношение F_S / F_N остается постоянным:

$$F_S / F_N = f = \text{tg } \alpha = \text{const}. \tag{2}$$

Рисунок 1, а иллюстрирует зависимости (1) и (2). Из них следуют основные заключения:

– в заданных условиях рост коэффициента трения f возможен только при увеличении соотношения (F_S / F_N)

силы трения и контактной нагрузки (другими словами, при заданном $f = \text{const}$ невозможно, чтобы, например, повышалась контактная нагрузка, а сила трения оставалась бы при этом неизменной);

– имеют место взаимообусловленные неравенства

$$0 \leq F_S \leq F_N, \tag{3}$$

$$0 \leq \alpha \leq 45^\circ, \tag{4}$$

$$0 \leq f_n \leq 1, \tag{5}$$

$$f_{\text{lim}} = 1 > f_n, \tag{6}$$

в соответствии с которыми сила трения не может превысить величину контактной нагрузки – согласно (3); коэффициент трения не может быть больше единицы – согласно (5), так что его значение (6) является предельным; угол трения α не может превышать 45° – согласно (4).

Эти заключения относятся лишь к «обычному трению» – при упругом деформировании в воздухе; в других условиях (например, в глубоком вакууме и др.) они нарушаются.

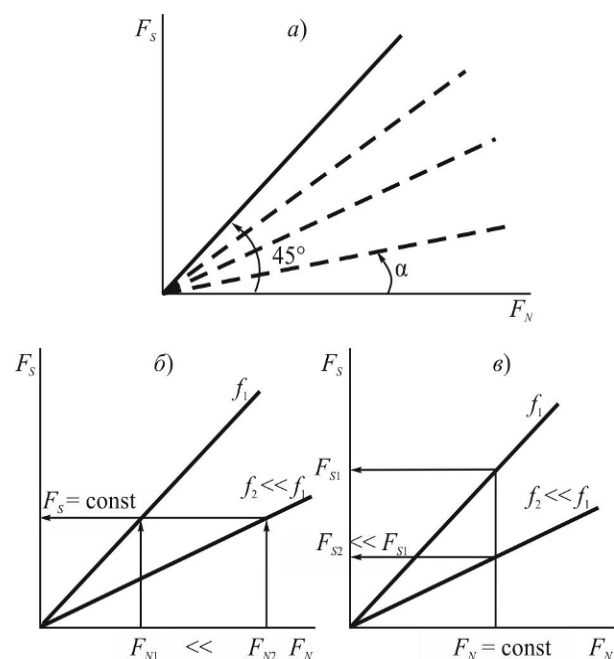


Рисунок 1 – К графической иллюстрации закона трения (Амонтона)

На рисунке 1, б и 1, в дополнительно иллюстрируется смысл коэффициента трения в соответствии с законом (1) – путем сравнения двух пар трения, для которых численные значения f существенно различны ($f_2 \ll f_1$). Если требуется повысить нагрузочную (несущую) способность ($F_{N2} \gg F_{N1}$, рисунок 1, б) пары трения при сохранении силы трения неизменной ($F_S = \text{const}$), необходимо обеспечить условия трения (материалы трущихся элементов, смазка и т. д.), в которых соответственно снижается коэффициент трения ($f_2 \ll f_1$). Нетрудно видеть, что это – алгоритм решения задачи об износостойкости массовых компонентов общемашиностроительного применения – узлов трения. А если, наоборот, требуется повысить силу трения ($F_{S1} \gg F_{S2}$, рисунок 1, в) при сохранении контактной нагрузки неизменной ($F_N = \text{const}$), необходимо обеспечить условия трения, в которых соответственно растет коэффициент трения ($f_1 \gg f_2$). Нетрудно видеть, что это – алгоритм решения задачи о выборе материалов для специфических узлов трения – тормозных систем.

Закон трения (1) относят к единичной площади контакта

$$\frac{F_S}{A_0} = f \frac{F_N}{A_0}, \quad (7)$$

где A_0 – номинальная площадь контакта, и тогда он является удельным

$$\tau_w = fp_a, \quad (7a)$$

и он, закон (1), записан в форме (7a) для случая, когда номинальное давление p_a распределено равномерно по этой площади. Из (7a) следует, аналогично (2), что

$$f = \tau_w / p_a = \text{const}, \quad (7б)$$

т. е. коэффициент трения тоже не может зависеть от площади контакта, поскольку он относится к «одной» единице (измерения) этой площади (кстати напомним, что указанная единица может быть как малой, например, 1 мм², так и большой, например, 1 м²). Заметим, что в (7a) и (7б) введено фрикционное напряжение $\tau_w = F_S / A_0$, которое называют и удельной силой трения.

В литературе известно много форм закона (моделей) внешнего трения, сформулированных различными учеными. В таблицах 1–3 дана краткая сводка некоторых известных модификаций этого закона, предложенных многими авторами в разное время. Они отражают развитие представлений о процессе трения и отличаются стремлением авторов учесть некоторые (многообразные) явления, характерные для внешнего трения при нормальных условиях.

Так, одночленные модели (таблица 1) учитывают только одно явление (фактор), обуславливающее возникновение сил сопротивления относительно перемещению. Это, как правило, учет либо физической деформации поверхности, либо адгезии, либо энергетических потерь. Двучленные модели (таблица 2) позволяют учесть одновременную реализацию в зоне трения двух явлений. Чаще всего это адгезионно-деформационные

модели. В моделях – многочленных функциях (таблица 3) учитывается, кроме того, влияние смазки, скорости, смещения и других параметров.

В случае неравномерного распределения контактного давления (и, следовательно, фрикционных напряжений), в пределе можно прийти к представлению о коэффициенте трения в точке [1] – подобно тому, как в механике деформируемого твердого тела рассматривается система нормальных и касательных напряжений в точке.

Таблица 1 – Одночленные модели закона трения

Автор(ы)	Закон (теория)	Источник
Amontons	$F_{\text{тр}} = fN$	[11]
Coulomb	$F = \frac{\lambda N}{r}$ $F_c = \mu F_N \text{sgn}(v)$	[11, 49]
Tomlinson G.	$f \sim N^{1/3}$	[4, 14]
Bowden F., Tabor D.	$f = \tau_{\text{цвс}} / HB_{\text{min}}$	[3]
Liu J.	$f \approx 20 E_{\text{пл}} / \sigma_{\tau}$	[7, 28]
Rigney D.A., Hirth J. P.	$f = \frac{w\tau_{\text{цс}}}{N}$	[7, 29]
Tsuya Y.	$W_{\text{тр}} = \int \rho E_{\text{тр}} dV$ $F_{\text{тр}} = \rho w t \langle E_{\text{тр}} \rangle$	[7, 33]
Сосновский Л.А. Щербаков С.С. Комиссаров В.В.	$f_s = f_E \frac{\delta_c}{\gamma_s}$	[17]
Федоров С.В.	$\mu = \frac{\tau_1}{\tau_*}$	[70]

Таблица 2 – Двучленные модели закона трения

Автор(ы)	Закон (теория)	Источник
Coulomb	$F_{\text{тр}} = F_0 + f_1 N$ $T = A + fN$	[11, 14]
Дерягин	$F_{\text{тр}} = F_0 + f_1 N$ $f_0 = f_0 \left(1 + \frac{A_0 p_0}{P} \right)$	[7, 19, 5]
Алексеев Н. М.	$\tau = \tau_0 + \beta N$	[24, 25]
Елифанов Е.И.	$F = \Theta_0 A + kL$	[34, 24]
Bowden F., Tabor D.	$F = [\alpha \tau_M + (1 - \alpha) \tau_L] A$	[3]
Knott J.F.	$f = 8\gamma / (Hd)$ – для хрупких материалов; $f = 2\gamma_{\text{пл}} / (Hd)$ – для пластичных материалов или $f = \frac{1}{6} \frac{K_{fc}^2}{EHd}$	[48]

2 Силовая (трибофатическая) система. Сделанный выше краткий анализ относится только к паре трения. Посмотрим, выполняется ли закон (7a) для случая трения в трибофатической системе. На рисунке 2 представлена её простейшая схема: трение скольжения в системе типа вал / подшипник, для которой характерно одновременное объемное циклическое деформирование (изгибающий момент M) одного из её элементов – вала.

Таблица 3 – Модели закона трения (многочленные функции)

Автор(ы)	Закон (теория)	Источник
Сосновский Л.А., Щербakov С.С., Комисаров В.В. [17]	$f_{\sigma}^{cm} = f_s + f_{cm} = f_s \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{p_a} \right) + \frac{1}{h} \frac{\eta v}{p_a}$	
Suh N. P., Sridharan P. [6, 14, 33, 34]	$f = \begin{cases} Km\sigma_0 \left(\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\alpha\delta \right), & \delta < x_0; \\ Km\sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_0 x_0}{\delta} - \frac{\alpha x_0^2}{2\delta} + \varepsilon_1 \delta^{-\beta} \left[1 - \left(\frac{x_0}{\delta} \right)^{1-\beta} \right] \frac{1}{1-\beta} \right), & \delta > x_0 \end{cases}$	
Suh N. P., Sridharan P. [7, 30–32]	$f_{cm} = f_{cyx} + \rho C_p \Delta T_{an} \frac{V_{cm}}{NL}$	
Пожбелко В.И. [16]	$F_s = f_k N \left(1 + \frac{1}{2} [1 - \exp(-k_0 t_0)] \left[1 - \exp\left(1 - \frac{k_1}{v_H}\right) \right] \right)$	
Armstrong-H'elouvy B., Dupont P., Canudas de Wit C., Hensen R.H.A. [51, 52]	$F_f(\dot{x}, t) = \left(F_c + F_v \dot{x} + F_s(\gamma, t) \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{x}(t - \tau_{fL})}{\dot{x}_s} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{x})$	
Dahl P. R. [53, 54]	$\frac{dF_f(x)}{dx} = \sigma \left 1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sgn}(\dot{x}) \right ^n \text{sgn} \left(1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sgn}(\dot{x}) \right)$ $f_f = \sigma_0 z, \sigma_0 > 0; \dot{z} = \dot{x} \left(1 - \frac{\sigma_0}{F_c} \text{sgn}(\dot{x}) z \right)$	
LuGre [55, 56]	$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \ddot{x}$ $f_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \ddot{x}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 > 0;$ $\dot{z} = \dot{x} \left(1 - \frac{\sigma_0}{ f_{ss}(\dot{x}) } \text{sgn}(\dot{x}) z \right)$	
Dupont P., Hayward V., Armstrong B., Altpeter F. [57]	$f_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \ddot{x},$ $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 > 0; \dot{z} = \dot{x} \left(1 - \alpha(z, \dot{x}) \frac{z}{z_{ss}(\dot{x})} \right)$	
Swevers J., Al-Bender F., Ganseman C. G., Prajogo T. [58]	$F_f = F_h(z) + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \ddot{x};$ $\dot{z} = \dot{x} \left(1 - \text{sgn} \left(\frac{F_d(z)}{S(v) - F_b} \right) \cdot \left \frac{F_d(z)}{S(v) - F} \right ^n \right);$ $S(v) = \text{sgn}(v) \left(F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(v /v_s \right)^{\lambda}} \right)$	
Lampaert V., Swevers J., Al-Bender F. [59]	$F_f = F_h(z) + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \ddot{x};$ $\dot{z} = \dot{x} \left(1 - \text{sgn} \left(\frac{F_h(z)}{S(v)} \right) \cdot \left \frac{F_h(z)}{S(v)} \right ^n \right);$ $S(v) = \text{sgn}(v) \left(F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(v /v_s \right)^{\lambda}} \right)$	

Примечание – $F_{тр}$ – сила трения; f – коэффициент трения; N – нормальная нагрузка; F – сила трения качения; λ – коэффициент сопротивления качению; N – нормальная нагрузка; r – радиус образца; $\tau_{срез}$ – сопротивление срезу мостиков холодной сварки между металлами; $H_{Вmin}$ – твердость более мягкого материала; $E_{пл}$ – работа пластической деформации единицы объема; σ_r – предел текучести; w – ширина дорожки

трения; t – толщина слоя; τ – сдвигающее напряжение; ε – деформация поверхностной зоны; параметр $x = 1$ – для чисто упругого контакта; параметр $x = 0$ – для чисто пластического контакта; f_E – энергетический аналог коэффициента трения; δ_c – сближение осей в паре трения; γ_s – критическая (максимальная) величина предварительного смещения – фрикционного сдвига, соответствующая началу трения движения; $W_{пл}$ – работа, затраченная на пластическую деформацию металла; F_0 – сила адгезионного взаимодействия; β – пьезокоэффициент, зависящий от структурной неоднородности среды; τ_0 – предельная величина деформации сдвига; h – толщина слоя масла; η – динамическая вязкость масла; v – скорость трения; p_a – номинальное давление на площадке контакта; δ – толщина частиц износа при трении; x – глубина пластически деформируемой зоны; $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \beta, x_0$ – параметры поверхностного распределения пластически деформированной зоны $\varepsilon_{пл}(x)$; $K = I_v/(NL)$ – величина, характеризующая стационарный процесс изнашивания; m – коэффициент пропорциональности между изменением деформации и эквивалентной деформацией в i -м цикле; $E_{пл}$ – объемная плотность энергии деформации, оцениваемая на основе данных по измерению микротвердости в образце с глубиной; ρ – плотность материала; γ – поверхностная энергия; $\gamma_{пл}$ – поверхностная энергия разрушения по Ирвину; H – твердость; d – средний диаметр мостика схватывания; E – модуль Юнга; K_{lc}^2 – вязкость разрушения; f_{cm} – коэффициент трения со смазкой; f_{cyx} – коэффициент трения для несмазанного контакта; C_p – объемная теплоемкость смазочной жидкости; $\Delta T_{ан}$ – скачок температуры жидкости в условиях адиабатического процесса нагружения; V_{cm} – объем смазочной жидкости, подвергшейся сжимающему воздействию ползуна; L – путь трения; p – парциальное давление паров адсорбата; p_r – фактическое давление в контакте; p_s – давление насыщенного пара адсорбата; V_m – молярный объем жидкой фазы адсорбата; $\alpha \sim 1$ – геометрический множитель; θ_c и θ_s – степени заполнения поверхности адсорбатом для контакта и свободной поверхности; z – полуширина щели, для которой существует эмпирическая формула, связывающая ее со средним радиусом R молекулы адсорбата.

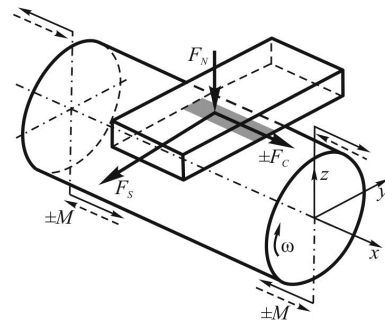


Рисунок 2 – Схема нагружения силовой системы типа вал/подшипник скольжения

2.1 Феноменологический подход. Согласно закону Амонтона (1) можно указать две характеристики однонаправленного процесса трения скольжения (его отмечает индекс S в формулах): силу трения (рисунок 3, а)

$$F_S = f_S F_N = \tau_w A_a \quad (8)$$

и коэффициент трения

$$f_S = \frac{F_S}{F_N} = \frac{\tau_w}{p_a} \quad (9)$$

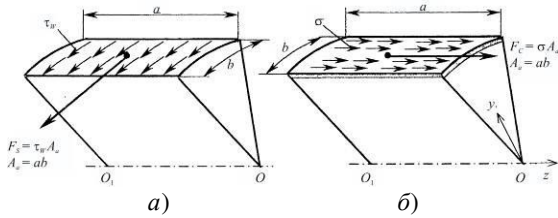


Рисунок 3 – К определению однонаправленной («статической») (а) и циклической (б) составляющих силы трения в силовой системе (OO_1 – ось вала)

Если бы скольжения не было, аналогичные характеристики описывали бы трение (проскальзывание) при циклическом деформировании (его отмечает индекс C в формулах): циклическая сила трения (рисунок 3, б)

$$\pm F_C(t) = f_C(t) F_N = \sigma(t) A_a = M(t) \frac{A_a}{W} \quad (10)$$

и циклический коэффициент трения

$$\pm f_C(t) = \frac{F_C(t)}{F_N} = \frac{\sigma(t) A_a}{F_N} = \frac{M(t) A_a}{F_N W} \quad (11)$$

В отличие от формул (8) и (9), в (10) и (11) учтено изменение характеристик трения во времени t и принят во внимание тот факт, что циклические напряжения могут менять знак ($\pm\sigma$), т. е. в зоне трения возникают либо напряжения сжатия ($-\sigma$), либо напряжения растяжения ($+\sigma$), обусловленные повторно-переменной нагрузкой.

Четыре частные характеристики (8)–(11) можно свести к двум относительным комплексным характеристикам трения в силовой системе

$$\pm F_C / F_S = \pm f_{C/S} \quad \text{и} \quad \pm f_C / f_S = \pm f_{C/S},$$

которые, как нетрудно заметить, имеют одинаковое численное значение

$$\pm f_{C/S} = \pm f_C / f_S = \pm \sigma_a / \tau_w = \pm \sigma_a / f_S p_a$$

в случае, если циклическое деформирование описывается наибольшим значением переменного напряжения – амплитудой σ_a .

Таким образом, хотя трение в силовой системе есть более сложное явление, чем трение при (чистом) скольжении, тем не менее оно может быть описано единственной характеристикой

$$f_F = \pm \sigma_a / \tau_w = \pm \sigma_a / f_S p_a, \quad (12)$$

которая является комплексным показателем трения в силовой системе; его называют индексом трения в силовой системе [9]. Как видно из выражения (12), индекс трения в силовой системе связан с коэффициентом трения в аналогичной ей паре трения обратной зависимостью

$$f_S = \pm \frac{\sigma_a}{f_F p_a}. \quad (12a)$$

При этом между ними принципиальным является следующее различие: если коэффициент трения – всегда величина положительная, то индекс трения может быть положительным либо отрицательным в зависимости от знака циклических напряжений, возбуждаемых в зоне контакта.

Теперь вернёмся к закону (1) в форме (7а) для случая трения скольжения. В простейшей силовой системе (см., например, рисунок 2), на одной и той же площадке контакта A_a одновременно действуют и фрикционные (τ_w) и циклические (σ_a) напряжения (см. рисунок 3). Какой будет форма закона трения в таком случае?

Теоретически показано (см., например, [1, 9, 10]) и экспериментально подтверждено (см., например, [1, 11]), что все характеристики трения зависят от величины внеконтактной нагрузки, если напряжения, ею вызванные, распределены в области контакта. Поэтому ясно, например, что (удельная) сила трения (τ_w) есть функция циклических напряжений (σ_a) в силовой системе – $\tau_w(\sigma)$. Введя обозначение τ_σ для силы трения в такой системе, имеем

$$\tau_\sigma = \tau_w(\sigma) = \tau_\sigma(\tau_w, \sigma_a) = \tau_\sigma(\sigma_a / \tau_w). \quad (13)$$

Поскольку в общем случае сила трения пропорциональна нагрузке в контакте, функцию (13) следует считать линейной, т. е.

$$\tau_\sigma = \tau_w \pm \mu_p \sigma_a, \quad (14)$$

где параметр

$$0 \leq \mu_p \leq 1,0, \quad (15)$$

а знак (\pm) учитывает возможность реализации трения в зоне растяжения или сжатия. Если $\mu_p = 0$, то σ_a не влияет на величину τ_σ . Это возможно в двух ситуациях: 1) в системе отсутствуют циклические напряжения; 2) циклические напряжения возбуждаются, но они не обнаруживаются в области контакта. В обоих этих случаях речь идет об обычной паре трения, для которой всегда $\mu_p = 0$ (и $\sigma_a = 0$). Если же $\mu_p = 1$, то это означает, что τ_w и σ_a действуют на одной площадке и сонаправлены. Такой будет ситуация, например, при возвратно-поступательном движении индентора 1 по пластине 2, подвергаемой растяжению-сжатию силой $\pm Q$ (рисунок 4). Очевидно, это случай наибольшего влияния σ_a на τ_σ в силовой системе. Во всех промежуточных случаях ($0 < \mu_p < 1,0$) «взаимодействие» между τ_w и σ_a (чтобы изменить величину τ_σ) тоже окажется промежуточным, при этом рост величины μ_p тождествен усиленному указанному взаимодействию. Нетрудно понять, что в случае ортогональной направленности τ_w и σ_a (как показано, например, на рисунках 2 и 3), величина $\mu_p \neq 0$, так как $\sigma_a \neq 0$. И, наконец, поскольку величина σ_a может быть положительной либо отрицательной, она способна, в соответствии с выражением (14), увеличивать либо уменьшать значение τ_σ (по сравнению с τ_w). Следовательно, измеренная в силовой системе в направлении движения сила трения может оказаться меньше, больше или равной обычной силе трения в паре трения, т. е.

$$\tau_\sigma \geq \tau_w. \quad (16)$$

Соотношение (16) подтверждается и теоретически и экспериментально (см., например, [1, 9, 11]).

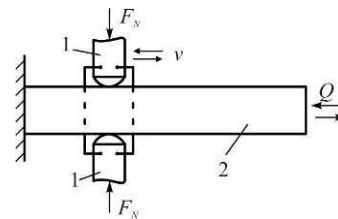


Рисунок 4 – Схема силовой системы, в которой F_C и F_S сонаправлены

В функцию (14) введем индекс трения в силовой системе (12)

$$\tau_\sigma = \tau_w \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{\tau_w} \right) = \tau_w (1 \pm \mu_p f_F). \quad (17)$$

И тогда видно, что величина τ_σ зависит и от соотношения σ_a/τ_w , что и отражено в выражении (13). Если разделить обе части формулы (17) на p_a , получим коэффициент трения в силовой системе

$$f_\sigma = f_s \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{\tau_w} \right) = f_s (1 \pm \mu_p f_F). \quad (17a)$$

В общем случае контактное давление в силовой системе p_σ тоже зависит от величины σ_a (см., например, [1]), т. е.

$$p_\sigma = p_\sigma(p_a, \sigma_a), \quad (18)$$

поэтому коэффициент трения в силовой системе

$$f_\sigma = \frac{\tau_\sigma(\tau_w, \sigma_a)}{p_\sigma(p_a, \sigma_a)}. \quad (19)$$

Если, в первом приближении, функцию (18) принять линейной

$$p_\sigma = p_a \pm \chi_p \sigma_a, \quad (20)$$

то выражение (19) с учетом (17) и (20) примет вид

$$f_\sigma = f_s \frac{1 \pm \mu_p f_F}{1 \pm \chi_p (\sigma_a / p_a)}. \quad (21)$$

Анализ зависимостей (17a) и (21) показывает, что прогнозируется возможность следующего соотношения между коэффициентами трения в силовой системе и соответствующей ей (по характеру движения) паре трения:

$$f_\sigma \geq f_s. \quad (22)$$

Данное соотношение, полученное на основе феноменологического подхода, подтверждается и теоретически, и экспериментально.

2.2 Теоретический анализ. В исследуемом случае (см. рисунок 2) в зоне взаимодействия образца и контробразца формируется напряженно-деформированное состояние при действии как контактной, так и неконтактной нагрузок. Это означает, что напряжения и деформации, вызванные внеконтактной нагрузкой, формируют дополнительные граничные условия на поверхности контакта. Это приводит к существенному изменению характеристик трения [38–41].

Теоретически сила трения в силовой системе $F_{\sigma p}$ может рассматриваться как некоторая функция обычной силы трения при скольжении (качении) $F^{(s)}$, которая возникает в окружном направлении (объект – пара трения), и внеконтактной составляющей $F^{(b)}$ силы трения, которая дополнительно возникает вследствие возбуждения неконтактных (циклических) напряжений (деформаций) [38, 41]. В общем случае силу трения в силовой системе представим как векторную сумму составляющих $F^{(s)}$ и $F^{(b)}$:

$$\mathbf{F}_{\sigma p} = \mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{F}^{(b)}, \quad (23)$$

Для определения $F^{(b)}$ рассмотрим объединенные распределения (зависящие как от контактной, так и внеконтактной нагрузок) нормальных p и касательных q контактных усилий на площадке контакта S . Их распределение в данном случае имеет следующий общий вид:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}[\mathbf{p}_s(F_N, S), \mathbf{p}_b(F_b, S)], \quad (24)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}[f^{(s)}, \mathbf{p}(F_N, F_b, S), \mathbf{q}_b(F_b, S)], \quad (25)$$

где F_N – контактная нагрузка; F_b – неконтактная нагрузка; p_s, q_s и p_b, q_b – усилия на площадке контакта, вызванные действием контактной (индекс s) и внеконтактной (индекс b) нагрузками соответственно; $f^{(s)}$ – коэффициент трения при наличии лишь контактной нагрузки, т. е. в паре трения.

Тогда коэффициент трения в точке $f^{(*)}$ примет вид

$$f^{(*)} = |\mathbf{q}|/|\mathbf{p}|.$$

Выражения (24), (25) в случае выполнения законов Гука и Кулона представимы в виде суперпозиций соответствующих распределений

$$\mathbf{p}(F_N, F_b, S) = \mathbf{p}_c(F_N, S) + \mathbf{p}_b(F_b, S), \quad (26)$$

$$\mathbf{q}(f^{(s)}, F_N, F_b, S) = \mathbf{q}_s(f^{(s)}, F_N, S) + \mathbf{q}_b(f^{(s)}, F_b, S) = \mathbf{e}_s f^{(s)} p(F_N, F_b, S) + \mathbf{q}'_b(F_b, S), \quad (27)$$

где $\mathbf{e}_s = \mathbf{q}_s/|\mathbf{q}_s|$ – единичный вектор касательного усилия при чистом контакте, \mathbf{q}'_b – касательные усилия на площадке контакта, вызванные действием внеконтактной нагрузки.

Из выражения (27) можно сделать важное заключение о том, что сила трения в силовой системе в общем случае не параллельна направлению движения.

Процедуры определения p_c, q_c хорошо известны [42–46]. Распределения p_b, q_b в выражениях (24), (25) будем определять на основе напряженно-деформированного состояния $\sigma_{ij}^{(b)}, \varepsilon_{ij}^{(b)}$ ($i, j = x, y, z$), обусловленного внеконтактной нагрузкой F_b . Пусть начало системы координат находится в центре площадки контакта, а ось z ей ортогональна и направлена против силы F_s . Тогда, в случае, если деформации совместны, для контактной площадки (с помощью обобщенного закона Гука) можно сформулировать граничные условия в перемещениях:

$$\bar{\mathbf{u}}_b|_S = \mathbf{u}_b \left(\varepsilon_{ij}^{(b)} \Big|_{S(z=0)} \right), \quad (28a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_b|_\Sigma = \mathbf{u}_b \left(\varepsilon_{ij}^{(b)} \Big|_{\Sigma(z=0)} \right). \quad (28b)$$

где Σ – внешность S в плоскости $z = 0$.

На основе (28), решая соответствующие интегральные уравнения теории контактного взаимодействия [42, 43], можно определить

$$p_b = p_b(\bar{\mathbf{u}}_b), \quad (29)$$

$$q_b = q_b(p_b, \bar{\mathbf{u}}_b). \quad (30)$$

Для конкретного напряженно-деформированного состояния $\sigma_{ij}^{(b)}, \varepsilon_{ij}^{(b)}$ можно, на основе выражений (6)–(28), сформулировать смешанные граничные условия.

В двумерном случае для граничных условий типа (28a), при отсутствии нагрузки вне контактной области, для определения усилий p_b, q_b можно воспользоваться системой интегральных уравнений, аналогичной системе уравнений для определения чисто контактных усилий [43],

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{q_b(t)}{x-t} dt = -\frac{\pi(1-2\nu)}{2(1-\nu)} p_b(x) - \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial \bar{u}_x^{(b)}(x)}{\partial x}, \quad (31)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{p_b(t)}{x-t} dt = \frac{\pi(1-2\nu)}{2(1-\nu)} q_b(x) - \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial \bar{u}_z^{(b)}(x)}{\partial x}. \quad (32)$$

где t_1, t_2 – границы контактной области.

Напряженное состояние рассматриваемой системы, вызванное изгибающей нагрузкой F_b , в области контакта определяется, в соответствии с формулой (4), главным образом компонентой $\sigma_{yy}^{(b)}$. Поскольку для рассматриваемого напряженного состояния выполняется условие (8), то граничные условия в области контакта будем формулировать в виде перемещений (28).

Выражения (6)–(8) описывают деформации и перемещения лишь в одном направлении. Запишем теперь выражения для всех ненулевых деформаций, вызванных на площадке контакта изгибающей внеконтактной нагрузкой F_b :

$$\varepsilon_{yy}^{(b)} = \frac{1}{E} \sigma_{yy}^{(b)}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(b)} = \varepsilon_{xx}^{(b)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}^{(b)}, \quad (34)$$

$$\varepsilon_{xy}^{(b)} = \varepsilon_{xz}^{(b)} = \varepsilon_{yz}^{(b)} = 0. \quad (35)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Перемещения точек области контакта, соответствующие деформированному состоянию (14)–(15), будут

$$\bar{u}_i^{(b)} = \int \varepsilon_{ii}^{(b)} di \Big|_{z=0} \quad (i = x, y, z). \quad (36)$$

Таким образом, в результате действия внеконтактной нагрузки F_b в области контакта появляются нормальные $\bar{u}_z^{(b)}$ и касательные $\bar{u}_x^{(b)}$, $\bar{u}_y^{(b)}$ к площадке контакта перемещения.

Из выражения (36) видно, что в области контакта суммарные перемещения не равны чисто контактным:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^{(s)} + \bar{\mathbf{u}}^{(b)} \neq \bar{\mathbf{u}}^{(s)}. \quad (37)$$

Для придания конкретного вида выражениям (17) рассмотрим соотношение (2) в виде

$$\sigma_{yy}^{(b)} = \frac{F_b(y-l)}{4(1+\nu)I} (R_2 + z), \quad (38)$$

где $I = \frac{\pi R_2^4}{64}$; R_2 – радиус вала; $l = l_1 - l_2$, l_1 – длина вала; l_2 – расстояние от точки закрепления вала до начала координат.

Из соотношения (19) видно, что если $-l_1 \leq y < l_2$ и F_b сонаправлена с контактной нагрузкой F_N (т.е. $F_b < 0$), то в области контакта имеют место растягивающие напряжения $\sigma_{yy}^{(b)}$.

Тогда перемещения (36), обусловленные изгибающей нагрузкой, примут вид

$$u_x^{(b)} = \int \varepsilon_{xx}^{(b)} dx = -\frac{\nu F_b(y-l)}{4E(1+\nu)I} (R_2 + z)x + C_x, \quad (39)$$

$$u_y^{(b)} = \int \varepsilon_{yy}^{(b)} dy = \frac{F_b(y-l)}{8E(1+\nu)I} (R_2 + z)y + C_y, \quad (40)$$

$$u_z^{(b)} = \int \varepsilon_{zz}^{(b)} dz = -\frac{\nu F_b(y-l)}{8E(1+\nu)I} (2R_2 + z)z + C_z. \quad (41)$$

Функции C_i в выражениях (39)–(41) определим из следующих соотношений:

$$u_x^{(b)} \Big|_{x=0} = 0, \quad u_y^{(b)} \Big|_{y=-l_2} = 0, \quad u_z^{(b)} \Big|_{z=-R_2} = w, \quad (42)$$

где w – перемещения нейтральной оси ($z = -R_2$), определяемые из уравнения изогнутой оси вала.

Поскольку область контакта перемещается вместе с валом при его изгибе, то в локальной системе координат, связанной с областью контакта, $w = 0$ и, таким образом, коэффициенты C_i будут

$$C_x = 0, \quad C_y = \frac{F_b(l_2 - 2l_1)}{8E(1+\nu)I} (R_2 + z)l_2, \quad (43)$$

$$C_z = -\frac{\nu F_b(y-l)}{8E(1+\nu)I} R_2^2.$$

Тогда перемещения (39)–(41) на поверхности контакта ($z = 0$) примут вид

$$\bar{u}_x^{(b)} = -\frac{\nu F_b(y-l)}{4E(1+\nu)I} R_2 x, \quad (44)$$

$$\bar{u}_y^{(b)} = \frac{F_b R_2}{8E(1+\nu)I} [y(y-2l) + l_2(l_2 - 2l_1)], \quad (45)$$

$$\bar{u}_z^{(b)} = -\frac{\nu F_b(y-l)}{8E(1+\nu)I} R_2^2. \quad (46)$$

Приступим теперь к определению распределений контактных усилий p_b , q_b приложенных к ролику. Будем рассматривать изменение силы трения только в направлении движения. Определять p_b будем лишь как функцию $\bar{u}_z^{(b)}$:

$$p_b = p_b(\bar{u}_z^{(b)}), \quad (47)$$

а q_b , в соответствии с законом Кулона, будет

$$q_b = f_s p_b(\bar{u}_z^{(b)}). \quad (48)$$

Тогда проекцию силы трения скольжения или качения (23) на направление движения (параллельно оси x) на основании выражений (26), (27) можно выразить с помощью единого соотношения:

$$\begin{aligned} F_{\sigma/p} &= F^{(s)} + F^{(b)} = \int_S f^{(s)} p(x, y) ds = \\ &= \int_S f^{(s)} [p_c(x, y) + p_b(x, y)] ds = f^{(s)} (F_N + P_b). \end{aligned} \quad (49)$$

Поскольку для ролика $p_c(x, y) > 0$, то при $F_b < 0$ ($\sigma_{yy}^{(b)} > 0$) $p_b(x, y) < 0$ и, следовательно, $p(x, y) < p_s(x, y)$, и наоборот. Иными словами, в зоне растяжения объединенное контактное давление уменьшается, а в зоне сжатия увеличивается.

Если разделить выражение (49) на F_N и провести несложные преобразования, то коэффициент трения в силовой системе можно записать в виде

$$f_{\sigma/p} = f^{(s)} + f^{(b)} = f^{(s)} \left[1 + k_{\sigma/p} \left(\frac{\sigma_{yy}^{(b)}}{p_0} \right) \right], \quad (50)$$

где p_0 – максимум распределения p , а $k_{\sigma/p}$ – функция, зависящая от отношения действующих в области контакта напряжений, вызванных внеконтактной и контактной нагрузками.

Рассмотрим два простейших подхода к определению контактных усилий для заданных перемещений $\bar{u}_z^{(b)}$.

В первом случае представим площадку контакта и полупространство под ней в виде цилиндрического сжимаемого стержня с поперечным сечением в форме площадки контакта. Высоту стержня примем равной R_2 , поскольку в системе координат, связанной с областью контакта, $u_z^{(b)} \Big|_{z=-R_2} = 0$. Тогда постоянными на поверхности контакта

(стержня) перемещениям $\bar{u}_z^{(b)}$ можно поставить в соответствие контактную (сжимающую стержень) силу $P_b^{(1)}$, которая находится из равенства $\bar{u}_z^{(b)}$ величине перемещения внешней поверхности стержня:

$$\bar{u}_z^{(b)} = \frac{P_b^{(1)}R_2}{ES} = \frac{P_b^{(1)}R_2}{E}, \quad (51)$$

Из (45) равномерное распределение контактного давления p_b будет

$$p_b^{(1)} = \frac{P_b^{(1)}}{S} = \frac{E\bar{u}_z^{(b)}}{R_2} = -\frac{\nu \sigma_{yy}^{(b)}|_{z=0}}{2}. \quad (52)$$

Тогда функции $k_{\sigma/p}$ примет вид

$$k_{\sigma/p}^{(1)} \left(\frac{\sigma_{yy}^{(b)}}{p_0} \right) = \frac{P_b^{(1)}}{F_s} = \frac{3p_b^{(1)}S}{2\pi p_0 a^2} = -\frac{3\nu \sigma_{yy}^{(b)}|_{z=0}}{4 p_0}. \quad (53)$$

Во втором случае примем предположение о том, что площадка контакта является кругом радиуса a и воспользуемся решением уравнений типа (31), (32) для задачи о взаимодействии штампа с плоской круговой контактной поверхностью в полупространство [42–44] на величину Dz . Постоянным на поверхности контакта перемещениям $\bar{u}_z^{(b)} = Dz$ поставим в соответствие контактную силу P_b , которая находится из соотношения

$$\bar{u}_z^{(b)} = Dz = \frac{P_b^{(2)}(1 - \nu^2)}{2Ea}. \quad (54)$$

т.е.

$$P_b^{(2)} = \frac{2Ea\bar{u}_z^{(b)}}{(1 - \nu^2)} = -\frac{naF_b(y - l)}{4(1 - \nu^2)(1 + \nu)l} R_2^2 = -\frac{na s_{yy}^{(b)}|_{z=0}}{(1 - \nu^2)} R_2. \quad (55)$$

Тогда коэффициент $k_b^{(2)}$ примет вид

$$k_{s/p}^{(2)} \frac{\sigma_{yy}^{(b)}}{p_0} = \frac{P_b^{(2)}}{F_s} = -\frac{3nR_2}{4pa(1 - \nu^2)} \frac{s_{yy}^{(b)}|_{z=0}}{p_0}. \quad (56)$$

Отметим, что распределение контактного давления в случае штампа с контактной поверхностью конечных размеров имеет вид

$$p_b^{(2)}(r) = \frac{P_b^{(2)}}{2pa\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (57)$$

Особенности на краях области контакта характерны для решения задачи для граничного условия типа (28а) и, очевидно, должны отсутствовать в решении для полной системы граничных условий (28а) и (28б).

Выполним расчет изменения коэффициента трения качения f_σ в виде (50) при $f^{(s)} = 0,5$; $\nu = 0,3$; $E = 2,01 \cdot 10^5$ МПа; $a = 5 \cdot 10^{-4}$ м; $R_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м (значения напряжений даны в МПа). При указанных значениях параметров функция $k_{\sigma/p} = 0,225$.

Функции $k_{s/p}^{(1)}$ (рисунки 5, 6, а), $k_{s/p}^{(2)}$ (рисунки 5, 6, б) при указанных значениях параметров будут

$$k_{\sigma/p}^{(1)} = 0,225; \quad (58)$$

$$k_{\sigma/p}^{(2)} = 0,787. \quad (59)$$

Анализ формулы (50) и рисунка 5 показывает, что в силовой системе – при одновременном действии контактной и внеконтактной нагрузок – коэффициент сопротивления качению $f_\sigma = f_r$ в зоне растяжения уменьшается по сравнению с коэффициентом трения при чистом качении $f^{(s)}$, а в зоне сжатия, напротив, увеличивается:

$$f_r(\sigma_{yy} > 0) < f^{(s)}, \quad (60)$$

$$f_r(\sigma_{yy} < 0) > f^{(s)}. \quad (61)$$

Увеличение внеконтактной нагрузки обуславливает отклонение значения трибофатического коэффициента трения качения от значения коэффициента трения при чистом качении (см. рисунок 5).

Из рисунка 6, представляющего поверхности значений коэффициента трения при различных значениях контактной и внеконтактной нагрузок, видно, что наибольшее отклонение коэффициента трения в силовой системе от коэффициента трения в паре трения будет при наибольшем абсолютном значении соотношения $\sigma_{yy}^{(b)} / p_0$.

2.3 Экспериментальный анализ. Указанные закономерности подтверждаются соответствующими экспериментальными результатами (рисунок 7) [1, 17].

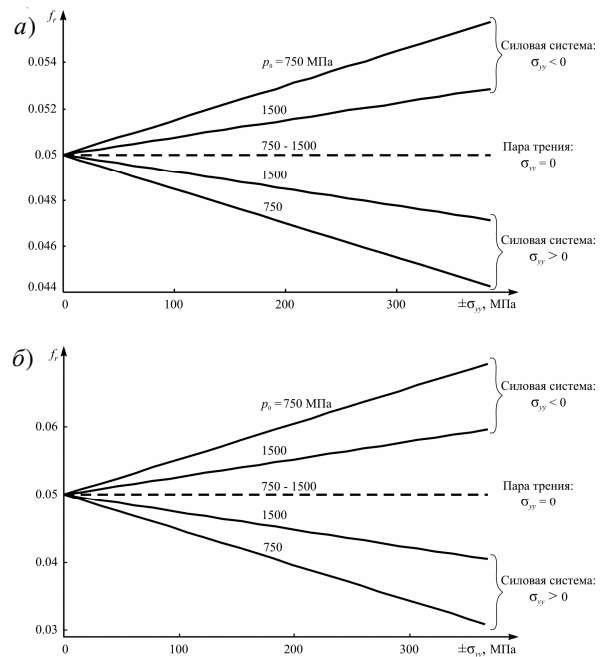


Рисунок 5 – Коэффициент трения качения как функция контактной (p_0) и внеконтактной (σ_{yy}) нагрузок для $k_{\sigma/p} = 0,225$ (а) и $k_{\sigma/p} = 0,787$ (б)

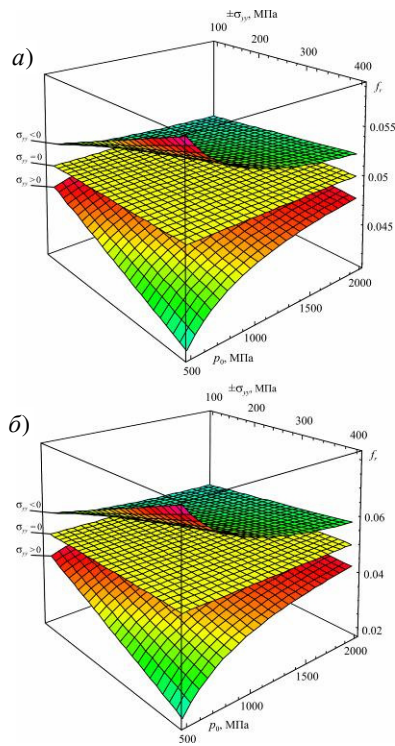


Рисунок 6 – Пространственные диаграммы f – σ_{yy} – p_0 для $k_{\sigma/p} = 0,225$ (а) и $k_{\sigma/p} = 0,787$ (б)

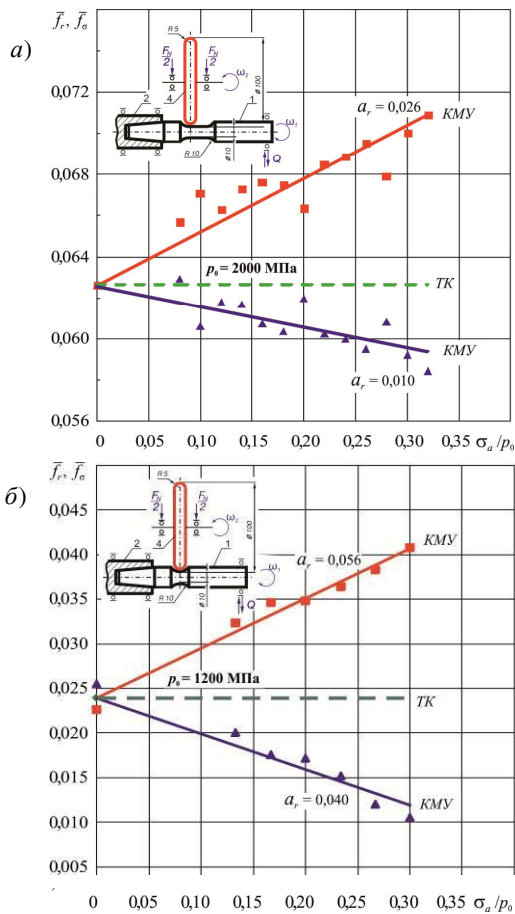


Рисунок 7 – Силовая система Ст18ХГТ/Ст18ХГТ (а) и силовая система Ст45/Ст25ХГТ (б): зависимость средних значений параметра трения в силовой системе \bar{f}_σ от соотношения σ_a/p_0 (пунктиром указано значение коэффициента сопротивления качению \bar{f}_r в паре трения)

Здесь представлены зависимости осредненных значений коэффициента сопротивления качению \bar{f}_σ (при постоянном значении контактных напряжений p_0) от параметра σ_a/p_0 для трибофатической системы сталь 18ХГТ/сталь 18ХГТ. Каждой точке на графике (см. рисунок 7, а) соответствуют ~ 20 значениям f_σ за время испытаний на одной ступени нагружения при $\sigma_a = \text{const}$, что обеспечивает достаточную точность получаемых результатов. Анализ показывает, что при реализации трения в зоне растяжения с ростом величины напряжений (переход сверху вниз) происходит снижение среднего значения параметра трения, а при реализации трения в зоне сжатия с ростом величины напряжений (переход снизу вверх) происходит увеличение среднего значения параметра трения. При постоянной величине амплитуды напряжений $\sigma_a = 200$ МПа средняя величина параметра трения в зоне растяжения на $\sim 10\%$ меньше аналогичной величины при трении в зоне сжатия, а при $\sigma_a = 600$ МПа данное расхождение составляет уже $\sim 20\%$.

Все графики, представленные на рисунке 7, можно аппроксимировать линейным уравнением одного вида

$$f_\sigma = f_r \pm a_r \frac{\sigma_a}{p_0} = f_r \left(1 \pm \frac{a_r \sigma_a}{f_r p_0} \right) = f_r (1 \pm a_r f_r), \quad (62)$$

где a_r – параметр взаимодействия, характеризующий угол наклона прямых $f_\sigma(\sigma_a/p_0)$ к оси абсцисс.

Таким образом, уравнение (56) практически аналогично уравнениям (17а) и (50), полученным исходя из других предпосылок.

Результаты сравнения экспериментально установленных и теоретических значений коэффициента сопротивления качению в силовой системе при $k_{\sigma/p} = 0,225$ и $\sigma_a/p_0 = 0,3$ представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Погрешность определения коэффициента сопротивления качению по экспериментальным результатам и теоретических расчетов

Силовая система	p_0 , МПа	Параметр взаимодействия a_r		Коэффициент трения в силовой системе f_σ				Погрешность, %	
		$\sigma > 0$	$\sigma < 0$	результаты эксперимента		расчет по (56)			
				$\sigma > 0$	$\sigma < 0$	$\sigma > 0$	$\sigma < 0$	$\sigma > 0$	$\sigma < 0$
Сталь 18ХГТ/Сталь 18ХГТ	2000	0,010	0,026	0,060	0,070	0,058	0,067	2,06	5,08

Видно, что в данном случае расчетные оценки удовлетворительно соответствуют экспериментальным результатам как в качественном (закономерности), так и в количественном (численные значения) отношениях.

Аналогичные экспериментальные результаты получены и для других сочетаний материалов. Так, на рисунке 7, б показаны результаты испытаний силовой системы сталь 45/сталь 25ХГТ. Здесь также обнаруживаются описанные выше закономерности.

Таким образом, закон трения для силовой системы обобщается в следующей форме:

$$\tau_\sigma = f_\sigma p_\sigma, \quad (63)$$

или

$$\tau_{\sigma} = f_s \frac{1 \pm \mu_p f_f}{1 \pm \chi_p (\sigma_a / p_a)} P_{\sigma}. \quad (63a)$$

Хотя формально выражения (7а) и (57) представляются различными, однако содержательный смысл их оказывается единым: (обобщенная) сила трения пропорциональна (обобщенной же) контактной нагрузке, при этом коэффициент пропорциональности (21) тоже становится обобщенным (он не равен коэффициенту пропорциональности в паре трения: в принципе $f_{\sigma} \neq f_s$ [см. также (22)]. Таким образом, закон трения в силовой системе гласит: в общем случае сила трения пропорциональна как контактной, так и объемной нагрузке, если последняя возбуждает циклические напряжения ($\pm \sigma$) в области контакта.

Выше не рассматривается задача о выделении адгезионной составляющей силы (либо коэффициента) трения в силовой системе, как это принято обычно делать при чистом трении; такая задача остается за рамками данной статьи. Заметим лишь, что, по-видимому, обе нагрузки (и контактная, и циклическая) совместно влияют на состояние адгезии при трении. Подобная задача, конечно же, может быть рассмотрена и на наноуровне; до настоящего времени она, по имеющимся сведениям, не ставилась (см., например, обзор [14]).

Выводы.

1 Сформулирован обобщенный закон трения (57), согласно которому сила трения пропорциональна как контактной, так и объемной нагрузке, если последняя возбуждает циклические напряжения в области контакта. Записаны его разные формы (17а), (57). Проверка этого закона в форме (56) показала, что погрешность теоретического решения составляет порядка 5 % для условия проведенного эксперимента.

2 Численные значения коэффициента (силы) трения в силовой системе могут быть, в зависимости от условий испытания, больше или меньше аналогичных характеристик в паре трения.

3 Индекс трения (12) обобщенно характеризует трение в силовой системе, и он связан с обычным коэффициентом трения обратной зависимостью.

4 Параметр взаимодействия при трении в силовой системе μ_p определяется (обусловлен) как условиями контакта, так и физико-механическими свойствами контактирующих материалов, и принимает численные значения в интервале (0; 1). Граничные величины означают: а) $\mu_p = 0$ – циклическое нагружение в системе не реализуется; б) $\mu_p = 1$ – направление движения при трении и при циклическом деформировании совпадают. Чем больше значение μ_p , тем сильнее взаимодействие элементов в системе.

5 В работе выполнен комплексный феноменологический, теоретический и экспериментальный анализы процессов трения в силовой системе. Показано, что во всех случаях устанавливаются единые (подобные) закономерности.

Список литературы

1 **Сосновский, Л. А.** Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.

2 **Hardy, W. D.** Boundary Lubrication – The Paraffin Series / W. D. Hardy, I. Doubleday // Proc. Roy Soc. – London, 1922. – P. 550–574.

3 **Боуден, Ф. Р.** Трение и смазка / Ф. Р. Боуден, Д. Тейбор. – М. : Машгиз, 1960, – 101 с.; они же: Трение и смазка твердых тел. – М. : Машиностроение, 1968, – 543 с.

4 **Tomlinson, G.** A molecular theory of friction / G. Tomlinson // Phil. Mag. – 1929. – V. 7. – № 46. – P. 907–939.

5 **Мур, Д.** Основы и применения трибоники / Д. Мур. – М. : Мир, 1978, – 487 с.

6 **Suh, N. R.** Tribophysics / N. R. Suh. – Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1986. – 498 p.

7 **Бакли, Д.** Поверхностные явления при трении и фрикционном взаимодействии / Д. Бакли. – М. : Машиностроение, 1986, – 360 с.

8 **Brushan, B.** Principles and applications of tribology / B. Brushan. – N.Y. : Wiley, 1999. – 390 p.

9 **Мышкин, Н. К.** Трибология. Принципы и приложения / Н. К. Мышкин, М. И. Петраковец. – Гомель : ИММС НАНБ, 2002. – 304 с.

10 **Крагельский, И. В.** Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 528 с.

11 **Крагельский, И. В.** Развитие науки о трении. Сухое трение / И. В. Крагельский, В. С. Щедров. – М. : Изд-во академии наук СССР, 1956. – 237 с.

12 Основы трибологии : учеб. / А. В. Чичинадзе [и др.] / под ред. А. В. Чичинадзе. – М. : Машиностроение, 2001. – 663 с.

13 **Гаркунов, Д. Н.** Триботехника / Д. Н. Гаркунов. – М. : Машиностроение, 1985. – 524 с.

14 Современная трибология: Итоги и перспективы / К. В. Фролов [и др.]. – М. : Машиностроение, 2008. – 480 с.

15 Трибофатика. Термины и определения (Межгосударственный стандарт): ГОСТ 30638–99. – Введ. 2001–01–01. – Минск : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации; Белорус. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 1999. – 17 с.

16 Износоусталостные повреждения и их прогнозирование (трибофатика) / Л. А. Сосновский [и др.] ; под науч. ред. Л. А. Сосновского. – Гомель – Киев – Москва – Ухань, 2001. – 170 с.

17 **Сосновский, Л. А.** Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций / Л. А. Сосновский, М. А. Журавков, С. С. Щербаков. – Минск : БГУ, 2011. – 487 с.

18 **Щербаков, С. С.** Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2011. – 406 с.

19 **Буфеев, В. А.** Явление воздействия пространственной системы активных сил на процесс трения. (Явление суперкулонова, или надкулонова внешнего трения) / В. А. Буфеев // Трение и износ. – 1996. – № 1. – С. 50–57.

20 **Тюрин, С. А.** Сравнительное исследование коэффициентов трения при качении и контактно-механической усталости / С. А. Тюрин, С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2005. – Т. 71. – № 2. – С. 48–51.

21 **Дедков, Г. В.** Нанотрибология: экспериментальные факты и теоретические модели / Г. В. Дедков // Успехи физических наук. – 2000. – Т. 170. – № 6. – С. 585–618.

22 **Марков, Д. П.** Трибология и ее применение на железнодорожном транспорте / Д. П. Марков // Труды ВНИИЖТ. – М. : Интекст, 2007. – 408 с.

23 **Пожбелко, В. И.** Новые аналитические законы и универсальные константы предельного трения и износа трения твердых тел / В. И. Пожбелко // Трение, износ, смазка. – 2010. – Т. 13. – № 43. – С. 1–9.

24 **Сосновский, Л. А.** Трение в трибофатической системе / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков, В. В. Комиссаров // Тр. VI Международного симпозиума по трибофатике (ISTF

- 2010), 25 окт. – 1 нояб. 2010 г., Минск (Беларусь) / редкол. : М. А. Журавков (пред.) [и др.]. – Минск : БГУ, 2010. – Т. 1. – С. 361–373.
- 25 **Дерягин, Б. В.** Молекулярная теория трения и скольжения / Б. В. Дерягин // ЖФХ. – 1934. – Т. 5. – № 9. – С. 1165–1176.
- 26 **Fleischer, G.** Energetische Methode zur Bestimmung des Verschleißes / G. Fleischer // Schmierungs-technik. – 1972. – В. 4. – Н. 9. – С. 269–274.
- 27 Новое о структурных особенностях трения твердых тел / Н. М. Алексеев [и др.] // Трение и износ. – 1988. – Т. 9. – № 6. – С. 965–974.
- 28 **Alexeyev, N. M.** On the motion of material in the border layer in solid state friction / N. M. Alexeyev // Wear. – 1990. – В. 139. – Р. 33–48.
- 29 **Rubenstein, C.** General theory of the surface friction of solids / C. Rubenstein // Proc. Phys. Soc. – London. – 1956. – В. 69. – Р. 921–932.
- 30 **Rubenstein, C.** The coefficient of friction of metals / C. Rubenstein // Wear. – 1958. – В. 2. – № 2. – Р. 85–96.
- 31 **Liu, J.** Sliding friction of copper // Mechanisms of solid friction / J. Liu / Ed. by P. J. Bryant, M. Lavik, G. Salomon. – Amsterdam : Elsevier, 1964. – Р. 163–174.
- 32 **Rigney, D.A.** Plastic deformation and sliding friction of metals / D. A. Rigney, J. P. Hirth // Wear. – 1979. – В. 53. – Р. 345–370.
- 33 **Suh, N. P.** Relationship between the coefficient of friction and the wear rate of metals / N. P. Suh, P. Sridharan // Wear. – 1975. – В. 34. – № 3. – Р. 291–299.
- 34 **Suh, N. P.** The delamination theory of wear / N. P. Suh // Wear. – 1973. – В. 25. – Р. 111–124.
- 35 **Tsuya, Y.** Microstructures of wear, friction and solid lubrication / Y. Tsuya // Mechanical Engineering Laboratory, Igusa, Saginamiku, Tokyo, Japan. Techn. Report. 1976. – № 81. – Р. 50–65.
- 36 **Ахматов, А. С.** Молекулярная физика граничного трения / А. С. Ахматов. – М. : Физматгиз, 1963. – 472 с.
- 37 Трибофатика. Термины и определения (Стандарт Беларуси) : СТБ 994–95. – Введ. 1996–07–01. – Мн. : Белорус. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 1995. – 98 с.
- 38 **Сосновский, Л. А.** Основы трибофатика : в 2 т. / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с.; Т. 2. – 234 с.
- 39 **Sosnovskiy, L. A.** Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and Its Prediction / L. A. Sosnovskiy // Series : Foundations of Engineering Mechanics, Springer, 2005. – 424 p.
- 40 **Sherbakov, S. S.** The Force and the Coefficient of Friction in the Active Systems / S. S. Sherbakov // Proc. of the III International Symposium on Tribo-Fatigue (ISTF 2000), Beijing, China, Oct. 22–26, 2000. – Beijing : Hunan University Press, 2000. – Р. 385–388.
- 41 Modern tribology handbook / edited by Bharat Bhushan. – CRC Press, 2001. – 1690 p.
- 42 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
- 43 **Вермелен, П. Дж.** Контакт несферических упругих тел, передающих касательные силы / П. Дж. Вермелен, К. Л. Джонсон. – Прикладная механика. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – М. : Мир, 1964. – Т. 31. – № 2. – С. 202–204.
- 44 **Ишлинский, А. Ю.** Механика: идеи, задачи, приложения / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1985. – 624 с.
- 45 **Горячева, И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
- 46 **Тюрин, С. А.** Сравнительное исследование коэффициентов трения при качении и контактно-механической усталости / С. А. Тюрин, С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский // Заводская лаборатория. – 2005. – Т. 71. – № 2. – С. 48–51.
- 47 **Сосновский, Л. А.** Сравнительное экспериментальное исследование параметров трения в паре трения и силовой системе /
- Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков, В. В. Комиссаров // Трение и износ. – 2012. – Т. 33. – № 3. – С. 258–264.
- 48 **Нотт, Дж. Ф.** Основы механики разрушения / Дж. Ф. Нотт. – М. : Металлургия, 1978. – 256 с.
- 49 **Harnoy, A.** Modeling and measuring friction effects / A. Harnoy, B. Friedland, S. Cohn // IEEE Control Systems Magazine. – 2008. – № 28 (6). – Р. 82–91.
- 50 **Armstrong-H'elouvry, B.** A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction / B. Armstrong-H'elouvry, P. Dupont, C. Canudas de Wit // Automatica. – 1994. – № 30. – Р. 1083–1138.
- 51 **Hensen, R. H. A.** Controlled mechanical systems with friction : Ph. D. thesis / R. H. A. Hensen. – Eindhoven, The Netherlands : Eindhoven Univ. Technol., 2002. – 180 p.
- 52 **Dahl, P. R.** A solid friction model / P. R. Dahl // The Aerospace Corporation. Technical report, 1968. – 260 p.
- 53 **Dahl, P. R.** Measurement of solid friction parameters of ball bearings / P. R. Dahl // The Aerospace Corporation. Technical report, 1977. – 236 p.
- 54 New model for control of systems with friction / C. Canudas de Wit [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – № 40 (3). – Р. 419–425.
- 55 **Gafvert, M.** Comparisons of two dynamic friction models / M. Gafvert, 1997. – Р. 386–391.
- 56 Single state elastoplastic friction models / P. Dupont [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – № 47 (5). – Р. 787–792.
- 57 An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation / J. Swevers [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – № 45 (4). – Р. 675–686.
- 58 **Lampaert, V.** Modification of the leuven integrated friction model structure / V. Lampaert, J. Swevers, and F. Al-Bender // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – № 47 (4). – Р. 683–687.
- 59 **Al-Bender, F.** A novel generic model at asperity level for dry friction force dynamics / F. Al-Bender, V. Lampaert, J. Swevers // Tribology Letters. – 2004. – № 16 (1–2). – Р. 81–94.
- 60 **Haessig, Jr. D. A.** On the modeling and simulation of friction / Jr. D. A. Haessig, B. Friedland // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME. – 1991. – № 113 (3). – Р. 354–362.
- 61 **Braun, O. M.** Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Report. – 1998. – № 306 (1–2). – Р. 1–108.
- 62 Nanotribology and nanoscale friction / Y. Guo [et al.] // IEEE Control Systems Magazine. – 2008. – № 28 (6). – Р. 92–100.
- 63 **Weiss, M.** Dry friction in the Frenkel – Kontorova – Tomlinson model: static properties / M. Weiss, F. J. Elmer // Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics. – 1996. – № 53 (11). – Р. 7539–7549.
- 64 **Al-Bender, F.** Characterization of friction force dynamics / F. Al-Bender, J. Swevers // IEEE Control Systems Magazine. – 2008. – № 28 (6). – Р. 64–81.
- 65 **Al-Bender, F.** The generalized maxwell-slip model: A novel model for friction simulation and compensation / F. Al-Bender, V. Lampaert, J. Swevers // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2005. – № 50 (11). – Р. 1883–1887.
- 66 **Ling, F. F.** On kinetic friction between unlubricated metallic surfaces / F. F. Ling, E. Saibel // Wear. – 1957. – В. 1. – № 3. – Р. 167–172.
- 67 **Сливко-Кольчик, Л. И.** О молекулярных процессах на фрикционном контакте / Л. И. Сливко-Кольчик // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М. : Наука, 1971. – С. 33–38.
- 68 **Бартенев, Г. М.** Природа и механизм трения каучукоподобных полимеров в различных физических состояниях / Г. М. Бартенев, А. И. Елькин // Механика полимеров. – 1967. – № 1. – С. 123–125.

69 **Федоров, С. В.** Энергетическая модель коэффициента трения скольжения / С. В. Федоров // *Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении–2014 (FRITME-2014)* : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 13–15 мая 2014 г. – М. : ИМАШ РАН им. А. А. Благоворова, 2014. – С. 351–356.

70 **Карапетян, С. С.** Адгезионная модель трения / С. С. Карапетян, Ю. И. Коростелин // *Машиноведение*. – 1980. – № 6. – С. 100–105.

71 **Назаренко, П. В.** Определение деформационной составляющей силы трения внешнего трения / П. В. Назаренко, Л. А. Анистратенко // *Проблемы трения и изнашивания*. – Киев : Техника, 1976. – С. 18–21.

72 **Straffelini, G. A.** A simplified to the adhesive theory of friction / G. A. Straffelini // *Wear*. – 2001. – V. 249. – P. 7985.

73 **Васильев, Ю. Н.** Расчет коэффициента трения графита / Ю. Н. Васильев, Д. А. Горбунов, В. А. Фуголь // *Трение и износ*. – 1988. – Т. 9. – № 5. – С. 879–885.

74 **Березин, Г. Н.** Адсорбционная модель трения графита / Г. Н. Березин, Ю. Н. Васильев, М. М. Дубинин // *ДАН СССР*. – 1987. – Т. 292. – № 3. – С. 644–647.

75 **Теодорович, Э. В.** Сила трения в модели одномерных кристаллов / Э. В. Теодорович // *Контактное взаимодействие твердых тел и расчете сил трения и износа*. – М. : Наука, 1971. – С. 28–32.

Получено 29.05.2016

L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov, V. V. Komissarov. Law (external) friction and summary: theory and experiment.

The paper made a comprehensive phenomenological, theoretical and experimental analysis of the friction processes in the active system. It is shown that in all cases shall be established by common (similar) laws.